Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1916)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ESSAI SUR LA THÉORIE DE LA DÉMONSTRATION DANS LES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Autor: Zaremba, S.

Kapitel: I. — Postulats, définitions, théorèmes.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16869

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Je ne ferai usage d'aucun système particulier de symboles, mais j'ose espérer que cette circonstance ne nuira en rien à la clarté et à la précision de l'exposition.

Loin de chercher à épuiser le sujet, je me suis efforcé de me borner aux questions auxquelles je croyais pouvoir répondre avec sûreté.

Bien que le domaine que j'étudie appartienne presque entièrement à celui de la logique générale, je ne donne, à dessein, que des exemples tirés des éléments des mathématiques. Ces exemples sont peut-être moins simples que d'autres qu'il serait aisé d'imaginer mais, à cause de la précision de tout ce qui est du domaine des mathématiques, je les crois particulièrement adaptés au but que j'avais en vue.

Dans un travail comme celui-ci, il est impossible de préciser les influences variées sous lesquelles se sont développées les idées que l'on expose, mais je dois dire que je dois beaucoup à mon distingué collègue M. Jean Sleszynski, lequel ne s'est pas encore décidé à publier ses longues et profondes recherches dans le domaine de la logique, mais se fait un plaisir d'en faire part à ses amis dans des conversations privées.

J'ajoute que je reproduis, dans ce travail, avec quelques perfectionnements, l'aperçu que j'ai placé au début du premier volume de mon *Introduction à l'Analyse* publiée en langue polonaise à Varsovie.

I. — Postulats, définitions, théorèmes.

§ 1. — Les propositions dont l'ensemble exprime tout ce qui est affirmé dans une théorie déductive et, par conséquent, dans toute théorie mathématique se divisent en deux catégories, à savoir :

1° Les propositions regardées comme vraies sans aucune démonstration et que, à défaut d'un terme classique, j'appellerai *prémisses ;*

2° les *théorèmes* ou propositions appuyées de démonstrations.

§ 2. — Il existe une catégorie particulière de prémisses appelées *définitions*. On entend par « définition » toute proposition qui exprime une convention en vertu de laquelle le sens d'une expression (qui peut être un mot, une phrase ou quelque autre symbole) devra être considéré comme identique à celui d'une certaine autre expression plus ou moins compliquée, mais uniquement formée de termes considérés comme clairs par eux-mêmes ou définis antérieurement. Voici par exemple la définition ordinaire des droites parallèles : « l'assertion que deux droites indéfinies sont parallèles exprime que ces droites sont situées dans un même plan et n'ont aucun point commun ».

D'après ce qui précède on peut, sans altérer en rien le contenu d'une théorie, supprimer toute prémisse qui est une définition à condition de remplacer partout l'expression dont le sens est déterminé au moyen de la définition, par la phrase qui, aux termes de celle-ci, a le sens de l'expression considérée. Cette remarque permet de constater qu'une prémisse peut, comme une définition, être une proposition vraie seulement parce que l'on est convenu d'interpréter un certain terme de façon qu'il en soit ainsi, sans que la prémisse considérée soit une définition au sens précis que nous avons attribué à ce mot. Ainsi, par exemple, si en énonçant les prémisses de la Géométrie, on disait que le mot « droite » sera considéré comme ayant le sens voulu pour que la proposition « deux droites qui ont deux points communs se confondent » soit une proposition vraie, on énoncerait une prémisse qui ne pourrait pas être regardée comme une définition, même dans le cas où elle exprimerait tout ce qui est affirmé en Géométrie sans démonstration au sujet des droites. En effet, la prémisse que nous venons de considérer ne permettrait pas, comme devrait le permettre une véritable définition, de faire disparaître, dans la Géométrie, le mot « droite », en le remplaçant par une périphrase convenable.

Toute prémisse qui n'est pas une définition s'appelle *postulat*.

§ 3. — Il est utile d'insister un peu sur la notion de définition. Il est tout d'abord évident qu'il serait parfaitement

absurde de rechercher la démonstration d'une définition, mais il ne faudrait pas en conclure que les définitions puissent être posées d'une façon absolument arbitraire. Une définition peut devoir être écartée non seulement à cause de son peu de fécondité, mais encore parce qu'elle peut être absurde et dès lors absolument inadmissible. En effet, il peut arriver qu'il soit impossible d'attribuer à une expression le sens voulu par la définition correspondante parce que la chose que cette expression devrait désigner n'existe pas ; j'ajoute que, dans la pratique, c'est ordinairement de là que dérive l'inadmissibilité des définitions incorrectes. Par conséquent, l'existence de la chose que doit désigner une expression en vertu de sa définition doit être ou un théorème dûment démontré, ou un postulat.

D'ailleurs, lorsqu'une définition ne donne pas lieu à l'objection précédente et lorsque, de plus, l'expression qu'elle définit n'a pas été précédemment employée, la définition considérée peut être plus ou moins heureusement choisie, mais elle peut sûrement être adoptée sans contrevenir aux règles de la logique.

