Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1916)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'ARITHMÉTIQUE DES NOMBRES HYPERCOMPLEXES

Autor: DuPasquier, L.-G.

Kapitel: II

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16879

II

13. — Envisageons un *système de nombres hypercomplexes à* r *coordonnées indépendantes,* système constitué par une infinité de « complexes » ou « éléments » tels que

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_r e_r = \sum_{\lambda}^{1\dots r} x_\lambda e_\lambda \tag{4}$$

où les x_λ sont des nombres *réels* quelconques dits « *coordonnées* du complexe x », et les e_λ des symboles dits « *unités relatives* du système de nombres hypercomplexes[1] ».

Supposons définies, dans ce système de nombres hypercomplexes, les opérations rationnelles de l'addition et de la multiplication, leurs opérations inverses : la soustraction et la division, ainsi que l'égalité de deux complexes. On sait que, dans ce cas, le produit $e_i . e_k$ de deux unités relatives quelconques est une fonction linéaire, à coefficients réels, des mêmes unités relatives e_λ. Par exemple, i et k désignant, chacun, l'un quelconque des nombres 1, 2, 3, ... , r, on a

$$e_i . e_k = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \dots + \gamma_r e_r = \sum_{\lambda}^{1\dots r} \gamma_\lambda e_\lambda \,.$$

Pour indiquer dans la notation que les constantes *réelles* γ_λ peuvent varier avec i et k, écrivons

$$e_i . e_k = \gamma_{ik1} e_1 + \gamma_{ik2} e_2 + \dots + \gamma_{ikr} e_r$$

ou, sous forme condensée,

$$e_i . e_k = \sum_{\lambda}^{1\dots r} \gamma_{ik\lambda} e_\lambda \qquad (i, k = 1, 2, \dots, r) \,. \tag{5}$$

Ces relations (5), jointes aux définitions de l'addition et de

[1] Il est souvent utile de distinguer entre « coordonnées » et « composantes » d'un nombre complexe. Par « coordonnées », on entend les nombres $x_1; x_2; \dots; x_r$, tandis que les « composantes » du nombre hypercomplexe x sont les produits $x_1 e_1; x_2 e_2; \dots; x_r e_r$.

l'égalité, fixent le système considéré de nombres hypercomplexes et le définissent complètement.

14. — La considération du nombre hypercomplexe *rationnel* est fondamentale pour tout ce qui va suivre. Commençons donc par poser la

Définition IV : Appelons *complexe rationnel* un tel nombre hypercomplexe x dont toutes les r coordonnées x_λ sont des nombres rationnels quelconques, entiers ou fractionnaires.

Un complexe

$$x = \sum_{\lambda}^{1\ldots r} x_\lambda e_\lambda$$

sera dit *non rationnel,* si l'une au moins de ses r coordonnées est un nombre réel irrationnel.

Dans la suite, il sera question exclusivement de complexes rationnels.

L'ensemble de tous les complexes rationnels forme un « *corps* de nombres » ou « domaine de rationalité », c'est-à-dire que les complexes rationnels se reproduisent par addition, soustraction, multiplication et division. Autrement dit : la somme, la différence, le produit et le quotient (pour autant que la division est possible) de complexes rationnels est toujours de nouveau un complexe rationnel. Nous désignerons par le symbole $\{R\}$ ce corps comprenant tous les complexes rationnels.

15. — Pour faire l'arithmétique généralisée ou arithnomie de ce corps de nombres $\{R\}$, il faut tout d'abord le partager en deux ensembles, mettant d'une part : les complexes rationnels « entiers », d'autre part : les complexes rationnels « non entiers ». La définition suivante, que j'appelle « la définition *lipschitzienne* », se présente le plus naturellement à l'esprit :

Définition V : Un complexe rationnel x est dit *entier,* si toutes ses r coordonnées sont des nombres entiers ordinaires ; le complexe rationnel x sera dit *non entier,* si l'une au moins de ses r coordonnées est un nombre fractionnaire.

En se basant sur cette définition du complexe entier, on peut construire toute une arithmétique du système considéré de nombres hypercomplexes, arithmétique généralisée qui présente beaucoup d'analogies, mais aussi bien des contrastes, avec l'arithmétique ordinaire. Or, l'exemple des quaternions rationnels prouve que cette définition *lipschitzienne* n'est pas toujours satisfaisante. Voici les considérations qui peuvent conduire à une autre définition, souvent préférable à la définition lipschitzienne du complexe entier.

