Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1916)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES THÉORÈMES DE H. A. SCHWARZ ET K. POHLKE. DÉMONSTRATIONS ANALYTIQUES

Autor: Daniëls, M.-Fr.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16877

LES THÉORÈMES DE H. A. SCHWARZ ET K. POHLKE. DÉMONSTRATIONS ANALYTIQUES

PAR

M.-Fr. Daniëls (Fribourg, Suisse).

Le célèbre théorème de K. Pohlke (1853), qui est à la base de l'axonométrie, a été l'objet d'un grand nombre de travaux mathématiques. Parmi les nombreuses démonstrations *géométriques* — celle de Pohlke lui-même ne fut jamais publiée — citons d'après l'article de E. Papperitz sur la Géométrie descriptive dans l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (vol. III_1, p. 573), celles de C. Pelz (1877), Fr. Schur (1897), Fr. Schilling (1902) et Th. Schmid (1904). A ces noms nous pouvons encore ajouter (voir E. Wendling : *Der Fundamentalsatz der Axonometrie,* Zurich, 1912, p. 95-96) ceux de von Deschwanden (1861), H. A. Schwarz (1864), G. von Peschka (1879), H. Drasch (1883), J. Mandl (1886), C. Küpper (1889), A. Beck (1890), F. Ruth (1891) et E. Kruppa (1907)[1].

Les démonstrations *analytiques* du même théorème sont beaucoup moins nombreuses. Elles sont dues à H. Kinkelin (*Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft Zurich,* 1861), à F. Klein (*Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus :* II. Teil, 1890, S. 161-174) et à M. Koppe (*Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft,* 1911, S. 108-109).

Nous donnons dans le présent travail la première démons-

---

[1] Voir encore J. van Bruggen : *De Hoofdstelling der Axonometrie,* Thèse Utrecht, décembre 1915.

tration *analytique* du *théorème plus général*, dû à H. A. SCHWARZ (*Crelle's Journal*, vol. 63, S. 309-314, et *Gesammelte Abhandlungen*, II, S. 1-7). Cette démonstration est basée sur la théorie des « dyadiques », les « dyadics » de GIBBS-WILSON (*Vectoranalysis*, 1902, chapter V, pp. 260-331)[1]. La seconde partie de notre article est consacrée à une démonstration analytique du théorème de Pohlke, indépendante de la première, et dans laquelle nous nous servons uniquement des éléments du calcul vectoriel. Elle a l'avantage de conduire à des constructions très simples.

I

1. — THÉORÈME DE H. A. SCHWARZ. — *Trois vecteurs non coplanaires connus* $(\mathrm{OR_k}) \equiv \mathfrak{R}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ *peuvent toujours, par une projection parallèle, donner trois vecteurs coplanaires, formant une figure semblable à celle de trois vecteurs coplanaires connus* $(\mathrm{O'A_k}) \equiv \mathfrak{A}_k$, *pourvu que parmi les quatre points* $\mathrm{O'}$, $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{A_3}$ *il n'y en ait pas plus de trois en ligne droite.*

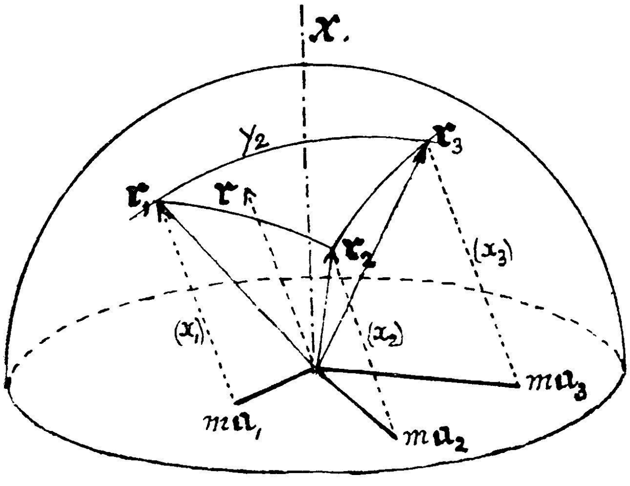

Fig. 1.

