Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1916)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'ARITHMÉTIQUE DES NOMBRES HYPERCOMPLEXES
Autor: DuPasquier, L.-G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16879

SUR L'ARITHMÉTIQUE DES NOMBRES HYPERCOMPLEXES

PAR

L.-G. DuPasquier (Neuchâtel).

Sommaire :

I. Le nombre complexe « entier » d'après *Gauss* et le quaternion « entier » d'après M. *Lipschitz*.

II. Propriétés caractéristiques des nombres entiers ; le domaine holoïde maximal ; définition lipschitzienne et définition hurwitzienne du nombre hypercomplexe « entier ».

III. La définition hurwitzienne dans le cas des tettarions.

IV. Un exemple particulier de corps de nombres sans domaine holoïde maximal.

V. Quelques singularités de l'arithmétique généralisée dans ce domaine holoïde non maximal.

Méthodes propres à faire tomber ces singularités ; « nombres idéaux » de *Kummer* et théorie des « idéaux » de *Dedekind*.

I

1. — En construisant une *théorie des nombres* ou *arithnomie*[1] dont les *éléments* sont non seulement les nombres entiers ordinaires, mais les nombres entiers dits imaginaires, ou complexes, de la forme $a_0 + a_1 i$, où a_0 et a_1 représentent des nombres réels quelconques, tandis que i est un symbole défini par l'équation

$$i^2 = -1 \ , \qquad \text{ce qui fait écrire} \qquad i = \sqrt{-1} \ ,$$

[1] Le néologisme d'arithnomie est proposé par M. A. Aubry à Dijon ; c'est une abréviation d'« arithmonomie » qui est synonyme d'« arithmologie », de « théorie des nombres », ou d'« arithmétique généralisée ». (En grec, « arithmos » = nombre ; « nomos » = loi ; d'où « arithmonomie » ; l'*arithnomie* signifie donc : la science des lois qui régissent les nombres.)

en créant cette arithmétique généralisée, dis-je, *Gauss* a fait œuvre de génie, car cette création hardie ouvrait à la théorie des nombres des horizons tout nouveaux et un champ de recherches d'une étendue insoupçonnée.

Cette arithmétique généralisée due à *Gauss* repose sur une définition qui semble se présenter d'elle-même à l'esprit et que voici :

Définition I: Soit $a = a_0 + a_1 i$ un nombre complexe, où a_0 et a_1 représentent deux nombres *réels* dits *coordonnées* du nombre complexe a. Nous appellerons a « un nombre complexe *entier* », si ses deux coordonnées, a_0 et a_1, sont des nombres *entiers ordinaires* positifs, nuls ou négatifs : nous appellerons a « un nombre complexe *non entier* », si l'une au moins de ses deux coordonnées est fractionnaire ou irrationnelle.

Par abréviation, nous dirons souvent, dans la suite, *entier complexe* au lieu de « nombre complexe entier ».

2. — L'arithmétique généralisée érigée par *Gauss* dans le domaine de ces nombres complexes et basée sur la définition I ci-dessus, présente des analogies frappantes avec l'arithmétique ordinaire. On y retrouve, entre autres, les nombres complexes entiers *irréductibles* jouant le même rôle que les nombres premiers dans l'arithmétique classique. Nous les appellerons souvent, pour abréger, *nombres premiers complexes*. On sait que ce sont : 1° les nombres premiers ordinaires de la forme $p = 4n + 3$, à savoir

$$3, \quad 7, \quad 11, \quad 19, \quad 23, \quad 31, \quad 43, \quad 47, \quad 59, \ldots$$

dont la *norme* est p^2 ; 2° le nombre $1 + i$ dont la norme est égale à 2 ; 3° les nombres complexes entiers $r + si$ dont la norme, $r^2 + s^2$, est un nombre premier ordinaire p de la forme $4n + 1$, par exemple :

$$1 + 2i, \quad 2 + i, \quad 2 + 3i, \quad 3 + 2i, \quad 1 + 4i, \quad 4 + i, \quad 2 + 5i, \quad 5 + 2i,$$
$$1 + 6i, \quad 1 - 6i, \quad 4 + 5i, \quad 5 + 4i, \quad \ldots$$

On retrouve ensuite, dans l'arithmétique généralisée de *Gauss*, la décomposition, toujours possible et toujours univoque, de tout entier complexe donné en ses facteurs premiers. On y retrouve encore *le plus grand commun diviseur* et le plus petit commun multiple de deux (ou, plus généralement, de n) entiers complexes donnés ; l'analogue de l'algorithme d'*Euclide* permettant de déterminer ce plus grand commun diviseur par un nombre fini d'opérations rationnelles. On y trouve aussi toute la théorie des *congruences;* on y retrouve l'analogue du théorème de *Fermat,* l'analogue du théorème de *Wilson,* etc.

3. — En 1886, M. *Lipschitz* publiait le résultat de ses recherches sur la transformation, par des substitutions réelles, d'une somme de deux carrés en elle-même[1]. En partant d'un point de vue très original et tout à fait personnel, M. *Lipschitz* découvrait à nouveau le calcul des nombres complexes de la forme $a_0 + a_1 i$, où $i^2 = -1$. Il reconstruisait alors l'arithmétique généralisée ou arithnomie de ces nombres complexes, comme *Gauss* l'avait déjà fait avant lui, en prenant aussi comme éléments les nombres complexes *entiers* tels qu'ils résultent de la définition I ci-dessus. Quoique son point de départ soit tout autre que celui de *Gauss,* M. *Lipschitz* arrive au même résultat : à la même arithnomie, en se basant sur la même définition.

4. — Pour préparer la généralisation à d'autres systèmes de nombres complexes, nous introduirons dès maintenant un nouveau symbole e_0 en posant $e_0 = 1$; écrivant alors e_1 à la place de i, de sorte que

$$e_1^2 = -1 = -e_0 ,$$

on voit que les nombres complexes de *Gauss* peuvent s'écrire sous la forme

$$a = a_0 e_0 + a_1 e_1 = \sum_{\lambda}^{0;\,1} a_\lambda e_\lambda ,$$

où les e_λ sont des symboles dits « *unités relatives* du sys-

---

[1] *Untersuchungen über die Summen von Quadraten.* Bonn, 1886. Voir la traduction française publiée par *J. Molk* dans le « Journal de mathématiques pures et appliquées » fondé par *Liouville*, IV[e] série, tome 2[e] (année 1886), p. 373-439 : *Recherches sur la transformation, par des substitutions réelles, d'une somme de deux ou de trois carrés en elle-même.*

tème de nombres complexes », symboles obéissant, par définition, aux relations

$$e_0^2 = e_0 \ , \qquad e_1^2 = - e_0 \ , \qquad e_0 . e_1 = e_1 . e_0 = e_1 \qquad (1)$$

Nous dirons que les nombres complexes de *Gauss* forment « un système de nombres complexes à 2 coordonnées indépendantes », ou « à 2 unités relatives », système entièrement défini par les conventions sur l'égalité, l'addition et par les relations (1) qui règlent la multiplication. On peut ranger celles-ci en un tableau de la manière suivante :

	e_0	e_1
e_0	e_0	e_1
e_1	e_1	$-e_0$

i et k représentant l'un des nombres 0 ou 1, le produit $e_i . e_k$ se trouve dans la ligne (horizontale) ayant à gauche e_i et dans la colonne (verticale) portant en haut e_k.

5. — Cherchant à étendre ses résultats à la transformation, par des substitutions réelles, d'une somme de *trois* carrés en elle-même, M. *Lipschitz*, partant du même point de vue original, retrouva le calcul des quaternions découvert avant lui, en 1843, par *W. R. Hamilton*.

Voici, à l'intention des lecteurs non versés dans la théorie des quaternions, les principes fondamentaux de ce calcul exposés dans un langage purement arithmétique.

On sait que les *quaternions* sont des nombres hypercomplexes à 4 coordonnées indépendantes, tel par exemple

$$a = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 \ ,$$

où a_0, a_1, a_2, a_3 représentent quatre nombres réels dits *les coordonnées*[1] du quaternion a, et i_1, i_2, i_3, trois symboles

[1] Nous distinguons entre « coordonnées » et « composantes » d'un nombre complexe (ou hypercomplexe). Par *composantes* du quaternion a, nous entendons les produits $a_1 i_1$; $a_2 i_2$; $a_3 i_3$. Comparez la note suivante.

dits *les unités relatives*, obéissant aux relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{c} i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1 \\ i_1.i_2 = -i_2.i_1 = i_3 \ , \quad i_2.i_3 = -i_3.i_2 = i_1 \ , \quad i_3.i_1 = -i_1.i_3 = i_2 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Deux quaternions sont dits *égaux,* si les 4 coordonnées de l'un sont égales, respectivement, aux coordonnées correspondantes de l'autre.

Désignons par b le quaternion

$$b = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 \ ;$$

l'égalité entre quaternions $a = b$ est alors équivalente aux quatre égalités simultanées

$$a_\lambda = b_\lambda \qquad (\lambda = 0 , 1 , 2 , 3) \ .$$

L'addition, la soustraction et la multiplication des *quaternions* se font d'après les règles ordinaires de l'algèbre, les symboles i_λ se composant conformément aux relations (2). La principale différence entre l'algèbre classique et celle des quaternions provient de ce que la multiplication des quaternions n'est pas commutative en général; en effet, $a.b \neq b.a$, comme on le voit en calculant directement ces deux produits, si a et b désignent, comme ci-dessus, deux quaternions quelconques. Donc, la valeur d'un produit de quaternions dépend, en général, de l'ordre de succession des facteurs de ce produit. Il s'ensuit que la division n'est en général pas univoque dans ce domaine ; il faut distinguer entre une « division à gauche » et une « division à droite », suivant que, les quaternions a et b étant donnés, on cherche le quaternion

$$y = y_0 + y_1 i_1 + y_2 i_2 + y_3 i_3 \qquad \text{tel que} \qquad a = y.b \ ,$$

ou le quaternion

$$x = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 \qquad \text{tel que} \qquad a = b.x \ .$$

6. — Par analogie avec la théorie des nombres complexes de *Gauss,* on pose les définitions suivantes :

Le quaternion a est dit *réel,* si ses trois dernières coordonnées, a_1, a_2, a_3, sont nulles.

A tout quaternion a correspond un quaternion

$$a' = a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - a_3 i_3$$

dit *conjugué de a*. Le produit d'un quaternion quelconque a et de son conjugué a' est toujours réel et s'appelle « *la norme* du quaternion a ». La norme de a, égale du reste à la norme de a', est donc définie par l'équation

$$\mathrm{N}(a) = a.a' = a'.a = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \, .$$

Ce nombre réel n'est nul *que* dans le cas où $a = 0$. Si $a \neq 0$, on entend par « l'*inverse* de a » le quaternion a^{-1} ainsi défini :

$$a^{-1} = \frac{1}{a} = \frac{a'}{\mathrm{N}(a)} \; ;$$

il satisfait aux relations $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$.

On vérifie sans peine que le conjugué du produit de plusieurs quaternions donnés est égal au produit des conjugués des facteurs pris dans l'ordre renversé; en formule :

$$(a.b)' = b'.a' \, .$$

Il s'ensuit le théorème fondamental que la norme d'un produit de quaternions est égale au produit des normes des facteurs :

$$\mathrm{N}(a.b) = \mathrm{N}(a).\mathrm{N}(b) \, .$$

7. — Puisqu'en intervertissant l'ordre des facteurs, on change le produit, il existe en général deux quotients différents du quaternion donné a par le quaternion donné b où l'on suppose $b \neq 0$, à savoir :

1° le quaternion $b^{-1}.a$ qui est « le quotient *à droite* de a par b »; c'est la solution x de l'équation $a = b.x$;

2° le quaternion $a.b^{-1}$ qui est « le quotient *à gauche* de a par b »; c'est la solution y de l'équation $a = y.b$. On ne peut donc pas, en général, employer pour la division le signe ordinaire $a:b$ ou $\frac{a}{b}$. Sauf définition spéciale, ces signes n'ont de sens que si les deux quaternions a et b' sont *commutables,* c'est-à-dire si $a.b' = b'.a$, ce qui n'est pas le cas en général.

Dans le domaine des quaternions, il y a donc lieu de distinguer deux arithmétiques se développant parallèlement l'une à l'autre, mais différentes l'une de l'autre : une « arithmétique à gauche » et une « arithmétique à droite ». Elles se pénètrent du reste souvent l'une l'autre, engendrant des analogies et des contrastes frappants avec l'arithmétique classique.

8. — Pour nous conformer aux notations générales utiles plus tard, nous introduirons de nouveau les symboles e_λ dits *unités relatives,* en posant

$$e_0 = 1 \,, \qquad e_1 = i_1 \,, \qquad e_2 = i_2 \,, \qquad e_3 = i_3 \,.$$

Tout quaternion x s'écrit alors

$$x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \sum_{\lambda}^{0..3} x_\lambda e_\lambda \,.$$

Nous dirons que les quaternions forment « un système de nombres hypercomplexes à 4 coordonnées indépendantes », ou « à 4 *unités relatives* », système qui sera défini par les conventions se rapportant à l'égalité, à l'addition et par les relations suivantes qui règlent la multiplication :

$$\left.\begin{array}{c} e_0^2 = e_0 \ ; \quad e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -\, e_0 \\ e_1.e_2 = -\, e_2.e_1 = e_3 \ ; \quad e_2.e_3 = -\, e_3.e_2 = e_1 \ ; \quad e_3.e_1 = -\, e_1.e_3 = e_2 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Ces relations se trouvent condensées dans le tableau suivant :

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-\,e_0$	e_3	$-\,e_2$
e_2	e_2	$-\,e_3$	$-\,e_0$	e_1
e_3	e_3	e_2	$-\,e_1$	$-\,e_0$

Représentant par i et par k l'un des nombres 0, 1, 2, 3, on trouvera la valeur du produit $e_i . e_k$ à l'intersection de la ligne (horizontale) portant à gauche e_i et de la colonne (verticale) portant en haut e_k.

Définition II: Un quaternion

$$a = \sum_{\lambda}^{0..3} a_\lambda e_\lambda$$

est dit *rationnel*, si chacune de ses 4 coordonnées a_λ est un nombre rationnel quelconque, entier ou fractionnaire.

L'ensemble de tous les quaternions rationnels forme alors un « *corps* de quaternions » ou « domaine de rationalité » ; c'est-à-dire que les quaternions rationnels se reproduisent par addition, soustraction, multiplication et division; en d'autres termes encore : la somme, la différence, les produits et les quotients de deux quaternions rationnels sont toujours de nouveau des quaternions rationnels.

C'est exclusivement de quaternions rationnels que nous parlerons dans la suite.

9. — Après cette digression sur les quaternions, revenons au mémoire de M. *Lipschitz* cité plus haut.

Ayant retrouvé, par une voie toute personnelle, le calcul des quaternions, M. *Lipschitz* érige une nouvelle arithmétique généralisée dont les éléments sont *les quaternions entiers*. Cette arithnomie des quaternions, érigée par M. *Lipschitz*, repose sur une définition qui se présente d'elle-même à l'esprit et qui semble une extension naturelle de la définition I ci-dessus, donnée déjà par *Gauss* pour les nombres complexes ordinaires.

Nous appellerons *lipschitzienne* cette définition du quaternion entier, par opposition à la définition *hurwitzienne* que nous introduirons plus bas et que nous démontrerons être préférable. Voici la définition « lipschitzienne » du quaternion entier :

Définition III: Un quaternion rationnel $a = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$ est dit *entier*, si ses coordonnées a_λ (où $\lambda = 0, 1, 2, 3$) sont toutes quatre des nombres entiers ordinaires, positifs, nuls ou négatifs.

Le quaternion rationnel a sera dit *non entier*, si l'une au moins de ses quatre coordonnées est un nombre fractionnaire.

10. — L'arithnomie des quaternions telle que l'a érigée M. *Lipschitz* présente des exceptions étonnantes aux règles générales ; on dirait presque des anomalies. Nous allons en citer deux exemples. A cet effet, il est nécessaire de poser encore quelques définitions.