16. — Les « nombres entiers » sont caractérisés par les quatre propriétés fondamentales suivantes :

1° Ils doivent se reproduire par addition, soustraction et multiplication; en d'autres termes : la somme, la différence et le produit de deux « entiers » quelconques doit toujours être de nouveau un « entier ». On exprime cela en disant que les nombres entiers doivent « former *un domaine d'intégrité* ».

2° Ce domaine d'intégrité doit contenir « le nombre 1 » et « le nombre zéro », c'est-à-dire deux complexes jouant, dans ce domaine, le même rôle que 1 et 0 dans l'arithmétique ordinaire. Sans « le nombre 1 », on aurait un système de nombres entiers dont aucun ne serait divisible par lui-même, ce qui n'est pas normal; sans « le nombre zéro », la soustraction ne serait pas toujours possible.

3° L'ensemble des « nombres entiers » doit former un domaine d'intégrité *à base finie;* en d'autres termes, il doit être possible de choisir, dans cet ensemble, un nombre fini de complexes, disons t_1, t_2, ... , t_n, jouissant de la propriété suivante : si m_1, m_2, ... , m_n désignent des nombres entiers ordinaires, l'expression

$$m_1 t_1 + m_2 t_2 + \dots + m_n t_n \qquad (6)$$

doit pouvoir reproduire, par des valeurs appropriées des nombres entiers m_λ, absolument tous les éléments de l'ensemble en question; et inversement : ce domaine d'intégrité doit se composer exclusivement des éléments, mais de *tous* les éléments, qu'on obtient en attribuant, dans l'expression (6) ci-dessus, à m_1, m_2, ... , m_n, de toutes les manières possibles, les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

Dans ce cas, les complexes $t_1, t_2, \ldots, t_n$ peuvent engendrer, *par les seules opérations de l'addition et de la soustraction répétées un nombre fini de fois*, n'importe quel autre élément du domaine d'intégrité. On dit que ces complexes « forment *une base* » du domaine d'intégrité envisagé, et l'on désigne celui-ci d'ordinaire par le symbole

$$[t_1, t_2, \ldots, t_n] .$$

Si l'on remarque que pour passer de $+t$ à $-t$, il suffit de soustraire deux fois de suite $+t$ de lui-même ; puis, que « soustraire $-t$ » est complètement équivalent à « additionner t », on peut dire ceci : En partant des éléments de la base, on peut reproduire chacun des éléments du domaine en question au moyen d'un nombre fini de soustractions. Le nom de « base » attribué à ces éléments t_λ est ainsi pleinement justifié.

17. — Le fait de constituer un domaine d'intégrité contenant le nombre 1 n'est pas suffisant, à lui tout seul, pour caractériser des nombres « entiers ». On le voit en considérant l'ensemble engendré par $\frac{m}{2^n}$, où m et n représentent des nombres entiers quelconques. Cet ensemble que nous désignons par $\left[\frac{m}{2^n}\right]$ constitue pourtant un domaine d'intégrité contenant le nombre 1 ; il jouit des propriétés 1° et 2° ci-dessus énumérées, mais il ne possède aucune base finie au sens ci-dessus : on ne peut pas indiquer un nombre fini d'expressions de la forme $\frac{m}{2^n}$ telles qu'elles pourraient engendrer toutes les autres par les seules opérations de l'addition et de la soustraction, puisque ces deux opérations ne permettent pas de passer de $\frac{1}{2^n}$ à $\frac{1}{2^{n+1}}$. Aussi le domaine d'intégrité $\left[\frac{m}{2^n}\right]$ ne contient-il pas uniquement des nombres entiers.

18. — Pour abréger, nous emploierons une terminologie proposée par M. *J. König* et poserons la

Définition VI : Nous appellerons « domaine *holoïde* » tout ensemble de complexes quelconques jouissant des trois propriétés fondamentales ci-dessus énumérées (art. 16).

Donc, en vertu de cette définition, tout domaine holoïde contient une infinité d'éléments, parmi lesquels le nombre 1 et le nombre zéro ; de plus, on peut y effectuer, sans restriction aucune, l'addition, la soustraction et la multiplication, et cela sans jamais sortir du domaine en question ; et enfin, il possède une base finie.