Nous pouvons d'abord simplifier le problème. En effet, si les grandeurs des vecteurs connus $\mathfrak{R}_k$ sont R_k, le théorème de Schwarz prétend changer les vecteurs-*unités* non-coplanaires $\mathfrak{R}_k : \mathrm{R}_k \equiv \mathfrak{r}_k$ par projection parallèle en trois vecteurs coplanaires formant une configuration semblable à celle des vecteurs connus $\mathfrak{A}_k : \mathrm{R}_k \equiv \mathfrak{a}_k$.

[1] On peut consulter encore e. a. : C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO : *Omografie vettoriali,* Torino, 1909 ; G. JAUMANN : *Die Grundlagen der Bewegungslehre,* Leipzig, 1905, et E. BUDDE : *Tensoren und Dyaden,* Braunschweig, 1914. La notation employée dans cet article est celle de Gibbs-Wilson sauf pour un point tout à fait secondaire, sur lequel nous revenons.

2. — Supposant le trièdre des $\mathfrak{r}_k$ placé par rapport au plan contenant les $\mathfrak{a}_k$ de manière telle que la projection des $\mathfrak{r}_k$ parallèlement au vecteur-*unité* $\mathfrak{r}$ par des droites de longueurs x_1, x_2, x_3 donne des vecteurs $m\mathfrak{a}_1$, $m\mathfrak{a}_2$, $m\mathfrak{a}_3$, proportionnels aux $\mathfrak{a}_k$, nous obtiendrons un système de *seize* équations scalaires. Or, nous ne connaissons pas la position des trois $\mathfrak{r}_k$ et de $\mathfrak{r}$ par rapport au plan des $\mathfrak{a}_k$; de ce fait il y a *douze* inconnues; les longueurs x_1, x_2, x_3 en forment *trois* autres et m enfin est la *seizième* inconnue. Les équations en question seront, si nous appelons γ_k les angles des vecteurs donnés $\mathfrak{r}_k$:

$$(1)\qquad \begin{array}{llll} \mathfrak{r}_1 - x_1\mathfrak{r} = m\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{r}_2 . \mathfrak{r}_3 = \cos\gamma_1 & \mathfrak{r}_1 . \mathfrak{r}_1 = 1 & \\ \mathfrak{r}_2 - x_2\mathfrak{r} = m\mathfrak{a}_2 & \mathfrak{r}_3 . \mathfrak{r}_1 = \cos\gamma_2 & \mathfrak{r}_2 . \mathfrak{r}_2 = 1 & \mathfrak{r} . \mathfrak{r} = 1\ . \\ \mathfrak{r}_3 - x_3\mathfrak{r} = m\mathfrak{a}_3 & \mathfrak{r}_1 . \mathfrak{r}_2 = \cos\gamma_3 & \mathfrak{r}_3 . \mathfrak{r}_3 = 1 & \end{array}$$

3. — Les trois premières équations qui, étant vectorielles, correspondent à *neuf* équations scalaires, peuvent être condensées en l'unique égalité des *dyadiques :*

$$(2)\qquad \begin{array}{l} \Phi \equiv (\mathfrak{r}_1 - x_1\mathfrak{r})\mathfrak{r}_1' + (\mathfrak{r}_2 - x_2\mathfrak{r})\mathfrak{r}_2' + (\mathfrak{r}_3 - x_3\mathfrak{r})\mathfrak{r}_3' \\ \text{et} \qquad m\Psi \equiv m(\mathfrak{a}_1\mathfrak{r}_1' + \mathfrak{a}_2\mathfrak{r}_2' + \mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_3')\ , \end{array}$$

dont les « conséquents[1] » sont les vecteurs réciproques $\mathfrak{r}_k'$ correspondant aux vecteurs non-coplanaires donnés $\mathfrak{r}_k$. L'égalité des « conséquents » dans ces dyadiques égales entraîne celle des « antécédents », et comme les « antécédents » $\mathfrak{a}_k$ de la seconde dyadique sont coplanaires, il y a des nombres μ_k tels que la *somme des produits* $\mu_k\mathfrak{a}_k$ *est nulle.* Il en est donc de même pour les trois « antécédents » de la première dyadique, de sorte que :

$$\mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3\mathfrak{r}_3 = (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3)\mathfrak{r}\ .$$