Le quaternion entier a est dit « *divisible à droite* [resp. *à gauche*] par le quaternion entier b », s'il existe un quaternion *entier* c vérifiant l'égalité $a = c.b$ [resp. $a = b.c$]. Dans ce cas, on dit aussi que « b est *un diviseur à droite* [resp. *à gauche*] de a », ou encore : que « b est contenu, ou entre dans a, comme diviseur à droite [resp. à gauche] ». D'après cela, le quaternion entier et non nul b sera un diviseur à droite de a, si $a.b^{-1}$ est un quaternion entier.

Pour que le quaternion entier ε soit contenu comme diviseur à droite dans n'importe quel quaternion entier, il faut que ε^{-1} soit entier ; alors ε est aussi contenu comme diviseur à gauche dans tout quaternion entier. Un tel quaternion ε est dit « une *unité* ». *La condition nécessaire et suffisante pour que ε soit une unité est que* $\mathrm{N}(\varepsilon) = 1$. Il existe, dans le domaine des quaternions entiers au sens de M. *Lipschitz*, 8 unités qui sont ± 1, $\pm i_1$, $\pm i_2$, $\pm i_3$.

Deux quaternions entiers sont dits *associés à droite* (resp. *à gauche*), s'ils ne diffèrent l'un de l'autre que par un facteur unité à droite (resp. à gauche) ; ainsi, a désignant un quaternion entier, $\pm a$, $\pm a.i_1$, $\pm a.i_2$, $\pm a.i_3$ sont « associés à droite », et $\pm a$, $\pm i_1.a$, $\pm i_2.a$, $\pm i_3.a$ sont « associés à gauche ». Dans les recherches sur la divisibilité, des quaternions associés sont équivalents, c'est-à-dire qu'ils peuvent se remplacer l'un l'autre (comme c'est le cas dans la théorie classique des nombres et dans l'arithnomie des « complexes entiers » de *Gauss*).

On définit le quaternion *primaire* de façon à ce qu'il soit toujours déterminé univoquement dans le groupe des 8 quaternions associés entre eux ; dans les théorèmes de divisibilité, on peut alors se borner à la considération des quaternions primaires.

Enfin, un quaternion entier a est *primitif* (ou *proprement dit*), si ses 4 coordonnées a_λ n'ont pas d'autre commun diviseur que 1 ; dans le cas contraire, a est un quaternion non primitif (ou improprement dit) ; exemple : $9 + 3i_1 + 6i_2 + ni_3$ est *primitif* dès que sa dernière coordonnée, n, n'est pas divisible par 3, mais non primitif, si n est multiple de 3.

11. — Malgré la non-commutativité de la multiplication, on réussit à définir le quaternion entier *irréductible*, ou *quaternion premier*, l'analogue du nombre premier de l'arithmétique classique. *Pour qu'un quaternion entier* p *soit premier, il faut et il suffit que sa norme* N(p) *soit un nombre premier ordinaire.* Il existe en tout $p + 1$ quaternions premiers, tous de même norme p, essentiellement différents entre eux, c'est-à-dire non associés, par exemple tous primaires. M. *Lipschitz* démontre ensuite qu'on peut toujours mettre un quaternion entier primitif donné, c, sous forme d'un produit de quaternions premiers, en imposant à ces quaternions de se suivre, de droite à gauche, dans un ordre tel que leurs normes suivent un ordre fixé arbitrairement pour les facteurs premiers de la norme du quaternion donné c. Une fois qu'on a fixé cet ordre, chacun des quaternions premiers qui figurent dans le produit est déterminé, de proche en proche, sans ambiguïté, à condition toutefois que $N(c)$ soit un nombre impair ou le double d'un nombre impair.

Ainsi, la décomposition du quaternion entier primitif donné c est univoque dès que, ayant décomposé sa norme $N(c)$ en ses facteurs premiers, par exemple $N(c) = p.r.s \ldots$, on a arrêté l'ordre de succession de ces facteurs premiers $p, r, s \ldots$ qui peuvent naturellement être égaux ou inégaux entre eux.

Mais il y a une curieuse exception : c'est quand la norme du quaternion donné c est divisible par 4 ; dans ce cas, la décomposition de c, quand bien même on a arrêté l'ordre de succession des facteurs premiers $p, r, s, \ldots$, n'est plus univoque, mais possible de 24 manières différentes ! On peut bien dire que c'est là une anomalie.

12. — On en trouve aussi dans la théorie du plus grand commun diviseur. Deux quaternions entiers donnés, a et b, ont un plus grand commun diviseur différent d'une unité quand leurs normes, $N(a)$ et $N(b)$, ne sont pas deux nombres premiers entre eux. Mais ici encore, il y a de curieuses exceptions, des anomalies étonnantes qui paraissent tout à fait inexplicables, déconcertantes même.

En prenant, par exemple, $a = 2$, $b = 1 + i_1 + i_2 + i_3$, on a $N(a) = N(b) = 4$ et l'on s'attend à ce que a et b possèdent « un plus grand commun diviseur à droite », disons δ, de façon à ce qu'on ait simultanément

$$2 = p.\delta \; ; \quad 1 + i_1 + i_2 + i_3 = p_1.\delta \, ,$$

où p et p_1 désigneraient certains quaternions entiers. (Pour donner un exemple concret, nous prenons « l'arithnomie à droite ».) Les égalités

$$2 = (1 - i_1).(1 + i_1) = (1 - i_2).(1 + i_2) = (1 - i_3).(1 + i_3)$$
$$1 + i_1 + i_2 + i_3 = (1 + i_3).(1 + i_1) = (1 + i_1).(1 + i_2) = (1 + i_2).(1 + i_3)$$

montrent bien que les deux quaternions en question possèdent trois « communs diviseurs à droite », à savoir :

$$\delta_1 = 1 + i_1 \, , \qquad \delta_2 = 1 + i_2 \, , \qquad \delta_3 = 1 + i_3 \, .$$

Raison de plus, semble-t-il, pour qu'il existe « *un plus grand* commun diviseur à droite », δ, lequel devrait être un commun multiple des trois diviseurs δ_1, δ_2, δ_3, en sorte qu'on ait $\delta = d_1.\delta_1 = d_2.\delta_2 = d_3.\delta_3$, où d_1, d_2, d_3 désigneraient certains quaternions entiers. Or, il n'en est rien.

On démontre très facilement, en prenant les normes, que les trois dernières équations sont en contradiction avec $2 = p\,\delta$, $1 + i_1 + i_2 + i_3 = p_1.\delta$. Voilà donc deux quaternions entiers a et b de même norme, possédant trois communs diviseurs différents (ces diviseurs sont même tous trois des quaternions *premiers*), mais n'ayant, malgré cela, pas de *plus grand* commun diviseur, au sens habituel de ce terme. On peut bien dire, de nouveau, que c'est là une anomalie.

La raison profonde de ces anomalies a été trouvée et indiquée pour la première fois par M. *A. Hurwitz* à Zurich. Elle tient à la définition même du quaternion « entier », comme nous allons le montrer.

II

13. — Envisageons un *système de nombres hypercomplexes à* r *coordonnées indépendantes,* système constitué par une infinité de « complexes » ou « éléments » tels que

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_r e_r = \sum_{\lambda}^{1\dots r} x_\lambda e_\lambda \qquad (4)$$

où les x_λ sont des nombres *réels* quelconques dits « *coordonnées* du complexe x », et les e_λ des symboles dits « *unités relatives* du système de nombres hypercomplexes[1] ».

Supposons définies, dans ce système de nombres hypercomplexes, les opérations rationnelles de l'addition et de la multiplication, leurs opérations inverses : la soustraction et la division, ainsi que l'égalité de deux complexes. On sait que, dans ce cas, le produit $e_i . e_k$ de deux unités relatives quelconques est une fonction linéaire, à coefficients réels, des mêmes unités relatives e_λ. Par exemple, i et k désignant, chacun, l'un quelconque des nombres 1, 2, 3, ... , r, on a

$$e_i . e_k = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \dots + \gamma_r e_r = \sum_{\lambda}^{1\dots r} \gamma_\lambda e_\lambda \, .$$

Pour indiquer dans la notation que les constantes *réelles* γ_λ peuvent varier avec i et k, écrivons

$$e_i . e_k = \gamma_{ik1} e_1 + \gamma_{ik2} e_2 + \dots + \gamma_{ikr} e_r$$

ou, sous forme condensée,

$$e_i . e_k = \sum_{\lambda}^{1\dots r} \gamma_{ik\lambda} e_\lambda \qquad (i, k = 1, 2, \dots, r) \, . \qquad (5)$$

Ces relations (5), jointes aux définitions de l'addition et de

[1] Il est souvent utile de distinguer entre « coordonnées » et « composantes » d'un nombre complexe. Par « coordonnées », on entend les nombres $x_1; x_2; \dots; x_r$, tandis que les « composantes » du nombre hypercomplexe x sont les produits $x_1 e_1; x_2 e_2; \dots; x_r e_r$.

l'égalité, fixent le système considéré de nombres hypercomplexes et le définissent complètement.

14. — La considération du nombre hypercomplexe *rationnel* est fondamentale pour tout ce qui va suivre. Commençons donc par poser la

Définition IV : Appelons *complexe rationnel* un tel nombre hypercomplexe x dont toutes les r coordonnées x_λ sont des nombres rationnels quelconques, entiers ou fractionnaires.

Un complexe

$$x = \sum_{\lambda}^{1 \dots r} x_\lambda e_\lambda$$

sera dit *non rationnel,* si l'une au moins de ses r coordonnées est un nombre réel irrationnel.

Dans la suite, il sera question exclusivement de complexes rationnels.

L'ensemble de tous les complexes rationnels forme un « *corps* de nombres » ou « domaine de rationalité », c'est-à-dire que les complexes rationnels se reproduisent par addition, soustraction, multiplication et division. Autrement dit : la somme, la différence, le produit et le quotient (pour autant que la division est possible) de complexes rationnels est toujours de nouveau un complexe rationnel. Nous désignerons par le symbole $\{R\}$ ce corps comprenant tous les complexes rationnels.

15. — Pour faire l'arithmétique généralisée ou arithnomie de ce corps de nombres $\{R\}$, il faut tout d'abord le partager en deux ensembles, mettant d'une part : les complexes rationnels « entiers », d'autre part : les complexes rationnels « non entiers ». La définition suivante, que j'appelle « la définition *lipschitzienne* », se présente le plus naturellement à l'esprit :

Définition V : Un complexe rationnel x est dit *entier,* si toutes ses r coordonnées sont des nombres entiers ordinaires ; le complexe rationnel x sera dit *non entier,* si l'une au moins de ses r coordonnées est un nombre fractionnaire.

En se basant sur cette définition du complexe entier, on peut construire toute une arithmétique du système considéré de nombres hypercomplexes, arithmétique généralisée qui présente beaucoup d'analogies, mais aussi bien des contrastes, avec l'arithmétique ordinaire. Or, l'exemple des quaternions rationnels prouve que cette définition *lipschitzienne* n'est pas toujours satisfaisante. Voici les considérations qui peuvent conduire à une autre définition, souvent préférable à la définition lipschitzienne du complexe entier.

16. — Les « nombres entiers » sont caractérisés par les quatre propriétés fondamentales suivantes :

1° Ils doivent se reproduire par addition, soustraction et multiplication ; en d'autres termes : la somme, la différence et le produit de deux « entiers » quelconques doit toujours être de nouveau un « entier ». On exprime cela en disant que les nombres entiers doivent « former *un domaine d'intégrité* ».

2° Ce domaine d'intégrité doit contenir « le nombre 1 » et « le nombre zéro », c'est-à-dire deux complexes jouant, dans ce domaine, le même rôle que 1 et 0 dans l'arithmétique ordinaire. Sans « le nombre 1 », on aurait un système de nombres entiers dont aucun ne serait divisible par lui-même, ce qui n'est pas normal ; sans « le nombre zéro », la soustraction ne serait pas toujours possible.

3° L'ensemble des « nombres entiers » doit former un domaine d'intégrité *à base finie ;* en d'autres termes, il doit être possible de choisir, dans cet ensemble, un nombre fini de complexes, disons $t_1, t_2, \ldots, t_n$, jouissant de la propriété suivante : si $m_1, m_2, \ldots, m_n$ désignent des nombres entiers ordinaires, l'expression

$$m_1 t_1 + m_2 t_2 + \ldots + m_n t_n \tag{6}$$

doit pouvoir reproduire, par des valeurs appropriées des nombres entiers m_λ, absolument tous les éléments de l'ensemble en question ; et inversement : ce domaine d'intégrité doit se composer exclusivement des éléments, mais de *tous* les éléments, qu'on obtient en attribuant, dans l'expression (6) ci-dessus, à $m_1, m_2, \ldots, m_n$, de toutes les manières possibles, les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

Dans ce cas, les complexes $t_1, t_2, \ldots, t_n$ peuvent engendrer, *par les seules opérations de l'addition et de la soustraction répétées un nombre fini de fois*, n'importe quel autre élément du domaine d'intégrité. On dit que ces complexes « forment *une base* » du domaine d'intégrité envisagé, et l'on désigne celui-ci d'ordinaire par le symbole

$$[t_1, t_2, \ldots, t_n] .$$

Si l'on remarque que pour passer de $+t$ à $-t$, il suffit de soustraire deux fois de suite $+t$ de lui-même; puis, que « soustraire $-t$ » est complètement équivalent à « additionner t », on peut dire ceci : En partant des éléments de la base, on peut reproduire chacun des éléments du domaine en question au moyen d'un nombre fini de soustractions. Le nom de « base » attribué à ces éléments t_λ est ainsi pleinement justifié.

17. — Le fait de constituer un domaine d'intégrité contenant le nombre 1 n'est pas suffisant, à lui tout seul, pour caractériser des nombres « entiers ». On le voit en considérant l'ensemble engendré par $\frac{m}{2^n}$, où m et n représentent des nombres entiers quelconques. Cet ensemble que nous désignons par $\left[\frac{m}{2^n}\right]$ constitue pourtant un domaine d'intégrité contenant le nombre 1; il jouit des propriétés 1° et 2° ci-dessus énumérées, mais il ne possède aucune base finie au sens ci-dessus: on ne peut pas indiquer un nombre fini d'expressions de la forme $\frac{m}{2^n}$ telles qu'elles pourraient engendrer toutes les autres par les seules opérations de l'addition et de la soustraction, puisque ces deux opérations ne permettent pas de passer de $\frac{1}{2^n}$ à $\frac{1}{2^{n+1}}$. Aussi le domaine d'intégrité $\left[\frac{m}{2^n}\right]$ ne contient-il pas uniquement des nombres entiers.

18. — Pour abréger, nous emploierons une terminologie proposée par M. *J. König* et poserons la

Définition VI: Nous appellerons « domaine *holoïde* » tout ensemble de complexes quelconques jouissant des trois propriétés fondamentales ci-dessus énumérées (art. 16).

Donc, en vertu de cette définition, tout domaine holoïde contient une infinité d'éléments, parmi lesquels le nombre 1 et le nombre zéro ; de plus, on peut y effectuer, sans restriction aucune, l'addition, la soustraction et la multiplication, et cela sans jamais sortir du domaine en question ; et enfin, il possède une base finie.

Exemples : Les nombres entiers ordinaires forment un domaine holoïde dont la base est 1 ; l'expression (6) se réduit dans ce cas à $m_1 . 1$ qui reproduit bien tous les nombres entiers, lorsqu'on fait parcourir à m_1 la série des nombres entiers.

Les nombres complexes de *Gauss* à coordonnées entières (voir la définition I) forment un domaine holoïde dont la base est $1, i$; en effet, l'expression (6) devient dans ce cas $m_1 . 1 + m_2 . i$, laquelle reproduit bien tous les *complexes entiers de Gauss*, et exclusivement ceux-là, quand m_1 et m_2 parcourent, indépendamment l'un de l'autre, la série des nombres entiers ordinaires. On désigne ce domaine holoïde par le symbole $[1 ; i]$.