Exemples : Les nombres entiers ordinaires forment un domaine holoïde dont la base est 1 ; l'expression (6) se réduit dans ce cas à $m_1 . 1$ qui reproduit bien tous les nombres entiers, lorsqu'on fait parcourir à m_1 la série des nombres entiers.

Les nombres complexes de *Gauss* à coordonnées entières (voir la définition I) forment un domaine holoïde dont la base est $1, i$; en effet, l'expression (6) devient dans ce cas $m_1 . 1 + m_2 . i$, laquelle reproduit bien tous les *complexes entiers de Gauss*, et exclusivement ceux-là, quand m_1 et m_2 parcourent, indépendamment l'un de l'autre, la série des nombres entiers ordinaires. On désigne ce domaine holoïde par le symbole $[1 ; i]$.

Les « quaternions entiers » de M. *Lipschitz* forment un domaine holoïde de base $1, i_1, i_2, i_3$, puisque tout quaternion « entier d'après la définition lipschitzienne » peut se mettre sous la forme $m_0 . 1 + m_1 . i_1 + m_2 . i_2 + m_3 . i_3$ et que cette expression donne toujours un quaternion à cordonnées entières, quelles que soient les valeurs entières attribuées aux m_λ. On désigne ce domaine holoïde par le symbole $[1, i_1, i_2, i_3]$.

Un corps de nombres, n'ayant pas une base finie au sens indiqué plus haut, ne constitue lui-même pas un domaine holoïde, bien que pouvant en contenir une infinité.

19. — Les trois propriétés ci-dessus énumérées et qui caractérisent le domaine holoïde, ne sont pas suffisantes pour caractériser les « nombres entiers ». Il en faut une quatrième. C'est de cette quatrième propriété que n'avait pas tenu compte M. *Lipschitz,* c'est elle qu'a découverte M. *Hurwitz*. La voici :

4° Le domaine holoïde formé par les « nombres entiers » doit être *maximal*.

Définition VII: Soit $[J_1]$ un domaine holoïde quelconque.

Il sera dit *maximal,* s'il n'existe pas, dans le corps de nombres considéré, un autre domaine holoïde contenant *tous* les éléments du domaine en question $[J_1]$ *plus* encore d'autres éléments non contenus dans $[J_1]$.

Or, M. *Hurwitz* a découvert que le domaine holoïde $[1, i_1, i_2, i_3]$ formé par l'ensemble des quaternions à coordonnées entières n'est pas maximal, qu'il est possible de l'élargir en restant dans le même corps de nombres $\{R\}$; on peut, en effet, agrandir de la manière suivante le domaine holoïde $[1, i_1, i_2, i_3]$ sans sortir du domaine de rationalité $\{R\}$ constitué par l'ensemble des quaternions rationnels : soit pour abréger

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + i_1 + i_2 + i_3) \ ;$$

Dans le corps $\{R\}$ *des quaternions rationnels, le domaine holoïde maximal a pour base* ρ, i_1, i_2, i_3. Désignons ce domaine holoïde maximal par le symbole $[J]$, de sorte que $[J]$ sera constitué par l'ensemble des quaternions

$$m_0\rho + m_1 i_1 + m_2 i_2 + m_3 i_3 \tag{7}$$

où les 4 nombres ordinaires m_λ prennent, indépendamment les uns des autres, toutes les valeurs entières possibles. Avec M. *Hurwitz,* nous poserons la définition suivante que nous appellerons « la définition *hurwitzienne* du quaternion entier » :

Définition VIII : Un quaternion rationnel est dit « entier », s'il est contenu dans ce domaine holoïde maximal $[J]$. Un quaternion rationnel est dit « non entier », s'il n'est pas contenu dans ce domaine holoïde maximal $[J]$.

20. — Tout quaternion *entier* tel que t sera donc de la forme (7), ou, en remplaçant ρ par sa valeur :

$$t = \frac{m_0}{2} + \left(m_1 + \frac{m_0}{2}\right)i_1 + \left(m_2 + \frac{m_0}{2}\right)i_2 + \left(m_3 + \frac{m_0}{2}\right)i_3 \ . \tag{8}$$

On trouvera tous les quaternions *entiers,* en prenant pour les quatre nombres m_0, m_1, m_2, m_3, de toutes les manières possibles, des valeurs entières quelconques.