---

[1] Les vecteurs réciproques en question satisfont à

$$\mathfrak{r}_1' = \frac{\mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_3}{[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3]}\ , \qquad \mathfrak{r}_2' = \frac{\mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_1}{[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3]}\ , \qquad \mathfrak{r}_3' = \frac{\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2}{[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3]}$$

$$\text{ou} \qquad \mathrm{D}\mathfrak{r}_1' = \mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_3\ , \qquad \mathrm{D}\mathfrak{r}_2' = \mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_1 \ldots$$

si nous appelons « le sinus de l'angle trièdre », qui est le produit pseudoscalaire des valeurs $\mathfrak{r}_k$ par abréviation D. (Gibbs-Wilson, p. 83).

Or, il est facile de choisir les μ_k de manière à faire du premier membre un vecteur-*unité*. Nous trouvons donc, ceci étant fait,

$$\mathbf{r} = \mu_2 \mathbf{r}_1 + \mu_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 \mathbf{r}_3 \ , \tag{3}$$

c'est-à-dire *le vecteur indiquant la direction de la projection* dans sa position par rapport au trièdre donné des $\mathbf{r}_k$, et en outre la relation importante :

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 \equiv \mathbf{r} . \boldsymbol{\chi} = 1 \ . \tag{4}$$

Dans la dernière équation nous avons introduit le vecteur auxiliaire

$$\boldsymbol{\chi} \equiv x_1 \mathbf{r}_1' + x_2 \mathbf{r}_2' + x_3 \mathbf{r}_3' \ , \tag{5}$$

dont nous allons voir la signification dans un instant.

4. — Il est évident qu'après introduction de « l'idemfacteur I », somme des trois produits indéterminés $\mathbf{r}_k \mathbf{r}_k'$, la première dyadique peut s'écrire :

$$\Phi = \mathrm{I} - \mathbf{r}\boldsymbol{\chi} \ . \tag{6}$$

Pour les doubles produits scalaire et vectoriel de cette dyadique[1], on obtient

$$\Phi^2 \equiv \Phi : \Phi = 1 + \boldsymbol{\chi}.\boldsymbol{\chi} \tag{7}$$

$$2\Phi_2 \equiv \Phi \overset{\times}{\times} \Phi = 2\boldsymbol{\chi}\mathbf{r} \tag{8}$$

$$\Phi_2^2 \equiv \Phi_2 : \Phi_2 = \boldsymbol{\chi}.\boldsymbol{\chi} \tag{9}$$

---

[1] Les doubles produits scalaire et vectoriel (voir J. Guiot : *Le Calcul vectoriel et ses applications à la Géométrie réglée,* Paris, 1912) correspond au « double dot product » et « double cross product » de Gibbs-Wilson (p. 306-315). Le double produit scalaire de Φ par Φ, *pour lequel nous nous permettons d'écrire ici par abréviation* Φ^2 est :

$$\begin{aligned}\Phi^2 \equiv \Phi : \Phi = (\mathrm{I} - \mathbf{r}\boldsymbol{\chi}) : (\mathrm{I} - \mathbf{r}\boldsymbol{\chi}) &\equiv \mathrm{I} : \mathrm{I} - 2\mathbf{r}\boldsymbol{\chi} : \mathrm{I} + \boldsymbol{\chi}.\boldsymbol{\chi} \\ &\equiv 3 - 2\mathbf{r}.\boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\chi}.\boldsymbol{\chi} = 1 + \boldsymbol{\chi}.\boldsymbol{\chi} \ .\end{aligned}$$