Les « quaternions entiers » de M. *Lipschitz* forment un domaine holoïde de base $1, i_1, i_2, i_3$, puisque tout quaternion « entier d'après la définition lipschitzienne » peut se mettre sous la forme $m_0 . 1 + m_1 . i_1 + m_2 . i_2 + m_3 . i_3$ et que cette expression donne toujours un quaternion à cordonnées entières, quelles que soient les valeurs entières attribuées aux m_λ. On désigne ce domaine holoïde par le symbole $[1, i_1, i_2, i_3]$.

Un corps de nombres, n'ayant pas une base finie au sens indiqué plus haut, ne constitue lui-même pas un domaine holoïde, bien que pouvant en contenir une infinité.

19. — Les trois propriétés ci-dessus énumérées et qui caractérisent le domaine holoïde, ne sont pas suffisantes pour caractériser les « nombres entiers ». Il en faut une quatrième. C'est de cette quatrième propriété que n'avait pas tenu compte M. *Lipschitz*, c'est elle qu'a découverte M. *Hurwitz*. La voici :

4° Le domaine holoïde formé par les « nombres entiers » doit être *maximal*.

Définition VII: Soit $[J_1]$ un domaine holoïde quelconque.

Il sera dit *maximal,* s'il n'existe pas, dans le corps de nombres considéré, un autre domaine holoïde contenant *tous* les éléments du domaine en question $[J_1]$ *plus* encore d'autres éléments non contenus dans $[J_1]$.

Or, M. *Hurwitz* a découvert que le domaine holoïde $[1, i_1, i_2, i_3]$ formé par l'ensemble des quaternions à coordonnées entières n'est pas maximal, qu'il est possible de l'élargir en restant dans le même corps de nombres $\{R\}$; on peut, en effet, agrandir de la manière suivante le domaine holoïde $[1, i_1, i_2, i_3]$ sans sortir du domaine de rationalité $\{R\}$ constitué par l'ensemble des quaternions rationnels : soit pour abréger

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + i_1 + i_2 + i_3) ;$$

Dans le corps $\{R\}$ *des quaternions rationnels, le domaine holoïde maximal a pour base* ρ, i_1, i_2, i_3. Désignons ce domaine holoïde maximal par le symbole [J], de sorte que [J] sera constitué par l'ensemble des quaternions

$$m_0\rho + m_1 i_1 + m_2 i_2 + m_3 i_3 \tag{7}$$

où les 4 nombres ordinaires m_λ prennent, indépendamment les uns des autres, toutes les valeurs entières possibles. Avec M. *Hurwitz,* nous poserons la définition suivante que nous appellerons « la définition *hurwitzienne* du quaternion entier » :

Définition VIII : Un quaternion rationnel est dit « entier », s'il est contenu dans ce domaine holoïde maximal [J]. Un quaternion rationnel est dit « non entier », s'il n'est pas contenu dans ce domaine holoïde maximal [J].

20. — Tout quaternion *entier* tel que t sera donc de la forme (7), ou, en remplaçant ρ par sa valeur :

$$t = \frac{m_0}{2} + \left(m_1 + \frac{m_0}{2}\right)i_1 + \left(m_2 + \frac{m_0}{2}\right)i_2 + \left(m_3 + \frac{m_0}{2}\right)i_3 \ . \tag{8}$$

On trouvera tous les quaternions *entiers,* en prenant pour les quatre nombres m_0, m_1, m_2, m_3, de toutes les manières possibles, des valeurs entières quelconques.

Si m_0 est pair, toutes les coordonnées du quaternion t

seront des nombres entiers. Dans ce cas, t sera un quaternion « entier » également d'après la définition *lipschitzienne* (v. définitions III et V).

Si, au contraire, m_0 est *impair*, les coordonnées non nulles de t seront des nombres rationnels non entiers, des fractions de dénominateur commun 2. Dans ce cas, d'après la définition *lipschitzienne*, t serait un quaternion « non entier », tandis qu'en réalité, en vertu de la définition *hurwitzienne* que nous adoptons, t sera réputé « quaternion entier ». En particulier, les 16 quaternions $\frac{\pm 1 \pm i_1 \pm i_2 \pm i_3}{2}$ qui seraient tous des quaternions « non entiers » au sens de M. *Lipschitz*, sont en réalité des quaternions entiers, en vertu de la définition *hurwitzienne*. La norme de chacun de ces 16 quaternions est égale à 1; ils constituent 16 *unités* dans le domaine holoïde envisagé. Celui-ci contient donc 24 unités en tout, dont 8 seulement à coordonnées entières. (Voir les définitions à l'art. 10.)

21. — Désignons par $[J_0]$ l'ensemble constitué par tous les quaternions à coordonnées entières. On voit immédiatement que $[J_0]$ est contenu entièrement dans $[J]$. En effet, le domaine $[J]$, tout en faisant partie, lui aussi, du corps $\{R\}$ des quaternions rationnels, contient non seulement tous les éléments de $[J_0]$, mais encore une infinité d'autres à coordonnées fractionnaires. Ainsi, $[J_0]$ n'est pas un domaine holoïde maximal.

En construisant l'arithmétique du domaine $[J_0]$, M. *Lipschitz* faisait donc l'arithnomie d'un domaine non maximal; or, quand on fait cela, il faut s'attendre à priori à des irrégularités. Qu'on me permette une analogie : Essayez de construire l'arithmétique des nombres entiers ordinaires en vous basant sur la définition suivante : « J'appelle *nombre entier* tout nombre *pair*, et nombre non entier tous les autres. » D'après cette définition, les nombres impairs seraient donc des nombres « non entiers ». En érigeant une arithmétique basée sur cette définition-là, vous vous apercevrez vite de l'existence d'anomalies déconcertantes. On devine même à l'avance que les théorèmes classiques sur la divisibilité, par exemple, ne joueront pas toujours, si l'on fait reposer l'arithnomie sur une définition pareille. Ce n'est là, bien entendu, qu'une analogie. (La différence capitale provient de ce que l'ensemble de tous les nombres pairs ne contient pas le nombre 1 et ne constitue pas, en conséquence, de domaine holoïde, tandis que $[J_0]$ en est un.) Aussi n'ai-je voulu, en employant cette image, que faire sentir en quelque sorte la raison profonde pourquoi l'on doit s'attendre, à priori, à des anomalies, quand on entreprend de construire l'arithnomie d'un domaine holoïde non maximal.

On le vérifierait sans doute sur un cas concret, déjà dans le domaine des nombres complexes de *Gauss,* en faisant, par exemple, l'arithnomie du domaine holoïde

$$[1\,,\,360i] = m_1 + 360 m_2\, i\ , \tag{9}$$

où m_1 et m_2 représentent des entiers quelconques. Cela reviendrait à remplacer la définition de *Gauss* (définition I) par celle-ci : Un nombre complexe $a_0 + a_1 i$ sera dit *entier,* s'il est contenu dans le domaine (9). Tous les autres complexes rationnels, même ceux à coordonnées entières (donc tous ceux dont la partie imaginaire n'est pas divisible par 360), seraient réputés *non entiers*.

22. — Les nombres complexes de *Gauss,* $a + bi$, où les coordonnées a et b sont des nombres entiers ordinaires, constituent un domaine holoïde *maximal;* définition lipschitzienne et définition hurwitzienne sont équivalentes dans ce système de nombres complexes ; les deux conduisent au même ensemble de complexes *entiers ;* voilà pourquoi il est possible, en adoptant la définition lipschitzienne, d'y construire une arithnomie d'une simplicité analogue à celle de l'arithmétique classique. On peut se demander si *Gauss,* en posant cette définition I, a simplement eu de la chance, ou s'il connaissait la raison profonde pourquoi il faut la poser ? Il est permis de croire que si *Gauss* avait été amené à faire l'arithmétique généralisée des quaternions « entiers », il aurait commencé par se baser sur la définition lipschitzienne III ; puis cherchant la raison d'être des singulières exceptions qu'il eût constatées, que *Gauss* aurait alors fait

la découverte, dont la priorité revient à M. *Hurwitz*, que le domaine holoïde $[J_0]$ n'est pas maximal, qu'il est en conséquence préférable de fixer d'une autre manière la notion du quaternion entier.

23. — En adoptant la définition *hurwitzienne* VIII du quaternion entier, définition qui engendre le domaine [J] de l'article 19, on peut ériger une arithnomie des quaternions entiers exempte de ces exceptions singulières que présente la théorie *lipschitzienne* qui n'envisage que le domaine $[J_0]$ de l'article 21. Reprenons les exemples cités plus haut. Les quaternions entiers $a = 2$ et $b = 1 + i_1 + i_2 + i_3$ (v. art. 12) possèdent, dans le domaine [J], comme plus grand commun diviseur 2 (ils y sont même associés), alors que dans la théorie *lipschitzienne* (domaine $[J_0]$), ils n'en possèdent aucun.

Le théorème de décomposition (v. art. 11) reste applicable, dans le domaine [J], à tout quaternion entier c, quelle que soit sa norme, et peut s'énoncer ainsi : Soit c un quaternion entier primitif donné, de norme

$$N(c) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots p_s$$

où les p_λ sont les facteurs premiers, égaux ou inégaux entre eux, de la norme de c, facteurs rangés dans un ordre tout à fait arbitraire, mais déterminé. Il est alors toujours possible de représenter le quaternion donné c comme produit de quaternions premiers :

$$c = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi_3 \cdot \ \cdots \ \pi_s$$

tels que $N(\pi_1) = p_1$; $N(\pi_2) = p_2$; ... ; $N(\pi_s) = p_s$, et cette décomposition est univoque. Chacun des quaternions premiers qui figurent dans le produit se détermine de proche en proche, sans ambigüité.

Dans sa théorie qui n'envisage que le domaine $[J_0]$, M. *Lipschitz* est obligé d'ajouter une exception : « Tout se passe de même pour les quaternions entiers primitifs dont la norme est divisible par 4, jusqu'à ce que l'ordre fixé pour les facteurs de cette norme amène pour la première fois le nombre 2 ; on peut alors choisir arbitrairement. comme facteur premier, l'un quelconque des 24 quaternions premiers dont la norme est égale à 2; ce choix une fois fait, les quaternions premiers dont les normes sont les nombres premiers suivants, pris dans l'ordre indiqué, se déterminent de proche en proche, sans ambigüité, jusqu'à la fin. »

Cette singulière exception tombe également quand on passe du domaine $[J_0]$ au domaine holoïde maximal $[J]$.

24. — Résumons les considérations précédentes en disant :

Les nombres hypercomplexes « entiers » doivent former non seulement un domaine holoïde, mais un domaine holoïde maximal.

Définition IX : Un complexe rationnel

$$x = \sum_{\lambda}^{1\ldots r} x_\lambda e_\lambda$$

sera dit *entier*, s'il est contenu dans le domaine holoïde maximal en question. Le complexe rationnel x sera dit *non entier*, s'il ne fait pas partie du domaine holoïde maximal en question. (Définition *hurwitzienne.*)

Cette définition hurwitzienne du nombre hypercomplexe *entier* peut avoir comme conséquence qu'on appellera « entiers » même certains complexes rationnels x à coordonnées x_λ fractionnaires. (Exemple : les quaternions.) Inversement : il peut arriver aussi que certains nombres hypercomplexes rationnels x ne soient pas des complexes « entiers », bien que toutes leurs coordonnées x_λ soient des nombres entiers ordinaires.

III

25. — Pour construire l'arithmétique d'un corps $\{R\}$ de nombres hypercomplexes rationnels, il faut toujours commencer par une *opération préliminaire* consistant à partager ce corps $\{R\}$ en deux ensembles, mettant d'un côté : les complexes rationnels « entiers », de l'autre : les complexes rationnels « non entiers ». Or, il peut se présenter la curieuse circonstance que cette opération préliminaire ne soit pas univoque. Nous l'avons découvert en étudiant une classe très étendue de systèmes de nombres hypercomplexes de la forme

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_s e_s = \sum_{\lambda}^{1\dots s} a_\lambda e_\lambda$$

caractérisée par le fait que le nombre s des coordonnées a_λ est un carré parfait, $s = 1, 4, 9, 16, \dots, \nu^2$. Le cas le plus simple est $s = 4$, vu que $s = 1$ donne les nombres réels ordinaires.

26. — Soient donc

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 \quad \text{et} \quad b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4$$

deux de ces nombres hypercomplexes. On définit *l'égalité* de deux complexes par l'égalité des coordonnées correspondantes. Ainsi, pour que $a = b$, il faut et il suffit que les 4 égalités $a_\lambda = b_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, 3, 4)$ aient lieu simultanément. On définit ensuite *l'addition* de deux de ces nombres hypercomplexes par l'addition des coordonnées correspondantes; il s'ensuit que son opération inverse : *la soustraction*, est univoque, toujours possible et se fait par la soustraction des coordonnées correspondantes; en formule :

$$a \pm b = (a_1 \pm b_1) e_1 + (a_2 \pm b_2) e_2 + (a_3 \pm b_3) e_3 + (a_4 \pm b_4) e_4 \,. \tag{10}$$

Pour *multiplier* (ou diviser) un tel nombre hypercomplexe par un nombre *réel* r, il faut multiplier (ou diviser) chacune des coordonnées par r, d'où la formule :

$$r \cdot a = r a_1 e_1 + r a_2 e_2 + r a_3 e_3 + r a_4 e_4 \,. \tag{11}$$

La *multiplication* de ces nombres hypercomplexes *entre eux* est définie par le tableau suivant :

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	0	0
e_2	0	0	e_1	e_2
e_3	e_3	e_4	0	0
e_4	0	0	e_3	e_4

(12)

Représentant par i et k l'un quelconque des nombres 1, 2, 3, 4, on trouve le produit $e_i . e_k$ à l'intersection de la ligne horizontale portant à gauche e_i avec la colonne verticale portant en haut e_k.

Un tel nombre hypercomplexe est dit *réel*, lorsque ses deux coordonnées moyennes sont nulles et, de plus, ses deux coordonnées extrêmes égales entre elles. Tout nombre réel r peut ainsi s'écrire : $r = re_1 + re_4 = r(e_1 + e_4)$. On vérifie sans peine que le symbole $e_1 + e_4$ joue le rôle du « nombre 1 », de sorte qu'on peut poser, dans ce système de nombres hypercomplexes : $e_1 + e_4 = 1$. Moyennant ces définitions, on peut dire que l'addition, la soustraction et la multiplication de ces nombres hypercomplexes se font « d'après les règles ordinaires de l'algèbre ». A noter cependant que la multiplication n'est en général pas commutative dans ce système, puisque, par exemple, $e_2 . e_3 = e_1$, tandis que $e_3 . e_2 = e_4$. Il y a donc lieu de distinguer ici, comme pour les quaternions, une « arithnomie à gauche » et une « arithnomie à droite » (v. article 7).

27. — Pour introduire la division comme opération inverse de la multiplication, on peut procéder par analogie avec les nombres complexes de *Gauss* et avec les quaternions. A tout nombre hypercomplexe $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$ correspond son *conjugué :* $\mathrm{A}' = a_4 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3 + a_1 e_4$.

Le produit d'un tel nombre hypercomplexe et de son conjugué — ils sont commutables entre eux — est toujours réel et s'appelle « *la norme* du nombre hypercomplexe a ». Cette norme est ainsi définie par

$$\mathrm{N}(a) = a . \mathrm{A}' = \mathrm{A}' . a = a_1 a_4 - a_2 a_3 \ . \tag{13}$$

On en déduit le théorème fondamental que la norme d'un produit est égale au produit des normes des facteurs : $\mathrm{N}(a . b) = \mathrm{N}(a) . \mathrm{N}(b)$.

La norme d'un tel complexe a peut être nulle sans que $a = 0$; si $\mathrm{N}(a) = 0$, on dit que a est « un diviseur de zéro ». Ce système de nombres hypercomplexes présente donc, d'avec les nombres complexes de *Gauss* et les quaternions, cette différence capitale qu'un produit de facteurs peut être nul sans qu'aucun des facteurs de ce produit ne soit nul. Ainsi, $e_3 . e_4 = 0$; $e_4 . e_1 = 0$; $e_2^2 = 0$; etc.