Si m_0 est pair, toutes les coordonnées du quaternion t

seront des nombres entiers. Dans ce cas, t sera un quaternion « entier » également d'après la définition *lipschitzienne* (v. définitions III et V).

Si, au contraire, m_0 est *impair,* les coordonnées non nulles de t seront des nombres rationnels non entiers, des fractions de dénominateur commun 2. Dans ce cas, d'après la définition *lipschitzienne*, t serait un quaternion « non entier », tandis qu'en réalité, en vertu de la définition *hurwitzienne* que nous adoptons, t sera réputé « quaternion entier ». En particulier, les 16 quaternions $\frac{\pm 1 \pm i_1 \pm i_2 \pm i_3}{2}$ qui seraient tous des quaternions « non entiers » au sens de M. *Lipschitz,* sont en réalité des quaternions entiers, en vertu de la définition *hurwitzienne.* La norme de chacun de ces 16 quaternions est égale à 1; ils constituent 16 *unités* dans le domaine holoïde envisagé. Celui-ci contient donc 24 unités en tout, dont 8 seulement à coordonnées entières. (Voir les définitions à l'art. 10.)

21. — Désignons par $[J_0]$ l'ensemble constitué par tous les quaternions à coordonnées entières. On voit immédiatement que $[J_0]$ est contenu entièrement dans $[J]$. En effet, le domaine $[J]$, tout en faisant partie, lui aussi, du corps $\{R\}$ des quaternions rationnels, contient non seulement tous les éléments de $[J_0]$, mais encore une infinité d'autres à coordonnées fractionnaires. Ainsi, $[J_0]$ n'est pas un domaine holoïde maximal.

En construisant l'arithmétique du domaine $[J_0]$, M. *Lipschitz* faisait donc l'arithnomie d'un domaine non maximal; or, quand on fait cela, il faut s'attendre à priori à des irrégularités. Qu'on me permette une analogie : Essayez de construire l'arithmétique des nombres entiers ordinaires en vous basant sur la définition suivante : « J'appelle *nombre entier* tout nombre *pair,* et nombre non entier tous les autres. » D'après cette définition, les nombres impairs seraient donc des nombres « non entiers ». En érigeant une arithmétique basée sur cette définition-là, vous vous apercevrez vite de l'existence d'anomalies déconcertantes. On devine même à l'avance que les théorèmes classiques sur la divisibilité, par exemple, ne joueront pas toujours, si l'on fait reposer l'arithnomie sur une définition pareille. Ce n'est là, bien entendu, qu'une analogie. (La différence capitale provient de ce que l'ensemble de tous les nombres pairs ne contient pas le nombre 1 et ne constitue pas, en conséquence, de domaine holoïde, tandis que $[J_0]$ en est un.) Aussi n'ai-je voulu, en employant cette image, que faire sentir en quelque sorte la raison profonde pourquoi l'on doit s'attendre, à priori, à des anomalies, quand on entreprend de construire l'arithnomie d'un domaine holoïde non maximal.

On le vérifierait sans doute sur un cas concret, déjà dans le domaine des nombres complexes de *Gauss,* en faisant, par exemple, l'arithnomie du domaine holoïde

$$[1\,,\ 360i] = m_1 + 360 m_2\, i\ , \tag{9}$$

où m_1 et m_2 représentent des entiers quelconques. Cela reviendrait à remplacer la définition de *Gauss* (définition I) par celle-ci : Un nombre complexe $a_0 + a_1 i$ sera dit *entier,* s'il est contenu dans le domaine (9). Tous les autres complexes rationnels, même ceux à coordonnées entières (donc tous ceux dont la partie imaginaire n'est pas divisible par 360), seraient réputés *non entiers.*

22. — Les nombres complexes de *Gauss,* $a + bi$, où les coordonnées a et b sont des nombres entiers ordinaires, constituent un domaine holoïde *maximal;* définition lipschitzienne et définition hurwitzienne sont équivalentes dans ce système de nombres complexes; les deux conduisent au même ensemble de complexes *entiers;* voilà pourquoi il est possible, en adoptant la définition lipschitzienne, d'y construire une arithnomie d'une simplicité analogue à celle de l'arithmétique classique. On peut se demander si *Gauss,* en posant cette définition I, a simplement eu de la chance, ou s'il connaissait la raison profonde pourquoi il faut la poser? Il est permis de croire que si *Gauss* avait été amené à faire l'arithmétique généralisée des quaternions « entiers », il aurait commencé par se baser sur la définition lipschitzienne III; puis cherchant la raison d'être des singulières exceptions qu'il eût constatées, que *Gauss* aurait alors fait

la découverte, dont la priorité revient à M. *Hurwitz,* que le domaine holoïde $[J_0]$ n'est pas maximal, qu'il est en conséquence préférable de fixer d'une autre manière la notion du quaternion entier.