La moitié du double produit vectoriel de Φ et Φ, que Gibbs-Wilson appelle le « *second* » de Φ est, si $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$ sont trois vecteurs-unités trirectangulaires et ξ_1, ξ_2, ξ_3 les grandeurs des composantes de $\boldsymbol{\chi}$ selon ces axes :

$$\begin{aligned}\Phi_2 \equiv (\mathrm{I} - \mathbf{r}\boldsymbol{\chi})_2 \equiv \mathrm{I} - \mathbf{r}\boldsymbol{\chi} \overset{\times}{\times} \mathrm{I} \equiv \mathrm{I} - (\xi_1 \mathbf{rr} + \xi_2 \mathbf{rs} + \xi_3 \mathbf{rt}) \overset{\times}{\times} (\mathbf{rr} + \mathbf{ss} + \mathbf{tt}) = \\ \equiv \mathrm{I} - \xi_1 \mathrm{I} + (\xi_1 \mathbf{r} + \xi_2 \mathbf{s} + \xi_3 \mathbf{t})\mathbf{r} = \boldsymbol{\chi}\mathbf{r}\end{aligned}$$

vu que ξ_1, la grandeur de la protection de $\boldsymbol{\chi}$ sur $\mathbf{r}$, est égale à l'unité à cause de la relation (4).

et si l'on tient compte de la relation (4), on voit facilement que

$$\mathfrak{x}.\Phi \qquad \text{ou} \qquad m\mathfrak{x}.\Psi$$

est *nul*. Ceci nous montre que le vecteur auxiliaire que nous venons d'introduire est perpendiculaire aux « antécédents » $\mathfrak{a}_k$ de la dyadique *planaire* Ψ ou encore que $\mathfrak{x}$ *est normal au plan des projections*.

5. — Après avoir trouvé le vecteur $\mathfrak{r}$, qui indique la direction de la projection, occupons-nous maintenant du coefficient m. Or, les équations (7) et (9) nous apprennent que

$$\Phi^2 - \Phi_2^2 \qquad \text{ou} \qquad m^2\Psi^2 - m^4\Psi_2^2$$

est égal à l'unité. Nous possédons donc une équation quadratique en m^2, qui nous donne

$$m^2 = \frac{\Psi^2 + \varepsilon\sqrt{\Psi^4 - 4\Psi_2^2}}{2\Psi_2^2} \equiv \frac{2}{\Psi^2 - \varepsilon\sqrt{\Psi^4 - 4\Psi_2^2}}, \tag{10}$$

où ε est l'unité positive ou négative. Ces deux valeurs sont réelles; en effet, si nous transformons la dyadique Ψ, en introduisant au lieu des « conséquents » $\mathfrak{r}'_k$ trois vecteurs-unités *trirectangulaires* $\mathfrak{i}_k$, nous aurons

$$\Psi \equiv \mathfrak{a}_1\mathfrak{r}'_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{r}'_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{r}'_3 = \mathfrak{b}_1\mathfrak{i}_1 + \mathfrak{b}_2\mathfrak{i}_2 + \mathfrak{b}_3\mathfrak{i}_3, \tag{11}$$

où les nouveaux « antécédents » $\mathfrak{b}_k$ sont évidemment coplanaires et contenus dans le plan des $\mathfrak{a}_k$. Si les angles de ces antécédents de somme 2π sont β_k, nous aurons par conséquent :

$$\begin{aligned}\Psi^4 - 4\Psi_2^2 &= (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^2 - 4(b_2^2b_3^2\sin^2\beta_1 + b_3^2b_1^2\sin^2\beta_2 + b_1^2b_2^2\sin^2\beta_3)\\ &= b_1^4 + b_2^4 + b_3^2 + 2b_2^2b_3^2\cos 2\beta_1 + 2b_3^2b_1^2\cos 2\beta_2 + 2b_1^2b_2^2\cos 2\beta_3\\ &= (b_1^2\mathfrak{l}_1 + b_2^2\mathfrak{l}_2 + b_3^2\mathfrak{l}_3)^2\end{aligned}$$

pourvu que les $\mathfrak{l}_k$ soient des vecteurs-unités coplanaires, faisant des angles $2\beta_k$. Le dernier membre étant positif, les valeurs (10) trouvées pour m^2 sont réelles.