Si a n'est pas diviseur de zéro, c'est-à-dire si $N(a) \neq 0$, on entend, en analogie avec les nombres complexes ordinaires et avec les quaternions, par « l'*inverse* de a » le nombre hypercomplexe

$$a^{-1} = \frac{1}{a} = \frac{A'}{N(a)} \tag{14}$$

qui satisfait aux relations $a . a^{-1} = a^{-1} . a = 1$.

Les nombres hypercomplexes a et b étant donnés, avec $N(b) \neq 0$, on appellera, en analogie avec les quaternions, le nombre hypercomplexe $x = b^{-1} . a$ « le quotient *à droite* de a par b » ; c'est la solution de l'équation $a = b . x$; et le nombre hypercomplexe $y = a . b^{-1}$ sera « le quotient *à gauche* de a par b » ; c'est la solution de l'équation $a = y . b$. Le signe ordinaire de la division, $a : b$ ou $\frac{a}{b}$, n'aura de sens, à moins de définitions spéciales, que si a et B' sont commutables entre eux, B' représentant le conjugué de b.

Dans le domaine de ces nombres hypercomplexes, chacune des deux divisions est donc toujours possible et univoque, à condition que la norme du diviseur ne soit pas nulle. Un quotient dont le diviseur est de norme nulle n'a de sens que si le dividende est aussi de norme nulle, et un quotient de deux diviseurs de zéro, quand il a un sens, peut être indéterminé.

Les définitions précédentes suffisent pour établir parfaitement les quatre opérations rationnelles dans le domaine de ces nombres hypercomplexes.

28. — Ces nombres hypercomplexes peuvent se représenter par des schémas carrés où ne figurent que les coordonnées. Ainsi,

$$a = \begin{Bmatrix} a_1 , & a_2 \\ a_3 , & a_4 \end{Bmatrix} ; \qquad b = \begin{Bmatrix} b_1 , & b_2 \\ b_3 , & b_4 \end{Bmatrix} .$$

L'égalité $a = b$, la somme $a + b$, la différence $a - b$, se figurent alors aisément, et l'on obtient pour le produit $a . b$:

$$a . b = \begin{Bmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_3 , & a_1 b_2 + a_2 b_4 \\ a_3 b_1 + a_4 b_3 , & a_3 b_2 + a_4 b_4 \end{Bmatrix} .$$

On voit par là, soit dit en passant, que la multiplication de ces nombres entre eux se fait d'après les mêmes règles que la composition des substitutions linéaires. A chacun de ces complexes correspond une substitution linéaire bien déterminée, et inversement. Le « nombre 1 » correspond à la substitution identique : $1 = \begin{Bmatrix} 1\,;\,0 \\ 0\,;\,1 \end{Bmatrix}$; un nombre réel r à $\begin{Bmatrix} r\,;\,0 \\ 0\,;\,r \end{Bmatrix}$; les unités relatives sont :

$$e_1 = \begin{Bmatrix} 1\,;\,0 \\ 0\,;\,0 \end{Bmatrix}, \quad e_2 = \begin{Bmatrix} 0\,;\,1 \\ 0\,;\,0 \end{Bmatrix}, \quad e_3 = \begin{Bmatrix} 0\,;\,0 \\ 1\,;\,0 \end{Bmatrix}, \quad e_4 = \begin{Bmatrix} 0\,;\,0 \\ 0\,;\,1 \end{Bmatrix};$$

et ainsi de suite. Chaque propriété des substitutions linéaires peut se traduire en un théorème sur ces nombres hypercomplexes.

29. — Cette correspondance étroite montre aussi la voie de la généralisation au cas où le nombre s des coordonnées est un carré supérieur à 4, $s = 9$, 16, ... , ν^2. Par exemple, pour ces nombres hypercomplexes à 9 coordonnées indépendantes, on aura

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + \ldots + a_9 e_9 = \sum_{\lambda}^{1\ldots 9} a_\lambda e_\lambda ,$$

nombre hypercomplexe qu'on représentera schématiquement par

$$a = \begin{Bmatrix} a_1\,,\ a_2\,,\ a_3 \\ a_4\,,\ a_5\,,\ a_6 \\ a_7\,,\ a_8\,,\ a_9 \end{Bmatrix}.$$

Or, il est plus pratique de se servir de deux indices et d'écrire, pour le même nombre hypercomplexe a,

$$a = \sum_{i,\,k}^{1,2,3} a_{ik} e_{ik} = \begin{Bmatrix} a_{11}\,,\ a_{12}\,,\ a_{13} \\ a_{21}\,,\ a_{22}\,,\ a_{23} \\ a_{31}\,,\ a_{32}\,,\ a_{33} \end{Bmatrix}.$$

L'unité relative e_{ik} est représentée par le schéma carré dont tous les éléments sont nuls sauf celui qui se trouve à l'intersection de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $k^{\text{ième}}$ colonne, lequel est 1.

La multiplication des unités relatives e_{ik} est alors définie par les relations :

$$e_{ik} \cdot e_{ks} = e_{is} \ ; \qquad e_{ik} \cdot e_{ts} = 0 \qquad \text{pour} \qquad t \neq k \tag{15}$$

Les lettres i, k, s, t représentent, chacune, l'un quelconque des nombres 1, 2, 3.

Si

$$b = \sum_{i,k} b_{ik} e_{ik} = \left\{ \begin{matrix} b_{11}, & b_{12}, & b_{13} \\ b_{21}, & b_{22}, & b_{23} \\ b_{31}, & b_{32}, & b_{33} \end{matrix} \right\}$$

représente un second nombre hypercomplexe du même système, l'*égalité,* l'*addition* et la *soustraction* se définiront par l'égalité, l'addition et la soustraction des coordonnées correspondantes, et le produit $a.b$ sera défini par

$$a.b = c = \sum_{i,k} c_{ik} e_{ik} = \left\{ \begin{matrix} c_{11}, & c_{12}, & c_{13} \\ c_{21}, & c_{22}, & c_{23} \\ c_{31}, & c_{32}, & c_{33} \end{matrix} \right\}$$

où l'on a posé pour abréger :

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31} = \sum_{\lambda}^{1,2,3} a_{1\lambda} b_{\lambda 1}$$

$$c_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32} = \sum_{\lambda} a_{1\lambda} b_{\lambda 2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + a_{i3} b_{3k} = \sum_{\lambda}^{1,2,3} a_{i\lambda} b_{\lambda k} \tag{16}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On appellera *réel* un tel nombre hypercomplexe r quand il aura la forme

$$r = \left\{ \begin{matrix} r, & 0, & 0 \\ 0, & r, & 0 \\ 0, & 0, & r \end{matrix} \right\}$$

en particulier, le « nombre 1 » sera

$$1 = e_1 + e_5 + e_9 = \sum_{\lambda}^{1,2,3} e_{\lambda\lambda} = \begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix}.$$

En se basant sur les propriétés bien connues des substitutions linéaires, on définira d'abord « le *conjugué* A′ d'un tel nombre hypercomplexe a » ; ce sera

$$A' = \begin{Bmatrix} A_{11}, & -A_{21}, & A_{31} \\ -A_{12}, & A_{22}, & -A_{32} \\ A_{13}, & -A_{23}, & A_{33} \end{Bmatrix}$$

où A_{ik} désigne le sous-déterminant correspondant à a_{ik}; puis « la *norme*, $N(a)$, de ce complexe a » en posant : $N(a) = a . A' = A' . a$; cette norme est toujours un nombre réel et égal au déterminant du système des coordonnées :

$$N(a) = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} ;$$

puis « l'*inverse* d'un complexe a de norme non nulle » en posant l'équation de définition (14); enfin, un « quotient à gauche » et un « quotient à droite » du complexe a par le complexe b, où l'on suppose $N(b) \neq 0$, comme ci-dessus, articles 7 et 27.

Une induction, facile pour qui connaît les substitutions linéaires, montre comment procéder dans le cas où le nombre s des coordonnées indépendantes est un carré supérieur à 9, $s = 16, 25, \ldots, \nu^2$.

30. — Remarquons que toutes ces définitions peuvent subsister même dans le cas où les coordonnées du nombre hypercomplexe en question sont elles-mêmes des nombres complexes de *Gauss ;* alors, en posant comme de coutume $i = \sqrt{-1}$, on a affaire (dans le cas de 4 unités relatives, $s = 4$) à un complexe tel que

$$(a_1 + ib_1) e_1 + (a_2 + ib_2) e_2 + (a_3 + ib_3) e_3 + (a_4 + ib_4) e_4 .$$

On voit combien il peut devenir fastidieux, quand on s'occupe de pareils complexes, de distinguer entre les deux espèces différentes de complexes, car il est nécessaire d'éviter soigneusement toute confusion entre : d'une part les coordonnées qui sont des complexes de *Gauss*, et d'autre part le complexe total constitué par l'ensemble de ces coordonnées. Afin de simplifier la terminologie et de prévenir des confusions possibles, nous avons introduit le néologisme de *tettarions* pour désigner cette espèce de nombres hypercomplexes. Ce terme de *tettarion* est tiré d'un mot grec qui signifie *carré* et doit indiquer que le complexe en question peut se représenter par un schéma carré. Suivant que le nombre des lignes et des colonnes est 2, 3, 4, ... , donc le nombre correspondant des coordonnées $s = 4, 9, 16, \dots$, nous parlons de *duotettarions, tritettarions, tétratettarions*, ..., en général de ν-tettarions ou polytettarions.

Les *duotettarions* sont donc les nombres hypercomplexes définis dans les articles 26-28 ; les *tritettarions* ceux traités à l'article 29 ; etc.

Dans la suite, nous ne parlerons que des duotettarions ; nous pourrons ainsi les désigner par « tettarions » tout court. De plus, nous envisagerons exclusivement des duotettarions *rationnels*, et le corps $\{R\}$ constitué par leur ensemble (v. article 14).

31. — Après cette digression sur les tettarions en général, proposons-nous de construire l'arithnomie du corps $\{R\}$ formé par tous les duotettarions rationnels. Le premier pas devra consister à définir le tettarion « entier ». A cet effet, il s'agit de trouver le domaine holoïde maximal contenu dans ce corps de nombres $\{R\}$ (v. les définitions VI et VII).

Pour bien faire ressortir le fait nouveau qui se produit ici, nous allons procéder par analogie.

Répétons que nous adoptons toujours la définition *hurwitzienne* du nombre entier (v. définition IX).

Dans le corps des nombres ordinaires comprenant l'ensemble de tous les nombres rationnels, il existe un seul domaine holoïde; il est, par conséquent, maximal : c'est l'ensemble des nombres entiers ; nous le désignons par [1].

Pour savoir si un nombre rationnel pris au hasard est entier ou non entier, il suffit de déterminer s'il fait partie du domaine [1], ou non. Aucune ambigüité n'est possible, puisqu'il existe un seul domaine holoïde, donc aussi une seule façon de séparer les nombres rationnels en « entiers » et « fractionnaires ».

32. — Envisageons, en second lieu, les nombres complexes ordinaires, ou complexes de *Gauss*, $a_0 + a_1 i$. Dans le corps de nombres constitué par l'ensemble des complexes rationnels de *Gauss*, il y a une infinité de domaines holoïdes différents ; leur *base* est : $(1, pi)$, où p est un nombre entier arbitrairement choisi, mais fixe. Parmi tous ces domaines holoïdes, *un seul est maximal ;* c'est précisément celui dont *Gauss* et plus tard M. *Lipschitz* ont fait l'arithnomie, à savoir le domaine $[1, i] =$ ensemble de tous les $m_1 + m_2 i$, où m_1 et m_2 sont des entiers ordinaires.

Si l'on prend au hasard un nombre complexe $\alpha + \beta i$ rationnel quelconque, on pourra dire immédiatement et sans équivoque, si ce complexe rationnel est « entier » ou « non entier » ; il suffira de déterminer s'il est contenu, ou non, dans ce domaine $[1 ; i]$. Ici aussi, aucune ambigüité n'est possible, parcequ'il existe un seul domaine holoïde maximal ; en d'autres termes : il n'y a qu'une façon de séparer les nombres complexes rationnels de *Gauss* en complexes « entiers » et complexes « non entiers ». A la question : « Le complexe rationnel $\alpha + \beta i$ est-il entier ? » on répondra d'une manière absolue, soit par oui, soit par non ; aucune autre alternative n'est possible.

33. — Envisageons, en troisième lieu, les quaternions. Le corps des quaternions rationnels (v. définition II) contient une multiple infinité de domaines holoïdes différents. Mais de tous ces domaines holoïdes contenant les unités relatives i_1, i_2, i_3, *un seul est maximal ;* c'est le domaine [J] découvert par M. *Hurwitz* (v. article 19). Choisissant arbitrairement un quaternion rationnel $\varkappa$, on pourra décider sans équivoque et d'une manière absolue, si $\varkappa$ est « entier » ou « non entier » ; il suffira de déterminer s'il fait partie de ce domaine [J], ou non. Ici encore, aucune ambigüité n'est possible,

parcequ'il existe *un seul* domaine holoïde maximal, et partant une seule façon de séparer les quaternions rationnels en « entiers » et « non entiers ». A la question : « le quaternion rationnel $\varkappa$ est-il entier ? » on répondra également d'une manière absolue, soit par oui, soit par non ; aucune autre alternative ne sera possible.

34. — En quatrième lieu, envisageons les tettarions et examinons le corps $\{T\}$ des tettarions rationnels. Il s'agit de séparer ce corps $\{T\}$ en deux ensembles, mettant dans le premier : les tettarions « entiers » encore à définir, dans le second : les tettarions « non entiers ». D'après ce qui précède, cela revient à chercher quel est le domaine holoïde *maximal* du corps $\{T\}$. Or, voici le fait nouveau qui se produit ici : *Parmi tous les domaines holoïdes que contient le corps* $\{T\}$, *une infinité sont maximaux, quoique très différents entre eux.* Nous avons, en effet, démontré ailleurs le théorème suivant :

Le domaine holoïde maximal le plus général contenu dans le corps $\{T\}$ des tettarions rationnels possède la base que voici :

$$t_1 = \begin{Bmatrix} g_3 - \dfrac{g_1 g_2}{g}, & \dfrac{c\varepsilon}{dg} \\ \dfrac{\varepsilon' d g_2}{cg}, & \dfrac{g_1 g_2}{g} \end{Bmatrix}; \quad t_2 = \begin{Bmatrix} 0, & 0 \\ \dfrac{\varepsilon' d}{c}, & g_1 \end{Bmatrix}; \quad t_3 = \begin{Bmatrix} 1; & 0 \\ 0; & 1 \end{Bmatrix}; \quad t_4 = \begin{Bmatrix} g, & 0 \\ 0, & 0 \end{Bmatrix}$$

où $\varepsilon = \pm 1$; $\varepsilon' = \pm 1$; c, d, g, g_1, g_2, g_3 représentant des nombres entiers arbitrairement choisis, mais fixes, et assujettis aux conditions :

$$c \neq 0, \quad d \neq 0, \quad g \neq 0, \quad g(g_1 g_3 + g g_4) - g_1^2 g_2 = \varepsilon\varepsilon',$$

où g_4 est un nombre entier quelconque.

On obtient donc un domaine holoïde *maximal* en faisant parcourir, dans l'expression

$$m_1 t_1 + m_2 t_2 + m_3 t_3 + m_4 t_4,$$

aux 4 nombres m_λ et indépendamment les uns les autres, la série des nombres entiers ordinaires, de $-\infty$ à $+\infty$, après avoir fixé, conformément aux conditions ci-dessus, mais d'ailleurs arbitrairement, les entiers ε, ε', c, d, g, g_1, g_2, g_3 et g_4.