§ 4. — Il importe de faire remarquer que, dans les démonstrations, le rôle des définitions ne diffère en rien de celui des postulats. Ainsi par exemple, dans la démonstration d'un théorème relatif aux droites parallèles, on n'a nullement à tenir compte du fait que l'équivalence des deux propositions suivantes : « deux droites sont parallèles » et « deux droites sont situées dans un même plan et n'ont aucun point commun », dérive d'une convention ; la seule chose qui importe est cette équivalence elle-même.

§ 5. — Il est aisé de comprendre pourquoi les théories déductives, relativement parfaites, sont hérissées de définitions. En effet, la précision d'une proposition est une condition nécessaire (quoique insuffisante) de son exactitude, car l'épithète de vraie ou fausse ne peut évidemment être attribuée à une proposition que dans le cas où l'on sait bien ce qui est affirmé par cette proposition. Il est donc indiqué d'éviter, dans la mesure du possible, l'emploi d'expressions (ou d'autres symboles) dont le sens exact n'aurait pas été déter-

miné au moyen de définitions. Toutefois, il est impossible de se passer de termes non définis, considérés par conséquent comme clairs et précis par eux-mêmes. En effet, dans toute théorie, il devra y avoir une définition qui précède toutes les autres et, dans celle-ci, le terme défini par elle devra l'être au moyen de termes non définis.

§ 6. — Pour terminer ces considérations sommaires sur les prémisses d'une théorie, nous allons mettre en évidence la relativité des notions de définition, de postulat et de théorème. Lorsqu'une théorie (T) fait suite à d'autres théories (T′), on peut à volonté considérer la théorie (T) comme un tout isolé ou comme une partie d'une théorie plus étendue, englobant la théorie (T) et les théories (T′). Dans le premier cas, les postulats de la théorie (T) comprendront en particulier tous les théorèmes des théories (T′), dans le second cas, au contraire, aucun théorème de la théorie (T′) ne fera partie de l'ensemble des postulats de la théorie formée par la réunion des théories (T) et (T′).

Il peut arriver aussi que, étant donné une théorie (T), on en isole momentanément une partie (T_0) pour l'étudier comme un tout. Dans ce cas, les théorèmes qui, dans la théorie (T), précèdent la partie (T_0) de celle-ci, devront être considérés comme faisant partie des postulats de la théorie (T_0). Ainsi par exemple, quand on veut soumettre la démonstration d'un théorème particulier d'une théorie à une étude approfondie, on regarde ce théorème et sa démonstration comme formant une théorie à part, et alors tout théorème antérieurement démontré et intervenant dans la démonstration du théorème considéré acquiert le caractère d'un postulat.

La relativité de la notion de postulat apparaît encore à un tout autre point de vue. Ayant une théorie à exposer, on peut, sans altérer en rien les résultats de celle-ci et sans contrevenir aux règles de la logique la plus impeccable, adopter au choix différents systèmes de postulats et suivant que l'on aura choisi l'un ou l'autre système de postulats, une même proposition pourra acquérir le caractère d'un postulat ou d'un théorème.

Naturellement il ne résulte pas de là que, pour constituer

une théorie mathématique, on puisse raisonnablement adopter l'un quelconque des systèmes logiquement possibles de postulats. En réalité on doit tenir compte d'une foule de circonstances telles que le degré d'évidence des postulats, la simplicité plus ou moins grande des démonstrations selon le système de postulats adoptés, etc. Mais, dans cet ordre de choses, les préférences personnelles ne peuvent jamais être complètement écartées et, en outre, l'évolution de la science nous apprend qu'il est souvent utile de remanier les théories précédemment élaborées en substituant aux postulats adoptés d'abord, un autre système de postulats. Il va sans dire qu'un remaniement d'une théorie peut porter non seulement sur les postulats, mais encore sur les définitions, et alors une proposition qui, dans un mode d'exposition, est vraie par définition peut, dans un autre mode d'exposition acquérir le caractère d'un postulat ou celui d'un théorème.

Plus tard, au § 18, nous aurons l'occasion de constater la relativité des notions de postulat et de définition encore à un nouveau point de vue.

II. — Propositions conditionnelles. Indéterminées pouvant entrer dans une proposition conditionnelle. Propositions conditionnelles illusoires.

§ 7. — Nous appellerons *proposition conditionnelle* toute proposition exprimant une relation de la forme suivante : lorsqu'une certaine proposition (H) est vraie, une certaine autre proposition (C) est vraie aussi ; la proposition (H) s'appellera *hypothèse* et la proposition (C), *conclusion* de la proposition conditionnelle. Toute proposition non conditionnelle s'appellera *proposition catégorique*.

La précédente division des propositions en deux catégories porte en réalité sur la forme de celles-ci et non sur le sens, car le sens d'une proposition catégorique peut toujours être rendu au moyen d'une proposition conditionnelle. Ainsi par exemple la proposition « le nombre 7 est un nombre premier » est une proposition catégorique mais, au fond,