6. — Nous arrivons maintenant, après avoir déterminé la

direction de la projection $\mathfrak{r}$ et le coefficient de proportionnalité m, au vecteur $\mathfrak{x}$, *normal au plan des projections* $\mathfrak{a}_k$. *Soit* $\mathfrak{c}$ *un vecteur-unité quelconque dans le plan des* $\mathfrak{a}_k$; dans ce cas *son produit scalaire par* $\mathfrak{x}$ *est nul* et on aura [1]:

$$(12) \qquad \mathfrak{c}.(\Phi.\Phi_c.\Phi - \Phi) \quad \text{ou} \quad m\mathfrak{c}.(m^2\Psi.\Psi_c.\Psi - \Psi)$$
$$= \mathfrak{x}.\mathfrak{x} \;\; \mathfrak{c}.\mathfrak{r} \;\; (\mathfrak{r} - \mathfrak{x}) \, .$$

On connaîtra par conséquent en direction *et en grandeur* $\mathfrak{r} - \mathfrak{x}$, donc aussi $\mathfrak{x}$, vu que $\mathfrak{r}$ est déjà connu, *lorsqu'on aura trouvé les deux produits scalaires* $\mathfrak{x}.\mathfrak{x}$ *et* $\mathfrak{r}.\mathfrak{r}$ *du second membre*. Le premier membre en effet dans sa seconde forme est un vecteur connu, dès qu'on aura choisi le vecteur-unité $\mathfrak{c}$ dans le plan des $\mathfrak{a}_k$. Pour arriver aux produits scalaires, nous prenons d'abord la racine positive [2]:

$$\sqrt{(\mathfrak{c}.\Phi)^2 - 1} \quad \text{ou} \quad \sqrt{m^2(\mathfrak{c}.\Psi)^2 - 1}$$
$$= |\mathfrak{x}| \; |\mathfrak{c}.\mathfrak{r}| \, .$$

Ensuite nous nous servons d'un résultat déjà trouvé plus haut au paragraphe 4, résultat qui donne la racine positive:

$$\sqrt{\Phi_2^2} \quad \text{ou} \quad m^2\sqrt{\Psi_2^2}$$
$$= |\mathfrak{x}| \, .$$

La substitution du produit des deux dernières équations dans (12) donne, vu que

$$\mathfrak{c}.\mathfrak{r} = \operatorname{sig}(\mathfrak{c}.\mathfrak{r}) \; |\mathfrak{c}.\mathfrak{r}|$$

---

[1] Dans cette expression, Φ_c est la dyadique conjuguée $I - \mathfrak{x}\mathfrak{r}$; on aura donc en se rappelant que $\mathfrak{c}.\mathfrak{x} = 0$ et $\mathfrak{r}.\mathfrak{x} = 1$:

$$\mathfrak{c}.(\Phi.\Phi_c.\Phi - \Phi) \equiv \mathfrak{c}.(I - \mathfrak{r}\mathfrak{x}).(I - \mathfrak{x}\mathfrak{r}).(I - \mathfrak{r}\mathfrak{x}) - \mathfrak{c}.(I - \mathfrak{r}\mathfrak{x})$$
$$= \mathfrak{c}.(-\mathfrak{x}\mathfrak{r} + \mathfrak{x}\mathfrak{x} + \mathfrak{r}\mathfrak{r}\,\mathfrak{x}.\mathfrak{x} - \mathfrak{r}\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}.\mathfrak{x}) = \mathfrak{c}.\mathfrak{r}\;\;\mathfrak{x}.\mathfrak{x}\;\;(\mathfrak{r} - \mathfrak{x}) \, .$$

[2] On a évidemment

$$\sqrt{(\mathfrak{c}.\Phi)^2 - 1} = \sqrt{(\mathfrak{c} - \mathfrak{c}.\mathfrak{r}\;\mathfrak{x})^2 - 1} = \sqrt{(\mathfrak{c}.\mathfrak{r})^2\;\mathfrak{x}.\mathfrak{x}} = |\mathfrak{x}| \; |\mathfrak{c}.\mathfrak{r}| \, ,$$

vu que $\mathfrak{c}$ est un vecteur-*unité*, dont le produit scalaire par $\mathfrak{x}$ est nul.