35. — Parmi ces domaines holoïdes maximaux se trouve, par exemple, le domaine $\left[e_1, \frac{e_2}{p}, pe_3, e_4\right]$, où p est un nombre entier non nul, du reste arbitrairement choisi, mais fixe. Ce domaine holoïde maximal que nous désignons par $[J_p]$ est donc constitué par l'ensemble des tettarions

$$m_1 e_1 + \frac{m_2}{p} e_2 + pm_3 e_3 + m_4 e_4 . \tag{17}$$

Il contient une infinité de tettarions à coordonnées entières : il suffit d'y choisir pour m_2 un multiple de p ; mais il ne contient pas *tous* les tettarions à coordonnées entières ; ainsi, ni e_3, ni $2e_3$, ni $3e_3$, ..., ni $(p-1)e_3$, ni une infinité d'autres, n'en font partie. Par contre, $[J_p]$ contient certains tettarions à coordonnées fractionnaires, par exemple

$$\frac{e_2}{p}, \frac{2e_2}{p}, \frac{3e_2}{p}, \ldots, \frac{p-1}{p} e_2 ,$$

et une infinité d'autres.

Citons encore le domaine holoïde maximal $[H_2]$ formé par l'ensemble des tettarions

$$\left(m_1 - \frac{m_2}{2}\right) e_1 + \frac{m_2}{2} e_2 + \left(m_3 - \frac{m_2}{2}\right) e_3 + \left(m_1 - m_3 + 2m_4 + \frac{m_2}{2}\right) e_4 \tag{18}$$

où les m_λ représentent, comme toujours, des nombres entiers quelconques. Ce domaine $[H_2]$, quoique comprenant (outre des tettarions à coordonnées fractionnaires) une infinité de tettarions à coordonnées entières, ne les contient cependant pas tous ; par exemple, il ne contient pas e_1 ; par contre, ce même tettarion e_1 fait partie de chacun des domaines $[J_p]$, quel que soit p.

Chacun des domaines holoïdes $[J_p]$ est cependant maximal ; en d'autres termes : il n'existe pas, dans le corps de tettarions $\{T\}$, un autre domaine holoïde contenant tous les éléments de $[J_p]$ plus encore d'autres non compris dans $[J_p]$. Et il en est de même pour tous les autres domaines holoïdes maximaux. Chacun d'eux constitue un ensemble de « nombres entiers » avec toutes leurs propriétés caractéristiques ; c'est dire qu'on peut ériger, dans chacun de ces domaines holoïdes maximaux, une arithmétique en tous points semblable à l'arithmétique *hurwitzienne* des quaternions entiers.

36. — Si l'on fait l'arithnomie du domaine $[H_2]$ par exemple, tous les tettarions contenus dans $[H_2]$ seront réputés « tettarions entiers », et tous les autres, donc aussi e_1, seront considérés comme tettarions « non entiers ». Par contre, si l'on fait l'arithnomie d'un domaine $[J_p]$, ce seront tous les tettarions faisant partie de $[J_p]$, donc aussi e_1, qui seront réputés « entiers », à l'exclusion de tous les autres. Ainsi, le tettarion e_1 qui est pourtant à coordonnées entières devra être envisagé soit comme « nombre entier », soit comme « nombre non entier », suivant le domaine holoïde considéré. On ne peut donc pas, quand on s'occupe de l'arithnomie des tettarions, appliquer purement et simplement la définition IX du tettarion entier en disant : « un tettarion rationnel

$$t = \sum_{\lambda} t_\lambda e_\lambda$$

sera *entier*, s'il fait partie d'un domaine holoïde maximal » ; on est obligé d'ajouter : « entier *par rapport* au domaine $[J_p]$ », ou bien : « entier *par rapport* au domaine $[H_2$ »], etc.

37. — Prenez maintenant au hasard un tettarion rationnel t et posez la question : « est-il entier ? » On ne pourra plus vous répondre, en général, d'une manière absolue, soit par oui, soit par non. Il pourra se faire, au contraire, qu'on doive répondre « cela dépend », car il y a plusieurs façons de séparer le corps des tettarions rationnels en « entiers » et « non entiers » ; il y a même une infinité de manières d'opérer cette séparation, et la réponse à la question ci-dessus doit dépendre, ou du moins *peut* dépendre, de la façon dont on a départagé le corps des tettarions rationnels en *entiers* et *non entiers*.

38. — Certains tettarions rationnels sont contenus dans *tous* les domaines holoïdes maximaux ; tels les nombres entiers ordinaires envisagés comme tettarions réels ; ceux-là sont donc toujours et sûrement des tettarions *entiers ;* on pourrait les nommer « absolument entiers ». D'autres tettarions rationnels ne sont contenus dans *aucun* domaine holoïde maximal ; ceux-là sont donc toujours des tettarions *non entiers ;* on pourrait les dénommer « absolument non entiers » ou « absolument fractionnaires ». Enfin, il y a une catégorie de tettarions rationnels contenus dans tel domaine holoïde maximal $[J_p]$, mais pas dans les autres ; ceux-là peuvent être tantôt *entiers,* tantôt *non entiers,* suivant la manière dont on sépare en deux le corps des tettarions rationnels. On pourrait nommer « conditionnellement entiers » les tettarions de cette troisième catégorie.

Au point de vue de l'arithnomie, le corps des nombres rationnels ordinaires et celui des complexes rationnels de *Gauss* se partagent, chacun, en deux groupes seulement, dont l'un contient tous les « nombres entiers » et l'autre tous les « nombres non entiers ». Par contre, le corps des tettarions rationnels devrait plutôt se partager en trois groupes : celui des nombres « absolument entiers », celui des nombres « absolument fractionnaires », et enfin celui des nombres « conditionnellement entiers ».

39. — Parmi les domaines holoïdes maximaux du corps $\{T\}$ des tettarions rationnels se trouve le domaine $[J_1]$ constitué par l'ensemble des tettarions à coordonnées entières :

$$[J_1] = \text{ensemble de tous les } m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4 \ ,$$

où les m_λ représentent des nombres entiers ordinaires d'ailleurs quelconques. En appliquant la définition *lipschitzienne* au cas des duotettarions, c'est-à-dire en posant la

Définition X : Un duotettarion t sera dit « entier », si ses quatre coordonnées t_λ sont toutes des nombres entiers ordinaires, en posant cette définition, dis-je, on obtient un domaine holoïde maximal. Il s'en suit que l'arithnomie basée sur cette définition X est « régulière », semblable en tous points à la théorie *hurwitzienne* des quaternions entiers, nous voulons dire : exemple de ces exceptions singulières que présente la théorie *lipschitzienne* des quaternions entiers.

L'exemple des duotettarions prouve donc que les nombres complexes de *Gauss* ne constituent pas le seul système de nombres complexes où la définition *lipschitzienne* du complexe *entier* soit satisfaisante (v. définition V).

Celui qui poserait un peu au hasard et sans en connaître la raison profonde, en se laissant guider par l'induction ou par l'analogie avec les nombres complexes ordinaires, cette définition X du tettarion *entier*, simplement parce qu'elle se présente le plus naturellement à l'esprit, celui-là aurait de la chance, en ce sens que le domaine holoïde ainsi délimité est *maximal*, car bien souvent (l'exemple des quaternions, entre autres, le prouve), la définition *lipschitzienne* du complexe entier (v. définition V) engendre des domaines holoïdes non maximaux et partant, une arithnomie « non régulière ».

Mais en posant la définition X simplement par induction et pour des raisons d'analogie, sans en approfondir le pourquoi, et l'arithnomie basée sur cette définition X étant *par hasard* « régulière », c'est-à-dire exempte de ces exceptions singulières qui donnent à réfléchir, on ne s'apercevrait pas de ce qu'il y a d'intéressant dans le cas des tettarions, de ce qui les distingue d'autres systèmes de nombres hypercomplexes, à savoir : que cette définition X n'est pas la seule possible, puisqu'on peut séparer les tettarions rationnels de plusieurs manières, même d'une infinité de manières, en tettarions *entiers* et *non entiers*.

Exprimons cette différence en disant que, pour obtenir une arithmétique « régulière »

1° dans le système des nombres complexes de *Gauss*, *on doit* se baser sur la définition *lipschitzienne* ; c'est la seule satisfaisante,

2° dans le système des tettarions, *on peut* se baser sur la définition *lipschitzienne* ; mais ce n'est pas la seule qui y soit satisfaisante ;

3° dans le système des quaternions, *il ne faut pas* se baser sur la définition *lipschitzienne* ; elle n'y est pas satisfaisante.

Résumant les considérations précédentes, nous dirons : il existe des systèmes de nombres hypercomplexes où l'on peut procéder de plusieurs façons pour séparer le corps des complexes rationnels en « nombres entiers » et « nombres non entiers ».

IV

40. — Dans les chapitres précédents, nous avons reconnu que définir le complexe « entier » de façon satisfaisante revient à déterminer le domaine holoïde maximal (éventuellement, s'il y en a plusieurs, les domaines holoïdes maximaux) du corps de nombres $\{R\}$ constitué par l'ensemble des éléments

$$x = \sum_{\lambda}^{1\ldots n} x_\lambda e_\lambda$$

où toutes les coordonnées x_λ sont des nombres rationnels arbitraires. On pourrait se demander si, étant donné un système quelconque de nombres hypercomplexes, on peut toujours séparer ainsi le corps $\{R\}$ des complexes rationnels en deux groupes, l'un comprenant tous les complexes entiers, l'autre tous les complexes non entiers.

De prime abord, on ne posera guère cette question ; on est porté tout naturellement à croire qu'on peut toujours procéder de façon satisfaisante à cette distinction essentielle entre complexes entiers et non entiers, peut-être d'une seule manière, comme pour les nombres complexes de *Gauss*, peut-être de plusieurs manières, comme pour les tettarions ; mais en tout cas, si on se laisse guider uniquement par l'analogie, on admettra implicitement et *a priori* que cela est toujours possible. Or, il n'en est rien. D'une manière plus précise : les recherches aboutissent au résultat surprenant exprimé par le théorème que voici : *Il existe des corps de nombres hypercomplexes rationnels contenant une infinité de domaines holoïdes, mais parmi lesquels* aucun *n'est maximal.*

41. — Exprimons ce fait d'une manière plus frappante. On a toujours à sa disposition, cela va sans dire, la définition *lipschitzienne* du nombre hypercomplexe entier (v. définition V); c'est même là son grand avantage : d'être toujours applicable et toujours univoque. Mais nous avons reconnu que cette définition qui s'en tient uniquement à la nature des coordonnées, sans considérer en aucune manière les propriétés intrinsèques du système de nombres hypercomplexes en question, doit être écartée comme non satisfaisante, comme pouvant conduire à des arithnomies non régulières; nous avons montré qu'il faut avoir recours à la définition *hurwitzienne* (v. définition IX). Or, celle-ci implique l'existence d'un domaine holoïde *maximal ;* sans domaine holoïde maximal, point de nombres entiers.

Le théorème énoncé tout à l'heure prouve la réalité des trois possibilités suivantes : certains corps de nombres contiennent *un seul* système de « nombres entiers » ; la définition du complexe entier y est absolue et unique. D'autres corps de nombres contiennent *plusieurs* systèmes différents de « nombres entiers » ; la définition du complexe entier y est relative et plurivoque. Enfin, d'autres corps de nombres encore ne contiennent aucun système de « nombres entiers »; la définition du complexe entier y devient, jusqu'à un certain degré, arbitraire; aussi faut-il s'attendre à ce que l'arithnomie correspondante en porte l'empreinte plus ou moins profonde.

Nous allons citer un exemple simple de nombres hypercomplexes doués de cette particularité.

42. — Envisageons des nombres hypercomplexes à trois unités relatives, tels $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, les nombres x_λ, dits *coordonnées du complexe* x, étant, comme toujours, des nombres *réels* arbitraires. Si $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ et $b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$ sont deux quelconques de ces complexes, on définit *l'égalité* et *l'addition* de ces deux complexes par l'égalité et l'addition de leurs coordonnées correspondantes. En d'autres termes, $a = b$ signifie l'existence simultanée des trois égalités $a_\lambda = b_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, 3)$; *la soustraction,* opération inverse de l'addition, est alors toujours

possible et univoque, et l'on a les formules :

$$a \pm b = (a_1 \pm b_1)e_1 + (a_2 \pm b_2)e_2 + (a_3 \pm b_3)e_3 \; .$$

En additionnant r fois de suite un complexe à lui-même, on trouve que

$$r \, . \, a = ra_1 e_1 + ra_2 e_2 + ra_3 e_3 \tag{19}$$

et l'on étendra cette règle, par définition, à la multiplication par un nombre réel r quelconque.

La *multiplication* de ces complexes entre eux est fixée par le tableau suivant qui donne le produit $e_i . e_k$ à l'intersection de la ligne horizontale portant à gauche e_i et de la colonne verticale portant en haut e_k $(i, k = 1, 2, 3)$

	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	0
e_2	e_2	0	0
e_3	0	0	e_3

(20)

Il en résulte que la multiplication est toujours commutative, $a \, . \, b = b \, . \, a$.

Nous appellerons un tel complexe *réel*, quand sa coordonnée moyenne sera nulle et en même temps ses deux coordonnées extrêmes égales entre elles. Inversement : tout nombre réel r pourra être envisagé comme un tel complexe de la forme $r = re_1 + re_3 = r(e_1 + e_3)$. On vérifie sans peine que le symbole $e_1 + e_3$ joue le rôle du nombre 1, de sorte qu'on peut poser ici :

$$e_1 + e_3 = 1$$

et que la règle exprimée par l'égalité (19) n'est qu'un cas particulier des définitions condensées dans le tableau (20).

43. — A tout complexe $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ correspond un *conjugué* unique et bien déterminé :

$$A' = a_1 a_3 e_1 - a_2 a_3 e_2 + a_1^2 e_3 \; .$$

Le produit d'un complexe a et de son conjugué A′ est *toujours réel* et s'appelle « *la norme* de a », en signes :

$$\mathrm{N}(a) = a.\mathrm{A}' = a_1^2 a_3 \ .$$

La norme d'un produit est égale au produit des normes de ses facteurs.

Si la norme de a est nulle, ce complexe a est dit « un diviseur de zéro »[1]. Cela se présente dès que l'une au moins des coordonnées extrêmes est nulle, et sans qu'on ait, pour cela, nécessairement $a = 0$. Un produit de tels complexes peut ainsi être nul sans qu'aucun facteur ne le soit (v. **27**).

La *division*, comme opération inverse de la multiplication, est définie dans ce système de nombres hypercomplexes par la formule :

$$a : b = \frac{a}{b} = \frac{a.\mathrm{B}'}{\mathrm{N}(b)} = \frac{a_1}{b_1} e_1 - \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_1^2} e_2 + \frac{a_3}{b_3} e_3 \ .$$

Au moyen de ces définitions, les 4 opérations rationnelles de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division (sauf, éventuellement, la division par un diviseur de zéro) sont parfaitement et univoquement établies dans le domaine de ces nombres hypercomplexes, et l'on peut dire qu'elles s'effectuent « suivant les règles ordinaires de l'algèbre », en tenant compte du tableau (20).

44. — Faisons remarquer, en passant, que ce système spécial de nombres hypercomplexes à trois coordonnées est un sous-système, ou cas particulier, des tritettarions (v. art. 29 et 30). On peut en effet représenter le complexe $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ par le schéma carré

$$\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{Bmatrix}$$

[1] Il ne faut pas confondre « diviseur de zéro » avec « racine de zéro ». Tout nombre hypercomplexe dont l'une des puissances est nulle est dit *racine de zéro* (d'après *G. Frobenius*), ou *nombre pseudo-nul* (d'après *E. Cartan*), quelquefois *nombre nilpotent* (d'après *B. Peirce*). Un nombre pseudo-nul est toujours diviseur de zéro, mais la réciproque peut ne pas avoir lieu. Par exemple, dans le système dont il est ici question, e_2 est pseudo-nul, puisque $e_2^2 = 0$, tandis que e_1 est diviseur de zéro sans être racine de zéro.

caractérisé par

$$a_{11} = a_{22} \; ; \qquad a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = a_{21} = 0 \; .$$

45. — Nous allons envisager le corps de nombres $\{K\}$ constitué par l'ensemble de tous les complexes rationnels du système en question (v. article 14). Le premier pas à faire pour construire l'arithmétique généralisée de ce corps $\{K\}$ consiste à y définir le complexe *entier*. Cela revient à déterminer, comme nous l'avons montré plus haut, le domaine holoïde maximal, éventuellement les domaines holoïdes maximaux, de ce corps de nombres $\{K\}$. Pour cette détermination, prenons comme point de départ le théorème fondamental suivant :

Le domaine holoïde le plus général contenu dans le corps de nombres $\{K\}$ *a comme base*

$$\left.\begin{aligned} b^{(1)} &= g^2 g_1 e_1 \\ b^{(2)} &= e_1 + e_3 \\ b^{(3)} &= g g_1 g_2 e_1 + \gamma e_2 \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

où γ est un nombre rationnel non nul du reste arbitraire, et g, g_1, g_2 des nombres entiers quelconques assujettis aux seules conditions $g \neq 0$, $g_1 \neq 0$.

