Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1916)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA COURBURE GÉODÉSIQUE DES LIGNES TRACÉES SUR LA SPHÈRE

Autor: Cailler, C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16878

SUR LA COURBURE GÉODÉSIQUE DES LIGNES TRACÉES SUR LA SPHÈRE

PAR

C. CAILLER (Genève).

Une des formules les plus élégantes pour le calcul de la courbure d'une courbe plane est assurément celle où interviennent comme variables principales, d'une part le rayon vecteur r issu d'un centre fixe, et d'autre part, la distance p qui sépare la tangente de ce même centre. En fonction de ces coordonnées r et p, le rayon de courbure prend la forme très simple

$$\rho = r \frac{dr}{dp} . \tag{1}$$

Je ne sais s'il a été remarqué jusqu'ici que, moyennant de légères modifications, la formule précédente peut être aisément appliquée aux courbes tracées sur la sphère. Si on désigne, pour ces dernières, par les mêmes lettres r et p les distances sphériques qui séparent d'un point de la courbe ou de la tangente passant en ce point, l'origine fixe, et si la courbure géodésique est représentée par la lettre $c = \frac{1}{\rho}$, la formule ci-dessus devient dans le nouveau cas

$$\rho = \frac{\sin r \, dr}{\cos p \, dp} = - \frac{d \cos r}{d \sin p} . \tag{2}$$

Il n'y a pas lieu de s'étonner de la structure presque symétrique de cette formule relativement aux paramètres r et p; cette symétrie est nécesssaire, elle correspond à la loi de dualité et provient du fait que les quantités $\cos r$ et $\sin p$

s'échangent entre elles quand on passe du point de vue ponctuel au tangentiel. La même opération transforme c en son inverse $\frac{1}{c}$. Ces différents caractères sont mis en évidence, d'une manière très nette, dans la formule (2); ils sont bien moins apparents dans la formule (1), relative à la Géométrie plane, quoique celle-ci se déduise de l'autre, comme résultat limite, lorsqu'on fait croître à l'infini le rayon de la sphère d'abord pris comme unité.

La preuve de l'équation (2) est extrêmement simple, sous forme analytique, si on part des formules de Frenet. Ces dernières, pour le cas de la sphère, s'écrivent sous la forme

$$\frac{dX_1}{ds} = + X_2 , \qquad \frac{dX_2}{ds} = - X_1 + cX_3 , \qquad \frac{dX_3}{ds} = - cX_2 .$$

Le symbole X représente ici une quelconque des coordonnées x, y, z, et les indices 1, 2, 3 sont les numéros des trois points associés, deux à deux orthogonaux, dont le premier décrit la courbe donnée, tandis que les deux autres sont à 90 degrés du premier sur la tangente et sur la normale à cette courbe Γ. Quant à ds et c ils désignent l'élément d'arc et la courbure de Γ.

La formule cherchée n'est qu'une des nombreuses valeurs de c déduites du système précédent. Tirons de ce dernier la conséquence

$$y_1 \frac{dz_2}{ds} - z_1 \frac{dy_2}{ds} = c(y_1 z_3 - z_1 y_3) ;$$

autrement dit, puisque $y_3 z_1 - z_3 y_1 = x_2$, etc...

$$y_1 \frac{d^2 z_1}{ds^2} - z_1 \frac{d^2 y_1}{ds^2} = - cx_2 = - c \frac{dx_1}{ds} .$$

De là

$$\frac{1}{c} = - \frac{dx_1}{d\left(y_1 \frac{dz_1}{ds} - z_1 \frac{dy_1}{ds}\right)} ;$$

ce résultat est identique avec (2), puisque

$$x_1 = \cos r , \qquad \text{et} \qquad y_1 \frac{dz_1}{ds} - z_1 \frac{dy_1}{ds} = \sin p .$$

En alternant le rôle des axes, il est clair qu'on obtiendrait exactement par la même voie, les formules

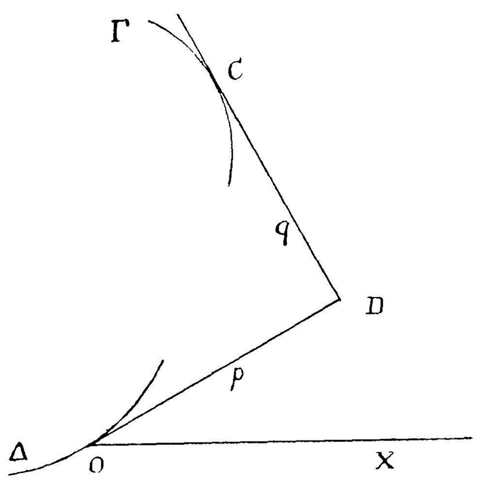
$$\frac{1}{c} = - \frac{dy_1}{d\left(z_1 \frac{dx_1}{ds} - x_1 \frac{dz_1}{ds}\right)}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{c} = - \frac{dz_1}{d\left(x_1 \frac{dy_1}{ds} - y_1 \frac{dx_1}{ds}\right)} .$$

Si donc on désigne par r et θ les coordonnées polaires du point x_1, y_1, z_1 qui décrit Γ, et par p et ω les coordonnées tangentielles polaires de la tangente menée à cette même courbe Γ, on peut encore écrire les relations

$$\frac{1}{c} = \frac{d(\sin r \cos \theta)}{d(\cos p \cos \omega)} = \frac{d(\sin r \sin \theta)}{d(\cos p \sin \omega)} .$$

Ces formules, évidemment analogues à (2), ne se prêtent pas aussi bien aux applications parce qu'elles contiennent chacune quatre variables au lieu de deux.