pour le vecteur normal au plan des projections l'expression :

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{r} - \frac{\operatorname{sig}(\mathfrak{c}.\mathfrak{r})\,\mathfrak{c}.(m^2\Psi.\Psi_c - \mathrm{I})\,\Psi}{m\sqrt{\Psi_2^2[m^2(\mathfrak{c}.\Psi)^2 - 1]}} \,. \tag{13}$$

7. — Il nous faudra examiner encore si l'expression sous le radical du dénominateur est positive. Le double produit scalaire Ψ_2^2 l'est certainement ; il suffira donc d'examiner

$$m^2(\mathfrak{c}.\Psi)^2 - 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{2(\mathfrak{c}.\Psi)^2 - \Psi^2 + \varepsilon\sqrt{\Psi^4 - 4\Psi_2^2}}{\Psi^2 - \varepsilon\sqrt{\Psi^4 - 4\Psi_2^2}} \,,$$

que nous avons transformé par l'introduction de la valeur (10) du paragraphe 5. Or le dénominateur ici est toujours positif, pour $\varepsilon = +1$ aussi bien que pour $\varepsilon = -1$, tandis que le numérateur

$$2\mathfrak{c}.\Psi.\Psi_c.\mathfrak{c} - \Psi^2 + \varepsilon\sqrt{\Psi^4 - 4\Psi_2^2} \quad \text{ou} \quad \mathfrak{c}.(2\Psi.\Psi_c - \Psi^2\mathrm{I}).\mathfrak{c} + \varepsilon\sqrt{\Psi^4 - 4\Psi_2^2}$$

par l'introduction d'un *vecteur auxiliaire*[1]

$$\mathfrak{c}.(2\Psi.\Psi_c - \Psi^2\mathrm{I}) \equiv \mathfrak{l} \qquad (l^2 = \Psi^4 - 4\Psi_2^2) \,. \tag{14}$$

peut prendre la forme

$$\mathfrak{l}.\mathfrak{c} + \varepsilon l \,.$$

Cette somme n'est positive que pour $\varepsilon = +1$, car la valeur absolue l est supérieure au premier terme, qui n'est que la projection de $\mathfrak{l}$ sur $\mathfrak{c}$. Nous arrivons donc à la conclusion, que $\mathfrak{x}$ n'est réel que lorsque $\varepsilon = +1$, c'est-à-dire lorsque

$$m^2 = \frac{2}{\Psi^2 - \sqrt{\Psi^4 - 4\Psi_2^2}} \equiv \frac{2}{\Psi^2 - l} \,. \tag{15}$$

8. — Une autre question qui se pose est celle-ci : le second terme dans l'expression (13) trouvée pour $\mathfrak{x}$ dépend-il ou ne dépend-il pas du vecteur-unité $\mathfrak{c}$?

---

[1] On démontre au § 14 que le carré du vecteur auxiliaire $\mathfrak{l}$ est en effet $\Psi^4 - 4\Psi_2^2$.

Introduisant successivement la valeur de m^2 d'après (10) et le vecteur auxiliaire $\mathfrak{l}$ nous pouvons l'écrire :

$$(16) \qquad \frac{\operatorname{sig}(\mathfrak{c}.\mathfrak{r})}{m\sqrt{\overline{\Psi_2^2}}} \cdot \frac{\mathfrak{c}(m^2\Psi.\Psi_c - \mathrm{I})\Psi}{\sqrt{m^2(\mathfrak{c}.\Psi)^2 - 1}} = \frac{\operatorname{sig}(\mathfrak{c}.\mathfrak{r})}{\sqrt{2\overline{\Psi_2^2}}} \cdot \frac{\mathfrak{c}.(2\Psi.\Psi_c - \Psi^2.\mathrm{I} + l\mathrm{I}).\Psi}{\sqrt{\mathfrak{c}.(2\Psi.\Psi_c - \Psi^2\mathrm{I}).\mathfrak{c} + l}}$$

$$= \frac{\operatorname{sig}(\mathfrak{c}.\mathfrak{r})}{\sqrt{2\overline{\Psi_2^2}}} \cdot \frac{(\mathfrak{l} + l\mathfrak{c}).\Psi}{\sqrt{\mathfrak{l}.\mathfrak{c} + l}} .$$