L'ensemble de tous les complexes

$$m_1 . b^{(1)} + m_2 . b^{(2)} + m_3 . b^{(3)}$$

où les nombres m_1, m_2, m_3 prennent, de toutes les manières possibles, les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, alors que g, g_1, g_2, γ conservent la même valeur arbitrairement choisie, mais fixe, cet ensemble, dis-je, constitue donc toujours un domaine holoïde; nous le désignons par $[h]$. Inversement : dans tout domaine holoïde faisant partie du corps $\{K\}$, il est possible de choisir une base de la forme (B). Les différents domaines holoïdes de ce corps de nombres ne diffèrent entre eux que par le choix des nombres g, g_1, g_2, γ servant à former la base (B). Il s'agit de déterminer les conditions pour qu'un tel domaine holoïde $[h]$ soit maximal.

46. — On démontre facilement qu'une condition nécessaire pour que $[h]$ soit maximal est que $g = g_1 = 1$; $g_2 = 0$; et qu'un domaine holoïde du corps de nombres $\{K\}$ ne saurait être maximal s'il ne possède une base telle que

$$a^{(1)} = e_1 \ , \qquad a^{(2)} = \gamma e_2 \ , \qquad a^{(3)} = e_3 \qquad (B_1)$$

Désignons par $[H_1]$ le domaine holoïde correspondant à cette base (B_1); il sera constitué par l'ensemble de tous les complexes

$$m_1 . e_1 + m_2 \gamma . e_2 + m_3 . e_3$$

où $\gamma \neq 0$ est un nombre rationnel arbitrairement choisi, mais fixe, tandis que les m_λ représentent, comme d'habitude, des nombres entiers ordinaires variant de $-\infty$ à $+\infty$. On voit, en effet, que $[H_1]$, puisqu'il contient e_1, e_3 et γe_2, contient aussi les éléments de la base (B), donc aussi cette base elle-même, donc aussi tous les complexes qu'on peut dériver de cette base (B), en d'autres termes: tous les complexes dont se compose $[h]$ et, par conséquent, $[h]$ lui-même. Mais $[H_1]$ contient, en outre, des complexes ne faisant pas partie de $[h]$, par exemple e_3, dès que $g > 1$ ou $g_1 > 1$. Donc enfin, $[h]$ ne saurait en tout cas être maximal s'il ne coïncide avec

$$[H_1] = [m_1 . e_1 + m_2 \gamma . e_2 + m_3 . e_3] \ .$$

C'est là une condition nécessaire, mais pas encore suffisante, comme on va le voir.

47. — Mettons γ, qui est un nombre rationnel non nul, sous forme de fraction irréductible en posant: $\gamma = \frac{r}{p}$. Un domaine holoïde du corps $\{K\}$ ayant une base de la forme (B_1) ne pourra être maximal si le nombre entier $r > 1$. On s'en convainc en supposant $\gamma = \frac{1}{p}$ et prenant comme base

$$c^{(1)} = e_1 \ , \qquad c^{(2)} = \frac{1}{p} e_2 \ , \qquad c^{(3)} = e_3 \ . \qquad (B_2)$$

Déduisons de cette base (B_2) le domaine holoïde

$$[H_2] = \left[m_1 . e_1 + \frac{m_2}{p} . e_2 + m_3 . e_3 \right]$$

et comparons-le au domaine $[H_1]$. On vérifie immédiatement que pour $r = 1$, ces deux domaines holoïdes coïncident, c'est-à-dire contiennent exactement les mêmes complexes, mais que pour $r > 1$, le domaine holoïde $[H_2]$, contenant $\frac{1}{p} \cdot e_2$ qui ne fait pas partie de $[H_1]$, contient tous les éléments de $[H_1]$ plus encore d'autres non renfermés dans $[H_1]$. On en conclut qu'un domaine holoïde du corps $\{K\}$, pour être maximal, doit posséder une base de la forme (B_2), où p est un nombre entier non nul, du reste arbitraire. Nous allons montrer que cette condition, nécessaire, n'est pas suffisante.

48. — Si $p = 1$, on a le domaine holoïde

$$[L] = [m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3]$$

constitué par tous les complexes à coordonnées entières ; ce n'est pas autre chose que le domaine *lipschitzien* (v. définition V). Or, ici, ce domaine [L] n'est pas maximal (pas plus qu'il ne l'est dans le cas des quaternions). Pour s'en convaincre, il suffit de constater qu'on peut l'agrandir, sans sortir du corps de nombres $\{K\}$, en *adjoignant* à [L] le complexe $\frac{e_2}{2}$ qui n'y est pas contenu. On obtient alors l'ensemble élargi

$$[J_2] = \left[m_1 e_1 + \frac{m_2}{2} e_2 + m_3 e_3\right]$$

plus étendu que [L] et qui est également un domaine holoïde. Donc, si l'on veut un domaine holoïde *maximal* de base (B_2), il faut en tout cas choisir $p > 1$.

49. — Les faits prouvés ci-dessus portent à croire que

$$[H_2] = \text{ensemble des complexes } m_1 e_1 + \frac{m_2}{p} e_2 + m_3 e_3$$

est un domaine holoïde maximal. Mais il n'en est rien. On peut en effet, sans sortir du corps de nombres $\{K\}$, élargir encore le domaine holoïde $[H_2]$ en lui adjoignant le complexe $\frac{e_2}{p^2}$. Ce complexe ne fait pas partie de $[H_2]$, puisque l'équation

$$\frac{e_2}{p^2} = m_1 e_1 + \frac{m_2}{p} e_2 + m_3 e_3$$

entraînerait, en vertu de la définition de l'égalité des complexes, $m_1 = m_3 = 0$, $\frac{m_2}{p} = \frac{1}{p^2}$, d'où $m_2 = \frac{1}{p}$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse expresse $p > 1$ et $m_2 =$ un nombre *entier*.

Il s'ensuit que le domaine $[H_3]$ ayant pour base

$$b^{(1)} = e_1 \; , \qquad b^{(2)} = \frac{1}{p^2} e_2 \; , \qquad b^{(3)} = e_3 \qquad (B_3)$$

et constitué par l'ensemble de tous les complexes

$$m_1 e_1 + \frac{m_2}{p^2} e_2 + m_3 e_3 \; ,$$

contient aussi $\frac{pe_2}{p^2} = \frac{e_2}{p}$, donc aussi la base (B_2), donc aussi tous les éléments dérivables de cette base, donc aussi $[H_2]$. En d'autres termes : $[H_3]$ contient tous les éléments de $[H_2]$ plus encore d'autres ne faisant pas partie de $[H_2]$. Or, $[H_3]$ est de nouveau un domaine holoïde ; on en conclut que $[H_2]$ ne saurait être maximal.

En posant $p^2 = g$ et répétant le même raisonnement sur le domaine $[H_3]$ dérivé de la base $\left[e_1 , \frac{e_2}{g} , e_3\right]$ qui n'est autre que la base (B_3) écrite différemment, on verrait que $[H_3]$ n'est pas non plus maximal.

Puisque p est un nombre naturel supérieur à 1 et d'ailleurs absolument arbitraire, on voit bien que *dans le corps de nombres* $\{K\}$, *il n'y a pas de domaine holoïde* maximal.

50. — *Remarque.* Pour obtenir un domaine maximal, on pourrait penser qu'il suffit d'attribuer aussi à p différentes valeurs. Mais il faudrait faire prendre à p toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$; et alors, l'ensemble $\{J\}$ formé par tous les complexes $m_1 e_1 + \frac{m_2}{m_4} e_2 + m_3 e_3$, où les m_λ représentent des entiers arbitraires $(m_4 \neq 0)$, est bien un domaine d'intégrité contenant le nombre 1 ; mais il ne possède pas de *base finie* au sens de l'article 16 ; en d'autres termes : il n'est pas possible de choisir dans $\{J\}$ un nombre fini de complexes pouvant reproduire, par les seules opérations de l'addition et de la soustraction, tous les éléments de l'ensemble en question. Donc, $\{J\}$ n'est pas un domaine holoïde et ne saurait être envisagé comme composé exclusivement de nombres *entiers* (v. article 17).

V

51. — Bien que le corps de nombres $\{K\}$ ne contienne aucun domaine holoïde maximal, on peut néanmoins tenter d'y construire une arithmétique généralisée. Comme fondement de cette arithnomie, on essaiera la

Définition XI : un complexe rationnel

$$a = m_1 e_1 + \frac{m_2}{g} e_2 + m_3 e_3$$

est réputé *entier,* si m_1, m_2, m_3 représentent des nombres entiers ordinaires, pouvant prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, g étant un nombre entier non nul, arbitrairement choisi, mais fixe.

L'ensemble

$$[H] = \left[m_1 e_1 + \frac{m_2}{g} e_2 + m_3 e_3 \right]$$

est bien un domaine holoïde, et il renfermera exclusivement des complexes *entiers,* en vertu de la définition XI; tous les autres complexes du corps $\{K\}$, c'est-à-dire ceux ne faisant pas partie de [H], seront réputés *non entiers.*

Les « nombres entiers » dont nous allons faire la théorie constituent un domaine holoïde non maximal, de sorte qu'il faut s'attendre *a priori* à ce que cette arithnomie ne soit pas régulière, mais présente des singularités étonnantes, comparée à l'arithmétique classique.

52. — Pour abréger l'écriture, nous représenterons nos complexes entiers en écrivant uniquement les coordonnées. Nous figurerons ces complexes, sans écrire les unités relatives e_λ ni les signes $+$, en mettant simplement les coordonnées, séparées par des virgules, entre parenthèses ; et ce seront ces parenthèses qui indiqueront symboliquement la liaison censée exister entre les coordonnées, liaison qui fait que les 3 nombres constituent un seul et même tout. Ainsi, $a = a_1 e_1 + \frac{a_2}{g} e_2 + a_3 e_3$ s'écrira simplement $a = \left(a_1, \frac{a_2}{g}, a_3\right)$, où $g \neq 0$ est un nombre entier fixe. Le complexe a sera donc *entier*, si les trois nombres a_1, a_2 et a_3 le sont ; et a sera *non entier*, si l'un au moins de ces trois nombres a_λ est fractionnaire.

Tout nombre réel r pourra être envisagé comme un de ces complexes de la forme $r = (r, 0, r)$; en particulier, le nombre $1 = (1, 0, 1)$.

53. — *Définition de la divisibilité.* Un complexe entier $a = \left(a_1, \frac{a_2}{g}, a_3\right)$ est dit « divisible par le complexe entier $b = \left(b_1, \frac{b_2}{g}, b_3\right)$ », s'il existe un complexe *entier* $c = \left(c_1, \frac{c_2}{g}, c_3\right)$ satisfaisant à l'équation $a = b \, . \, c$. Nous dirons aussi que, dans ce cas, « b est un diviseur de a » et que « *a contient b* ». Si b est de norme nulle, l'équation $a = b \, . \, c$ n'a de solution en complexes entiers que si a est aussi de norme nulle. En particulier, b étant donné, l'égalité $0 = b \, . \, c$ est vérifiée par une infinité de complexes entiers $c = \mathrm{B}' \, . \, h$, où h est un complexe entier quelconque et B' le conjugué de b. De là vient le nom de « diviseur de zéro ».

54. — Le complexe entier ε est dit *une unité*, s'il entre comme diviseur dans tout complexe entier (v. article 10). Il existe dans le domaine [H] dont nous nous occupons une infinité d'unités, à savoir les complexes

$$\varepsilon = \left(\pm 1, \pm \frac{k}{g}, \pm 1\right)$$

k étant un nombre entier quelconque. Remarquons que $\left(1, \frac{k}{g}, 1\right) = \left(1, \frac{1}{g}, 1\right)^k$ pour toute valeur entière, positive, nulle ou négative, de k. En considérant comme unités *fondamentales* $\varepsilon_1 = (-1, 0, 1)$; $\varepsilon_2 = (1, 0, -1)$; $\varepsilon_3 = \left(1, \frac{1}{g}, 1\right)$, on peut mettre n'importe quelle unité ε sous forme d'un produit de ces 3 unités fondamentales : $\varepsilon = \varepsilon_1^n \, . \, \varepsilon_2^m \, . \, \varepsilon_3^k$, où n, m et k sont des entiers appropriés.

55. — Deux complexes entiers sont dits *associés*, s'ils ne diffèrent l'un de l'autre que par un facteur unité ε (v. article 10). A tout complexe entier a sont ainsi associés une infinité de complexes $a\varepsilon$, où ε représente une unité quelconque. On sait que dans toutes les recherches relatives à la divisibilité, des complexes associés sont équivalents et peuvent se remplacer l'un l'autre, comme c'est déjà le cas dans la théorie des nombres ordinaires. Dans le groupe formé par l'ensemble des complexes associés au même complexe entier a, donc associés entre eux, il suffira d'en choisir un, convenablement défini et qui remplacera tous les autres. On appelle ce représentant : un complexe *primaire* ; dans les théorèmes de divisibilité et de décomposition en facteurs, il suffit d'envisager les complexes primaires.

Dans le domaine des nombres hypercomplexes dont nous nous occupons ici, on peut d'abord supposer non négatives les trois coordonnées d'un complexe primaire a, puisqu'au lieu de x, on peut au besoin considérer $-x$, ou $\varepsilon_1 x$, ou $\varepsilon_2 x$; a étant supposé de norme non nulle, envisageons son associé

$$a \cdot \varepsilon_3^k = \left(a_1, \frac{a_2}{g}, a_3\right) \cdot \left(1, \frac{k}{g}, 1\right) = \left(a_1, \frac{a_2 + k a_1}{g}, a_3\right) = \left(a_1, \frac{a_2'}{g}, a_3\right).$$

On voit que le nombre entier k peut être choisi de manière que $a_2' < a_1$ et qu'alors, a_2' est déterminé de façon univoque. Ceci conduit à la *définition* suivante : un complexe entier $a = \left(a_1, \frac{a_2}{g}, a_3\right)$ non diviseur de zéro est dit *primaire,* si ses coordonnées satisfont aux inégalités simultanées $0 < a_1$; $0 \leqq a_2 < a_1$; $0 < a_3$.

Donc, si $x = \left(x_1, \frac{x_2}{g}, x_3\right)$ est un complexe entier primaire de norme non nulle, x_2 ne peut avoir que l'une des valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, x_1 - 1$. Parmi tous les complexes entiers associés entre eux se trouve toujours un, mais un seul, qui est *primaire*.

56. — Quant aux diviseurs de zéro à première coordonnée nulle, tous de la forme $\left(0, \frac{a_2}{g}, a_3\right)$, ils constituent un groupe particulier, un sous-système à deux coordonnées contenu

entièrement dans le système à trois coordonnées que nous envisageons. Leur étude devrait se faire à part, et comme ce n'est pas le but de ce travail, nous les excluons des recherches subséquentes.