On me permettra de retrouver ici la formule (2) par une marche géométrique également très facile. Pour simplifier la figure, j'y remplace par des lignes droites les arcs de grand cercle de la sphère.



Prenons comme coordonnées les polaires p et ω, relatives au pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente à notre courbe Γ. Soit $\overline{CD}$ cette tangente, C étant le point de contact.

Les coordonnées tangentielles de $\overline{CD}$, déjà employées ci-dessus, sont

$$u = \sin p , \qquad v = - \cos p \cos \omega , \qquad w = - \cos p \sin \omega ;$$

par suite, l'angle dont tourne cette tangente, autrement dit l'angle de contingence de la courbe, sera

$$d\alpha = \sqrt{du^2 + dv^2 + dw^2} ,$$

soit, calcul fait,

$$d\alpha = \sqrt{dp^2 + \cos^2 p \, d\omega^2} = d\omega \sqrt{p'^2 + \cos^2 p} .$$

Désignons encore par q la longueur $\overline{CD}$, par ds l'élément d'arc tracé par le point C sur la courbe Γ, par $d\sigma$ le déplacement infiniment petit du point D, enfin par i l'angle de ce déplacement avec le rayon vecteur OD prolongé.

Si on projette l'élément $d\sigma$ sur les côtés $\overline{OD}$ et $\overline{CD}$ de l'angle droit, on obtient à l'instant les formules évidentes

$$\left.\begin{array}{ll} dp = \cos i\, d\sigma\ , & ds - dq = \sin i\, d\sigma\ , \\ \sin p\, d\omega = \sin i\, d\sigma\ , & \sin q d\alpha = \cos i\, d\sigma\ , \end{array}\right\} \tag{3}$$

dont la comparaison donne

$$\sin q\, d\alpha = dp\ , \tag{4}$$

$$ds = dq + \sin p\, d\omega\ . \tag{5}$$

En remplaçant, dans la première de ces formules, $d\alpha$ par la valeur donnée plus haut, nous aurons

$$\sin q = \frac{p'}{\sqrt{p'^2 + \cos^2 p}}\ , \qquad \cos q = \frac{\cos p}{\sqrt{p'^2 + \cos^2 p}}\ , \qquad \operatorname{tg} q = \frac{p'}{\cos p}\ ,$$

dont la dernière donne

$$dq = \frac{\cos p\, p'' + p'^2 \sin p}{p'^2 + \cos^2 p}\, d\omega\ .$$

En portant cette valeur dans l'équation (5), on trouve, pour la courbure $c = \dfrac{d\alpha}{ds}$, la valeur

$$\frac{1}{c} = \frac{p'' \cos p + 2p'^2 \sin p + \cos^2 p \sin p}{(p'^2 + \cos^2 p)^{3/2}} = \frac{\cos^3 p \left\{ \dfrac{d^2}{d\omega^2} \operatorname{tg} p + \operatorname{tg} p \right\}}{(p'^2 + \cos^2 p)^{3/2}}\ . \tag{6}$$

Mais nous avons encore

$$\cos r = \cos p \cos q = \frac{\cos^2 p}{\sqrt{p'^2 + \cos^2 p}}\ ;$$

en différentiant cette relation, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \cos r &= -\frac{p' \cos p}{(p'^2 + \cos^2 p)^{3/2}} (p'' \cos p + 2p'^2 \sin p + \cos^2 p \sin p) \\ &= -p' \cos p \frac{1}{c}\ , \end{aligned}$$

ou derechef

$$\frac{1}{c} = -\frac{d(\cos r)}{d(\sin p)} .$$

Je termine ces quelques remarques en observant que la démonstration qu'on vient de lire peut facilement se généraliser et embrasser le cas où la droite OD, au lieu de passer par un centre fixe O, se meut en enveloppant une courbe Δ dont O est un des points ; dans ce cas le sommet D de l'angle mobile décrit la courbe orthoptique des courbes Γ et Δ. Soit dt l'élément d'arc de la dernière et, dans une acception généralisée, $d\omega$ l'angle de contingence de cette même courbe.

Les formules (3) deviennent maintenant

$$dt + dp = \cos i \, d\sigma , \qquad ds - dq = \sin i \, d\sigma ,$$

$$\sin p \, d\omega = \sin i \, d\sigma , \qquad \sin q \, d\alpha = \cos i \, d\sigma ,$$

tandis que les angles de contingence vérifient les conditions

$$d\alpha^2 = (dp + dt)^2 + \cos^2 p \, d\omega^2 ,$$

$$d\omega^2 = (dq - ds)^2 + \cos^2 q \, d\alpha^2 .$$

On tire immédiatement de là les éléments relatifs à la courbe Γ exprimés en fonction de ceux qui leur correspondent dans la courbe Δ, à savoir

$$\sin q = \frac{dt + dp}{\sqrt{(dt + dp)^2 + \cos^2 p \, d\omega^2}} , \quad \cos q = \frac{\cos p \, d\omega}{\sqrt{(dt + dp)^2 + \cos^2 p \, d\omega^2}} ,$$

$$\operatorname{tg} q = \frac{dt + dp}{\cos p \, d\omega} ,$$

et

$$\frac{ds}{d\omega} = \frac{dq}{d\omega} + \sin p = \frac{\cos p\left(\frac{d^2 t}{d\omega^2} + \frac{d^2 p}{d\omega^2}\right) + \sin p \frac{dp}{d\omega}\left(\frac{dt}{d\omega} + \frac{dp}{d\omega}\right)}{\left(\frac{dt}{d\omega} + \frac{dp}{d\omega}\right)^2 + \cos^2 p} + \sin p .$$

Il va sans dire que les divers calculs ci-dessus pourraient être facilement étendus à la Planimétrie de Lobatchewsky.

Mars 1916.