23. — En adoptant la définition *hurwitzienne* VIII du quaternion entier, définition qui engendre le domaine [J] de l'article 19, on peut ériger une arithnomie des quaternions entiers exempte de ces exceptions singulières que présente la théorie *lipschitzienne* qui n'envisage que le domaine $[J_0]$ de l'article 21. Reprenons les exemples cités plus haut. Les quaternions entiers $a = 2$ et $b = 1 + i_1 + i_2 + i_3$ (v. art. 12) possèdent, dans le domaine [J], comme plus grand commun diviseur 2 (ils y sont même associés), alors que dans la théorie *lipschitzienne* (domaine $[J_0]$), ils n'en possèdent aucun.

Le théorème de décomposition (v. art. 11) reste applicable, dans le domaine [J], à tout quaternion entier c, quelle que soit sa norme, et peut s'énoncer ainsi : Soit c un quaternion entier primitif donné, de norme

$$N(c) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots p_s$$

où les p_λ sont les facteurs premiers, égaux ou inégaux entre eux, de la norme de c, facteurs rangés dans un ordre tout à fait arbitraire, mais déterminé. Il est alors toujours possible de représenter le quaternion donné c comme produit de quaternions premiers :

$$c = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi_3 \cdot \cdots \pi_s$$

tels que $N(\pi_1) = p_1$; $N(\pi_2) = p_2$; ... ; $N(\pi_s) = p_s$, et cette décomposition est univoque. Chacun des quaternions premiers qui figurent dans le produit se détermine de proche en proche, sans ambigüité.

Dans sa théorie qui n'envisage que le domaine $[J_0]$, M. *Lipschitz* est obligé d'ajouter une exception : « Tout se passe de même pour les quaternions entiers primitifs dont la norme est divisible par 4, jusqu'à ce que l'ordre fixé pour les facteurs de cette norme amène pour la première fois le nombre 2 ; on peut alors choisir arbitrairement. comme facteur premier, l'un quelconque des 24 quaternions premiers dont la norme est égale à 2; ce choix une fois fait, les quaternions premiers dont les normes sont les nombres premiers suivants, pris dans l'ordre indiqué, se déterminent de proche en proche, sans ambigüité, jusqu'à la fin. »

Cette singulière exception tombe également quand on passe du domaine $[J_0]$ au domaine holoïde maximal $[J]$.

24. — Résumons les considérations précédentes en disant :

Les nombres hypercomplexes « entiers » doivent former non seulement un domaine holoïde, mais un domaine holoïde maximal.

Définition IX : Un complexe rationnel

$$x = \sum_{\lambda}^{1\ldots r} x_\lambda e_\lambda$$

sera dit *entier*, s'il est contenu dans le domaine holoïde maximal en question. Le complexe rationnel x sera dit *non entier*, s'il ne fait pas partie du domaine holoïde maximal en question. (Définition *hurwitzienne*.)

Cette définition hurwitzienne du nombre hypercomplexe *entier* peut avoir comme conséquence qu'on appellera « entiers » même certains complexes rationnels x à coordonnées x_λ fractionnaires. (Exemple : les quaternions.) Inversement : il peut arriver aussi que certains nombres hypercomplexes rationnels x ne soient pas des complexes « entiers », bien que toutes leurs coordonnées x_λ soient des nombres entiers ordinaires.

III

25. — Pour construire l'arithmétique d'un corps $\{R\}$ de nombres hypercomplexes rationnels, il faut toujours commencer par une *opération préliminaire* consistant à partager ce corps $\{R\}$ en deux ensembles, mettant d'un côté : les complexes rationnels « entiers », de l'autre : les complexes rationnels « non entiers ». Or, il peut se présenter la curieuse circonstance que cette opération préliminaire ne soit pas univoque. Nous l'avons découvert en étudiant une classe