Or, les vecteurs $\mathfrak{l}$ et $l\mathfrak{c}$ ont la même grandeur l; leur somme est par conséquent un vecteur dirigé selon leur bissectrice et si nous nommons un vecteur-unité dans la direction de cette bissectrice $\mathfrak{l}'$, le numérateur peut s'écrire

$$\operatorname{sig}(\mathfrak{c}.\mathfrak{r}).2l\cos\frac{1}{2}(\mathfrak{c}, \mathfrak{l}) \ \mathfrak{l}'.\Psi$$

tandis que le dénominateur prend facilement la forme :

$$\sqrt{4l\overline{\Psi_2^2}.\cos\frac{1}{2}(\mathfrak{c}, \mathfrak{l})} .$$

C'est ainsi que nous sommes amenés à l'expression

$$(17) \qquad \operatorname{sig}(\mathfrak{c}.\mathfrak{r})\sqrt{\frac{l}{\overline{\Psi_2^2}}} \ \mathfrak{l}'.\Psi .$$

On démontre maintenant sans peine (voir § 15) qu'à toute rotation θ du vecteur $\mathfrak{c}$ dans le plan des $\mathfrak{a}_k$ correspond une rotation $-\theta$ du vecteur $\mathfrak{l}$ dans le même plan, ce qui nous fait conclure que *le vecteur-unité* $\mathfrak{l}'$, *selon leur bissectrice, ne change pas et est indépendant du vecteur* $\mathfrak{c}$. Quant au $\operatorname{sig}(\mathfrak{c}.\mathfrak{r})$, il est évident qu'il peut être aussi bien positif que négatif, vu que $\mathfrak{c}$ est un vecteur-unité tout à fait arbitraire dans le plan des $\mathfrak{a}_k$. La *direction* seule de $\mathfrak{x}$ nous intéresse et celle-ci ne change pas lorsque, multipliant par $\sqrt{\overline{\Psi_2^2}}$, nous écrivrons

$$(18) \qquad \mathfrak{x} = \sqrt{\overline{\Psi_2^2}} \ \mathfrak{r} \pm \sqrt{l} \ \mathfrak{l}'.\Psi .$$

9. — Nous avons donc fixé *par rapport au trièdre des* $\mathfrak{r}_k$ d'abord la direction de la projection par (3), et ensuite le

vecteur normal[1] au plan des projections par (18). L'équation (10) nous fait connaître le coefficient de proportionnalité. Les deux signes dans l'expression (18) nous démontrent que le problème admet en général deux solutions, et comme les deux vecteurs du second membre sont rectangulaires, vu que leur produit scalaire

$$\begin{aligned}\mathfrak{l}' . \Psi . \mathfrak{r} &\equiv \mathfrak{l}' . (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{r}_1' + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{r}_2' + \mathfrak{a}_3 \mathfrak{r}_3') . (\mu_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 \mathfrak{r}_3) \\ &\equiv \mathfrak{l}' . (\mu_1 \mathfrak{a}_1 + \mu_2 \mathfrak{a}_2 + \mu_3 \mathfrak{a}_3)\end{aligned}$$

est nul, *les deux* $\mathfrak{x}$ *sont symétriques par rapport au vecteur* $\mathfrak{r}$.