Quant aux diviseurs de zéro dont la troisième coordonnée est nulle sans que la première le soit, tous de la forme $\left(y_1, \frac{y_2}{g}, 0\right)$, ils constituent également un sous-système particulier à deux unités relatives, demandant une étude spéciale. On peut y maintenir, pour le complexe *primaire*, la définition donnée ci-dessus (art. 55), avec cette seule différence que $a_3 = 0$. Nous les excluons aussi des recherches ultérieures dans ce travail.

57. — En analogie avec la théorie classique des nombres, nous définirons : un complexe entier $a = \left(a_1, \frac{a_2}{g}, a_3\right)$ qui n'est pas une unité ni un diviseur de zéro, est dit *irréductible*, ou *premier*, si dans toutes les décompositions possibles $a = b \,.\, c$ de a en deux facteurs, l'un de ces derniers est toujours une unité. Ces complexes entiers irréductibles joueront ici le rôle des nombres premiers de l'arithmétique ordinaire.

Dans le domaine que nous étudions, il existe trois catégories de complexes irréductibles, à savoir :

1° Les complexes de la forme $\alpha = (1, 0, p) = e_1 + pe_3$, où p est un nombre premier naturel. Leur norme $N(\alpha) = p$ est un nombre premier. Les complexes entiers, non primaires, de la forme $\left(1, \frac{a_2}{g}, p\right)$ leur sont associés et n'en diffèrent donc pas essentiellement.

2° Les complexes de la forme $\beta = (p, 0, 1) = pe_1 + e_3$, où p représente un nombre premier naturel. Leur norme $N(\beta) = p^2$ est le carré d'un nombre premier.

3° Les complexes de la forme $\gamma = \left(p^n, \frac{a_2}{g}, 1\right)$, où p est un nombre premier ordinaire, l'exposant n un nombre naturel quelconque et a_2 un nombre entier positif inférieur à p^n et non divisible par p,

$$0 < a_2 < p^n \qquad \text{et} \qquad a_2 \not\equiv 0 \pmod{p} .$$

Leur norme $N(\gamma) = p^{2n}$ est une puissance paire quelconque d'un nombre premier naturel p.

Si l'on voulait décomposer γ en facteurs, on devrait avoir :

$$\gamma = \left(p^k, \frac{x}{g}, 1\right) \cdot \left(p^m, \frac{y}{g}, 1\right) = \left(p^{k+m}, \frac{p^k y + p^m x}{g}, 1\right)$$

d'où résulterait : $k + m = n$, et

$$a_2 = p^m x + p^k y = p^m (x + y p^{k-m}) ,$$

en supposant $k \geqq m$. Si $m > 0$, la coordonnée a_2 serait divisible par p, contrairement à l'hypothèse. Cette contradiction ne peut être levée qu'en prenant $m = 0$; mais alors, l'un des deux facteurs est toujours une unité et, par conséquent, γ un complexe *irréductible.*

Remarquons qu'il existe un seul complexe premier *primaire* α de norme p, à savoir $(1, 0, p)$; il représente tous les complexes entiers $\left(1, \frac{x}{g}, p\right)$, car ils lui sont tous associés ; par contre, il existe p complexes premiers *primaires* β de même norme p^2, essentiellement différents entre eux, c'est-à-dire non associés, à savoir :

$$(p, 0, 1) ; \left(p, \frac{1}{g}, 1\right) ; \left(p, \frac{2}{g}, 1\right) ; \ldots ; \left(p, \frac{p-1}{g}, 1\right)$$

ils représentent tous les complexes $\left(p, \frac{x}{g}, 1\right)$ de même norme p^2.

Les nombres premiers naturels tels que p ne sont pas irréductibles dans ce domaine, puisque

$$p = (p, 0, p) = (1, 0, p) \cdot (p, 0, 1) .$$

58. — Pour décomposer en facteurs premiers un complexe entier donné quelconque, a, on a :

$$a = \left(a_1, \frac{a_2}{g}, a_3\right) = \left(a_1, \frac{a_2}{g}, 1\right) \cdot \left(1, 0, a_3\right) .$$

Il suffit donc de considérer deux catégories de complexes entiers : ceux de la forme $(1, 0, m) = e_1 + m e_3$ et ceux de la forme $\left(a_1, \frac{a_2}{g}, 1\right)$ dont la dernière coordonnée est 1.

Désignant par $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ les facteurs premiers de m, de sorte que $m = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots p_\nu$, on voit que

$$(1, 0, m) = (1, 0, p_1).(1, 0, p_2).(1, 0, p_3) \ldots . (1, 0, p_\nu) .$$

Il reste à considérer les complexes entiers de la forme $\left(a_1, \frac{a_2}{g}, 1\right)$. Si l'on pose $a_1 = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots r_\mu$, nous pourrons écrire la décomposition suivante :

$$\left(a_1, \frac{a_2}{g}, 1\right) = \left(r_1, \frac{x_1}{g}, 1\right) \cdot \left(r_2, \frac{x_2}{g}, 1\right) \ldots \left(r_\mu, \frac{x_\mu}{g}, 1\right)$$

où les r_λ sont des nombres premiers ou des puissances de nombres premiers. Les entiers $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ s'obtiennent sans difficulté, de proche en proche.

La décomposition en complexes premiers d'un complexe entier quelconque donné a *est donc toujours possible.*

59. — *Cette décomposition* d'un complexe entier donné en facteurs irréductibles *n'est pas nécessairement univoque*. Par exemple, le complexe entier $a = 625 e_1 + \frac{275}{g} e_2 + e_3$ peut se décomposer, et de plusieurs manières, soit en un produit de deux, soit en un produit de trois facteurs premiers :

$$
\begin{aligned}
625 e_1 + \frac{275}{g} e_2 + e_3 &= \left(25 e_1 + \frac{2}{g} e_2 + e_3\right) \cdot \left(25 e_1 + \frac{9}{g} e_2 + e_3\right) \\
&= \left(25 e_1 + \frac{3}{g} e_2 + e_3\right) \cdot \left(25 e_1 + \frac{8}{g} e_2 + e_3\right) \\
&= \left(25 e_1 + \frac{4}{g} e_2 + e_3\right) \cdot \left(25 e_1 + \frac{7}{g} e_2 + e_3\right) \\
&= (5 e_1 + e_3)^2 \cdot \left(25 e_1 + \frac{11}{g} e_2 + e_3\right) \\
&= \left(5 e_1 + \frac{1}{g} e_2 + e_3\right)^2 \cdot \left(25 e_1 + \frac{1}{g} e_2 + e_3\right)
\end{aligned}
$$

$$= (5 e_1 + e_3) \cdot \left(5 e_1 + \frac{1}{g} e_2 + e_3\right) \cdot \left(25 e_1 + \frac{6}{g} e_2 + e_3\right)$$

$$= (5 e_1 + e_3) \cdot \left(5 e_1 + \frac{2}{g} e_2 + e_3\right) \cdot \left(25 e_1 + \frac{1}{g} e_2 + e_3\right)$$

$$= \text{etc.}$$

Toutes ces décompositions ne contiennent que des facteurs irréductibles et sont essentiellement différentes entre elles.

En général, p désignant un nombre premier naturel, la décomposition du complexe entier $p^2 e_1 + \frac{ap}{g} e_2 + e_3$ est plurivoque, dès que $a > 1$, puisqu'on a

$$\left(p^2, \frac{ap}{g}, 1\right) = (p, 0, 1) \cdot \left(p, \frac{a}{g}, 1\right) = \left(p, \frac{1}{g}, 1\right) \cdot \left(p, \frac{a-1}{g}, 1\right)$$
$$= \left(p, \frac{2}{g}, 1\right) \cdot \left(p, \frac{a-2}{g}, 1\right) = \ldots = \left(p, \frac{b}{g}, 1\right) \cdot \left(p, \frac{a-b}{g}, 1\right).$$

A plus forte raison, la décomposition de

$$p^{n+k} e_1 + \frac{mp^n}{g} e_2 + e_3$$

en facteurs irréductibles est-elle plurivoque, quand $m > 1$.

60. — On sait qu'une constatation analogue faite dans un autre domaine (dans un système de nombres complexes à deux coordonnées indépendantes, appartenant à un corps dérivé d'une racine de l'unité) a amené le mathématicien *E. E. Kummer* à créer ses *nombres idéaux*. Voyant que la décomposition d'un complexe entier en facteurs premiers était plurivoque, il imagina, pour faire disparaître cette anomalie, de considérer ces facteurs premiers eux-mêmes non plus comme irréductibles, mais comme décomposables encore en d'autres éléments ; or, comme ces derniers, les éléments vraiment irréductibles, ne se trouvent en réalité pas dans le système qu'il envisageait, *Kummer* les a créés de toutes pièces, par la pensée, en posant des définitions appropriées. A ces entités logiques créées par pure convention et pour des besoins de simplification, *Kummer* appliqua le nom de *nombres ;* et pour les distinguer des nombres ou complexes réels dont était composé effectivement le système qu'il étudiait, *Kummer* les appela « nombres *idéaux* » (le mot de « nombres imaginaires » ayant déjà une signification fort différente). De cette façon, *Kummer* a considérablement élargi le domaine de nombres qu'il étudiait, en lui *adjoignant* une infinité d'éléments nouveaux dits « nombres idéaux », parmi

lesquels se trouvent les nombres vraiment irréductibles, c'est-à-dire indécomposables. *Kummer* a, naturellement, posé d'une façon très judicieuse les conventions auxquelles étaient censés obéir ses « nombres idéaux », de sorte qu'il réussit à démontrer que, dans ce domaine agrandi, on peut ériger une arithnomie régulière, semblable en tous points à celle construite par *Gauss* dans le système des nombres $a + bi$.

Des rapprochements suggestifs ont été faits entre les nombres idéaux de cette arithnomie et certains radicaux ou éléments chimiques dont l'existence a été postulée par la théorie bien avant d'être confirmée par l'expérience; tout comme ces radicaux de la chimie, les facteurs idéaux de *Kummer* n'apparaissent jamais à l'état isolé, mais figurent « à l'état de combinaison » dans les complexes entiers (v. « Journal f. d. reine u. angew. Mathematik » fondé par *Crelle*, vol. 35, p. 360).

61. — Les théorèmes de décomposition valables dans le domaine des quaternions entiers et des tettarions entiers (v. article 23) pourraient peut-être faire apparaître sous un jour nouveau cette pluralité de possibilités dans la décomposition en facteurs premiers. Soit un tettarion entier c dont la norme $\mathrm{N}(c)$ comprenne quatre facteurs premiers dont deux égaux entre eux, et posons :

$$\mathrm{N}(c) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_1 \cdot p_3$$

Ayant arrêté cet ordre de succession des facteurs p_λ, on peut décomposer le tettarion donné c supposé primitif (c'est-à-dire tel que le plus grand commun diviseur de ses coordonnées soit 1) en un produit de quatre tettarions premiers primaires :

$$c = \pi_1 . \pi_2 . \pi_3 . \pi_4$$

où

$$\mathrm{N}(\pi_1) = p_1 \ ; \qquad \mathrm{N}(\pi_2) = p_2 \ ; \qquad \mathrm{N}(\pi_3) = p_1 \ ; \qquad \mathrm{N}(\pi_4) = p_3 \ ,$$

et cette décomposition est unique. Si l'on fixe un autre ordre de succession, qu'on pose par exemple

$$\mathrm{N}(c) = p_2 \cdot p_1 \cdot p_3 \cdot p_1 \ ,$$

on aura une autre décomposition du tettarion donné c en un produit de quatre tettarions premiers primaires :

$$c = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdot \rho_4$$

où

$$N(\rho_1) = p_2 \,;\; N(\rho_2) = p_1 \,;\; N(\rho_3) = p_3 \,;\; N(\rho_4) = p_1 \,.$$

et cette décomposition sera de nouveau unique, c'est-à-dire déterminée sans ambigüité.

Les tettarions premiers ρ_λ seront différents, en général, des tettarions premiers π_λ ; ainsi $\rho_1 \neq \pi_2$, quoique $N(\rho_1) = N(\pi_2) = p_2$; de même $\pi_1 \neq \rho_4$, quoique $N(\pi_1) = N(\rho_4) = p_1$; etc.

A chaque décomposition de $N(c)$ en facteurs premiers, ou plutôt à chaque ordre de succession que l'on fixe, arbitrairement du reste, pour ces facteurs premiers p_λ (il y a douze permutations possibles dans cet exemple particulier) correspond une décomposition unique et bien déterminée de c en tettarions premiers primaires, mais ces diverses décompositions de c (au nombre de douze dans l'exemple particulier) ne contiennent pas les mêmes facteurs premiers. Si le produit final est néanmoins toujours le même, c'est-à-dire si

$$\pi_1 . \pi_2 . \pi_3 . \pi_4 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdot \rho_4 = \sigma_1 . \sigma_2 . \sigma_3 . \sigma_4 = \ldots = c$$

c'est parce qu'un produit dépend non seulement de ses facteurs, mais aussi de leur ordre de succession.

Ce théorème reste vrai pour les tritettarions (nous l'avons démontré dans un autre mémoire) ; en d'autres termes : ce théorème reste vrai si c est un complexe à neuf coordonnées (v. article 29) représentable par

$$c = \left\{ \begin{matrix} c_{11} \,, & c_{12} \,, & c_{13} \\ c_{21} \,, & c_{22} \,, & c_{23} \\ c_{31} \,, & c_{32} \,, & c_{33} \end{matrix} \right\}$$

Or, le système de complexes à trois coordonnées que nous venons d'étudier est un cas particulier des tritettarions (v. article 44). Donc, le théorème de décomposition en facteurs premiers énoncé ci-dessus doit rester applicable, semble-t-il, quelles que soient les coordonnées c_{ik}, pourvu que $N(c) \neq 0$. Or, en prenant en particulier

$$c_{11} = c_{22} = a_1 \ , \quad c_{12} = a_2 \ , \quad c_{33} = a_3 \ , \quad c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32} = c_{21} = o \ ,$$

on obtient précisément le complexe entier $a \doteq \left(a_1 \,.\, \frac{a_2}{1} ,\ a_3\right)$ appartenant au domaine que nous étudions depuis l'article 51, en faisant $g = 1$; on doit donc toujours avoir plusieurs possibilités de décomposition :

$$c = a = \pi_1 . \pi_2 . \pi_3 . \pi_4 = \rho_1 . \rho_2 . \rho_3 . \rho_4 = \sigma_1 . \sigma_2 . \sigma_3 . \sigma_4 = \cdots \ .$$

Mais maintenant, la multiplication est commutative ; le produit $\pi_1 . \pi_2 . \pi_3 . \pi_4$ qui est égal à c ne dépend plus de l'ordre de succession des facteurs, ni le produit $\rho_1 . \rho_2 . \rho_3 . \rho_4$, ni les autres produits analogues. Il en résulte du même coup que la décomposition de c en facteurs premiers n'est plus univoque, puisqu'en général, les ρ_λ sont différents des π_λ, différents aussi des σ_λ, etc.

62. — De plus, ces réflexions semblent indiquer que la multiplicité de décomposition tient à la commutativité de la multiplication et provient d'elle, tandis que l'unicité de décomposition tient à la non-commutativité de la multiplication. Ces considérations nous ont amené à rechercher si, dans *tous* les systèmes de nombres hypercomplexes, la décomposition d'un complexe entier donné en facteurs premiers est plurivoque ou unique, selon que la multiplication, dans le système en question, est commutative, ou ne l'est pas.

Quelques faits paraissent militer en faveur de cette thèse : c'est d'abord un théorème fondamental qui repose sur l'importante notion de *système simple* introduite par MM. *E. Cartan* et *Th. Molien*; ce théorème dit que tous les systèmes « simples » de nombres hypercomplexes à multiplication associative, où l'égalité et l'addition de deux complexes sont définis par l'égalité et l'addition de leurs coordonnées correspondantes, constituent des sous-systèmes, donc des cas particuliers, de certains systèmes de tettarions. C'est ensuite le fait qu'un système de polytettarions à μ^2 coordonnées entre lesquelles existent n relations n'est autre chose, en réalité, qu'un système de nombres hypercomplexes à $(\mu^2 - n)$ unités relatives. Il semble même que les polytettarions ou μ-tettarions ($\mu = 2, 3, 4, 5, \ldots$) contiennent, comme cas particuliers, tous les systèmes possibles de nombres hypercomplexes à multiplication associative, c'est-à-dire où la relation $(a.b).c = a.(b.c)$ est toujours satisfaite; il semble, dis-je, qu'il suffise d'établir des liaisons appropriées entre les coordonnées d'un système de μ-tettarions pour obtenir, à l'écriture près, tel système qu'on voudra de nombres hypercomplexes à multiplication associative. Par exemple, les nombres complexes de *Gauss* sont un cas particulier des duotettarions; les quaternions sont un sous-système particulier des tetratettarions, et ainsi de suite. Des propositions ci-dessus ressort en tout cas l'importance très grande des tettarions dans la théorie générale des systèmes de nombres hypercomplexes.

63. — Revenons au domaine [H] formé par l'ensemble des complexes *entiers* $x = x_1 e_1 + \frac{x_2}{g} e_2 + x_3 e_3 = \left(x_1, \frac{x_2}{g}, x_3\right)$, où les x_λ sont des nombres entiers variant de $-\infty$ à $+\infty$, et g un nombre entier fixe (v. **51**). Que devient, dans ce domaine [H], la théorie du plus grand commun diviseur ? Voici ce que l'on peut démontrer sans grande difficulté : deux complexes entiers donnés, $a = \left(a_1, \frac{a_2}{g}, a_3\right)$ et $b = \left(b_1, \frac{b_2}{g}, b_3\right)$, possèdent « en général » un plus grand commun diviseur, unique et bien déterminé si l'on ne considère que les entiers primaires (v. **55**) ; de plus, il existe un procédé analogue à l'algorithme d'Euclide permettant de déterminer ce plus grand commun diviseur par un nombre fini d'opérations rationnelles.

Mais ce théorème « général » présente ici (comme dans le cas des quaternions entiers *lipschitziens*, v. articles 9 et 12), des exceptions déconcertantes. Elles sont même si nombreuses qu'on peut se demander si le théorème énoncé ci-dessus n'est pas plutôt un théorème exceptionnel (nous le qualifions de « général », parce que son analogue est vrai, sans exception, dans l'arithmétique classique). D'abord, dans certains cas, l'algorithme d'Euclide ne conduit pas au but: à mi-chemin, il cesse d'être applicable; cela arrive, par exemple, lorsque a_1 et a_3, coordonnées extrêmes de a, sont des multiples de $N(b)$ et qu'en même temps a_2 n'est pas divisible par $N(b)$. Ensuite et surtout, un *plus grand* commun diviseur au sens habituel de ce terme n'existe pas toujours. En fait de démonstration, donnons un exemple numérique facilement généralisable.

Les complexes entiers

$$a = \left(25e_1 + \frac{20}{g} e_2 + e_3\right) \qquad \text{et} \qquad b = \left(25e_1 + \frac{15}{g} e_2 + e_3\right)$$

ont même norme: $N(a) = N(b) = 625$, sans cependant être associés. Les égalités

$$\begin{aligned}
a &= \left(5e_1 + \frac{2}{g} e_2 + e_3\right)^2 \\
&= \left(5e_1 + \frac{1}{g} e_2 + e_3\right) \cdot \left(5e_1 + \frac{3}{g} e_2 + e_3\right) \\
&= (5e_1 + e_3) \cdot \left(5e_1 + \frac{4}{g} e_2 + e_3\right) ; \\
b &= (5e_1 + e_3) \cdot \left(5e_1 + \frac{3}{g} e_2 + e_3\right) \\
&= \left(5e_1 + \frac{1}{g} e_2 + e_3\right) \cdot \left(5e_1 + \frac{2}{g} e_2 + e_3\right)
\end{aligned}$$

montrent que ces complexes a et b possèdent quatre communs diviseurs, tous quatre entiers et non associés, donc essentiellement différents entre eux, à savoir:

$$\begin{aligned}
d_0 &= 5e_1 + e_3 \quad ; & d_2 &= 5e_1 + \frac{2}{g} e_2 + e_3 \\
d_1 &= 5e_1 + \frac{1}{g} e_2 + e_3 \; ; & d_3 &= 5e_1 + \frac{3}{g} e_2 + e_3 \,.
\end{aligned}$$

Si a et b possédaient un *plus grand commun* diviseur d, on devrait avoir: d'une part $\begin{cases} a = f.d \\ b = h.d \end{cases}$ où f et h seraient certains complexes entiers, d'autre part

$$d = d_0 . \delta_0 = d_1 . \delta_1 = d_2 . \delta_2 = \delta_3 . d_3 \;,$$

les δ_λ représentant certains complexes entiers, puisque *le plus grand commun* diviseur d, devant contenir comme facteurs tous les autres communs diviseurs, devrait être divisible par d_0, d_1, d_2 et d_3. Comme $N(a) = N(d).N(f) = 625$, il n'y a que les 5 possibilités suivantes : $N(d) = 1$, ou $= 5$, ou $= 25$, ou $= 125$, ou $= 625$. Mais $N(d) = 625$ est exclu, car il s'ensuivrait que a et b seraient associés, ce qui n'est pas le cas. Les égalités

$$N(d) = N(d_0).N(\delta_0) = N(d_1).N(\delta_1) = N(d_2).N(\delta_2) = N(d_3).N(\delta_3)$$

excluent les hypothèses $N(d) = 1$ et $N(d) = 5$, puisque $N(d_0) = N(d_1) = N(d_2) = N(d_3) = 25$; si $N(d) = 25$, il s'ensuivrait que, les δ_λ étant des unités, d_0, d_1, d_2 et d_3 seraient associés, ce qui n'est pas le cas. Il ne reste ainsi plus à examiner que la dernière hypothèse, savoir : $N(d) = 125$; il s'ensuivrait $N(f) = 5$; donc f, étant un complexe entier, serait nécessairement de la forme $f = \left(1, \frac{x}{g}, 5\right)$. De l'égalité $a = f.d$, on tirerait, en écrivant $d = \left(d'_1, \frac{d'_2}{g}, d'_3\right)$:

$$\left(25, \frac{20}{g}, 1\right) = \left(1, \frac{x}{g}, 5\right).\left(d'_1, \frac{d'_2}{g}, d'_3\right), \qquad \text{d'où} \qquad 1 = 5.d'_3$$

ce qui est impossible en nombres entiers. Donc enfin, l'hypothèse d'un *plus grand* commun diviseur d de a et b conduit nécessairement à une contradiction. Et voilà deux complexes entiers a et b ayant quatre diviseurs communs bien différents entre eux, mais ne possédant, néanmoins, aucun *plus grand* commun diviseur, au sens qu'a ce terme dans l'arithmétique ordinaire.

Dès lors, il n'est plus vrai qu'un complexe *premier* qui divise un produit de deux facteurs divise nécessairement l'un de ces facteurs. Par exemple, les égalités ci-dessus prouvent que le complexe entier $5e_1 + \frac{4}{g}e_2 + e_3$ qui est irréductible dans ce domaine et qui ne divise ni d_1, ni d_3, divise cependant le produit $d_1.d_3 = a$. Enfin, quoique les complexes entiers $d_2 = 5e_1 + \frac{2}{g}e_2 + e_3$ et $d_3 = 5e_1 + \frac{3}{g}e_2 + e_3$, tous deux irréductibles dans ce domaine, soient *premiers entre eux* (c'est-à-dire admettent comme plus grand commun diviseur 1), leurs cinquièmes puissances,

$$d_2^5 = 3\,125e_1 + \frac{6\,250}{g}e_2 + e_3 \qquad \text{et} \qquad d_3^5 = 3\,125e_1 + \frac{9\,375}{g}e_2 + e_3 \ ,$$

ne le sont point et admettent le diviseur commun $3\,125e_1 + e_3$.

Ainsi se trouve confirmée la présomption émise à la fin de l'article 51, à savoir que l'arithnomie du corps de nombres $\{K\}$ basée sur la définition XI ne serait probablement pas « régulière », parce que la dite définition du complexe *entier* engendre un domaine holoïde [H] non maximal.

64. — Toutes les déductions précédentes restent valables, si l'on remplace $\frac{1}{g}$ par un nombre rationnel γ non nul, du reste arbitraire. Faisons remarquer que plus le nombre entier g contient de diviseurs, plus le domaine holoïde [H] correspondant enveloppera de complexes rationnels. On peut donc agrandir indéfiniment le contenu du domaine [H], ou, pour employer une image empruntée à la physique, y « comprimer » des complexes rationnels de plus en plus nombreux. Si l'on choisit, au contraire, pour γ un nombre entier m, on pourra diminuer indéfiniment l'ensemble des complexes rationnels faisant partie de [H], en prenant pour m un nombre de plus en plus grand; on a donc la possibilité (pour employer la même image que tout à l'heure) de « faire le vide » de plus en plus complètement dans l'ensemble [H]. Mais, qu'on augmente ou qu'on diminue le contenu de cet ensemble, l'arithnomie dont nous avons esquissé ci-dessus la partie élémentaire ne changera pas essentiellement, le domaine holoïde non maximal [H] restera toujours non maximal.

Pour faire disparaître les singularités dont nous avons signalé quelques-unes, il faut avoir recours à des procédés plus profonds.

65. — En principe, deux voies bien différentes s'offrent au mathématicien. *La première* consiste à maintenir les mêmes définitions : de la divisibilité, du commun diviseur, du nombre premier, etc., mais à *élargir l'ensemble* [H] que l'on étudie. On peut y arriver de deux façons : 1° en définissant différemment le nombre hypercomplexe rationnel « entier » dans le corps de tous les complexes rationnels ; cette manière de faire est due à M. *A. Hurwitz* qui l'appliqua pour la première fois au système des quaternions ; 2° en-créant, par des définitions judicieuses, des entités logiques soumises à des lois appropriées, entités que l'on appellera, par extension, des « nombres » et que l'on adjoindra à [H]; cette manière de procéder est due à *Kummer* (v. article 60).

La deuxième voie consiste à suivre une marche en quelque sorte inverse de la précédente : on maintient tel quel le domaine [H] que l'on étudie, on ne l'élargit point, mais on *change les définitions* de la divisibilité, du commun diviseur, du « nombre premier », etc. Le changement le plus radical provient de ce que, dans les nouvelles définitions, l'on n'envisage guère un nombre ou un complexe isolément, mais plutôt *des ensembles* composés d'une infinité de complexes, et que l'on opère avec ces ensembles de complexes au lieu d'opérer avec des complexes isolés. Cette voie fut ouverte par *J.-W. Richard Dedekind.* — *R. Dedekind* désigne par des lettres gothiques minuscules : $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$... ces ensembles particuliers auxquels il donna le nom d'*idéaux,* nom critiquable peut-être, mais qui a acquis droit de cité dans la théorie moderne des nombres. L'idée géniale du célèbre mathématicien revient à ceci : prendre comme sujet direct d'étude, au lieu de l'entier considéré a, l'ensemble de ses multiples $g.a$; cet ensemble forme « *l'idéal principal* de l'entier a ». A ces idéaux principaux, *Dedekind* a joint des idéaux secondaires ; ce sont de nouvelles familles de nombres déduites des précédentes par voie d'addition. La définition générale d'un idéal peut s'énoncer ainsi :

Définition XII : Un *idéal* $\mathfrak{a}$ est un ensemble formé d'une infinité de nombres entiers ordinaires ou de nombres hypercomplexes *entiers,* dits *les éléments* de l'idéal $\mathfrak{a}$, ensemble jouissant des deux propriétés suivantes : 1° les éléments de l'idéal se reproduisent par addition et soustraction ; 2° si x est un élément quelconque de l'idéal $\mathfrak{a}$, le produit $g.x$, où g représente un complexe entier quelconque, est aussi contenu dans cet idéal $\mathfrak{a}$.

En vertu de cette définition, un idéal $\mathfrak{a}$ contenant les deux éléments a et b différents entre eux, contient nécessairement aussi $a+b$, $a-b$, $g.a$, $g.b$, où g est un complexe entier quelconque pouvant lui-même faire partie, ou non, de l'idéal en question. On démontre alors que tout idéal possède une base finie (v. articles 16 et 17).

On définit ce qu'il faut entendre par le produit et par le quotient de deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, ce qu'est un idéal « premier », un idéal « composé », un diviseur d'idéal, le plus grand commun diviseur de deux idéaux, et ainsi de suite.

Ceci montre que l'arithnomie du domaine [H] que l'on veut étudier devient un calcul avec des idéaux, au lieu d'être un calcul avec des nombres ordinaires ou avec des complexes entiers. Mais ces *idéaux* au sens de *Dedekind* (et contrairement aux « nombres *idéaux* » de *Kummer*) ne sont plus des abstractions ; ce sont des ensembles tout aussi réels, tout aussi effectifs, que les nombres hypercomplexes eux-mêmes dont ils sont constitués. Tel est le principe de la méthode de *Dedekind,* permettant d'étudier le domaine holoïde [H] sans modifier ce domaine.

La méthode employée par *E. E. Kummer* est tout autre. Elle modifie très profondément le domaine holoïde [H] à étudier, puisqu'elle lui adjoint une infinité de « nombres idéaux » qui, au fond, ne s'y trouvent pas du tout. Ces nombres idéaux rappellent un peu les *points imaginaires* et les *droites imaginaires* des géomètres quand ils disent, par exemple, que deux circonférences dont l'une est entièrement intérieure à l'autre se coupent, néanmoins, en deux (voire même en quatre) points *imaginaires* et que ces mêmes circonférences ont quatre tangentes communes, mais *imaginaires.* Les *nombres idéaux* de la méthode de *Kummer,* comme les *figures imaginaires* de la géométrie, touchent à ce qu'on pourrait appeler la « métamathématique » (par analogie à « métaphysique ») et restent impénétrables à beaucoup d'esprits. La méthode de *Kummer* est du reste d'une application moins facile que la théorie des idéaux, car on ne voit pas toujours du premier coup d'œil quelles sont les définitions qu'il faut poser pour créer de façon appropriée les « nombres idéaux ».

Les deux voies, si différentes en principe, celle de *E. E. Kummer* et celle de *R. Dedekind,* peuvent conduire au même résultat : faire tomber les singularités que présente l'arithnomie de certains domaines holoïdes.

66. — Résumons en disant: la définition *lipschitzienne* du nombre hypercomplexe *entier* a l'avantage d'être toujours applicable et toujours univoque (v. définition V) ; mais elle est en quelque sorte superficielle, en ce sens qu'en l'adoptant, on ne tient compte que de la nature des coordonnées, sans aucun égard aux règles qui définissent le système envisagé de nombres hypercomplexes. Malgré l'avantage d'être toujours applicable et univoque, elle doit être rejetée comme pouvant conduire à des arithnomies non régulières.

La manière *hurwitzienne* de définir le nombre hypercomplexe *entier* est plus profonde (v. définition IX, art. 24), en ce sens qu'en l'adoptant, on tient compte non seulement de la nature des coordonnées, mais des propriétés intrinsèques du système envisagé de nombres hypercomplexes, puisqu'on doit rechercher un domaine holoïde *maximal* et qu'il n'est pas possible de le déterminer sans se servir des règles qui définissent le système en question. Aussi la définition *hurwitzienne* conduit-elle à des arithnomies régulières là où la définition *lipschitzienne* reste en défaut.

Par contre, la définition *hurwitzienne* a l'inconvénient de ne pas être toujours univoque, et surtout celui de ne pas pouvoir s'appliquer à tous les cas, puisqu'il existe des corps de nombres sans domaine holoïde maximal. Pour étudier ces systèmes de nombres, on se sert avec avantage de la *méthode des idéaux*. Elle consiste à modifier les définitions de façon à ne plus avoir, dans la théorie de la divisibilité, à calculer avec des nombres entiers isolés, mais avec des idéaux. Cette méthode permet d'écarter les obstacles qui pendant longtemps ont obstrué l'entrée d'une immense région : l'arithnomie des nombres complexes généraux.

Neuchâtel, octobre 1915.