10. — Les deux solutions n'en forment qu'une, lorsque l est nul, c'est-à-dire lorsque

$$(20) \qquad \Psi^4 = 4\Psi_2^2 \qquad \text{ou} \qquad (\Psi : \Psi)^2 = (\Psi \overset{\times}{\times} \Psi) : (\Psi \overset{\times}{\times} \Psi) .$$

Dans ce cas, la direction de la projection $\mathfrak{r}$ coïncide avec celle de la normale $\mathfrak{x}$: la projection est *orthogonale.*

11. — La solution-limite se présente lorsque m^2 devient infini, c'est-à-dire (10) lorsque

$$(21) \qquad D^2 . \Psi_2^2 \equiv (a_2 a_3 \sin \alpha_1 \mathfrak{r}_1 + a_3 a_1 \sin \alpha_2 \mathfrak{r}_2 + a_1 a_2 \sin \alpha_3 \mathfrak{r}_3)^2$$

s'annule[2]. Ceci implique la disparition de chacun des trois termes :

$$a_2 a_3 \sin \alpha_1 \ , \qquad a_3 a_1 \sin \alpha_2 \ , \qquad a_1 a_2 \sin \alpha_3 \ ,$$

ce qui ne se réalise que lorsque les trois vecteurs $\mathfrak{a}_k$ sont portés par la même droite.

12. — Les expressions trouvées $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{x}$, l^2 et m^2 contiennent les constantes μ_k, les doubles produits scalaires $\Psi^2 \equiv \Psi : \Psi$

---

[1] Lorsqu'il s'agit d'exprimer $\mathfrak{x}$ en fonction des $\mathfrak{r}_k$, il suffira de multiplier par l'idemfacteur et d'écrire :

$$(19) \qquad \begin{aligned}\mathfrak{x} = \sqrt{\Psi_2^2}\,(\mu_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 \mathfrak{r}_3) \\ \pm \sqrt{l}\,(\mathfrak{l}' . \Psi . \mathfrak{r}_1' \ \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{l}' . \Psi . \mathfrak{r}_2' \ \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{l}' . \Psi . \mathfrak{r}_3' \ \mathfrak{r}_3) .\end{aligned}$$

[2] Le « second » Ψ_2 est

$$\mathfrak{n}(a_2 a_3 \sin \alpha_1 \ \mathfrak{r}_2' \times \mathfrak{r}_3' + a_3 a_1 \sin \alpha_2 \ \mathfrak{r}_3' \times \mathfrak{r}_1' + a_1 a_2 \sin \alpha_1 \ \mathfrak{r}_1' \times \mathfrak{r}_2')$$

ou $\frac{1}{D}\mathfrak{n}(a_2 a_3 \sin \alpha_1 \ \mathfrak{r}_1 + a_3 a_1 \sin \alpha_2 \ \mathfrak{r}_2 + a_1 a_2 \sin \alpha_3 \ \mathfrak{r}_3)$ lorsque $\mathfrak{n}$ est un vecteur-unité dans la direction commune des produits vectoriels $\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_3 \times \mathfrak{a}_1$, et $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$.

et $\Psi_2^2 \equiv \Psi_2 : \Psi_2$ et le vecteur-unité $\mathfrak{l}'$. Il est facile de les écrire en fonction des vecteurs donnés $\mathfrak{a}_k$, de leurs angles α_k, et des éléments du trièdre connu des $\mathfrak{r}_k$, qui sont les côtés γ_k et les angles extérieurs Γ_k du triangle sphérique correspondant.

a) Nous avons en effet pour le premier des doubles produits scalaires [1] :

$$D^2\Psi^2 \equiv D^2(\mathfrak{a}_1 . \mathfrak{a}_1 \, \mathfrak{r}_1 . \mathfrak{r}_1' + \mathfrak{a}_2 . \mathfrak{a}_2 \, \mathfrak{r}_2' . \mathfrak{r}_2' + \ldots 2\mathfrak{a}_2 . \mathfrak{a}_3 \, \mathfrak{r}_2' . \mathfrak{r}_3' + \ldots)$$
$$= a_1^2 \sin^2 \gamma_1 + a_2^2 \sin^2 \gamma_2 + a_3^2 \sin \gamma_3 + 2a_2 a_3 \cos \alpha_1 . \sin \gamma_2 \sin \gamma_3 \cos \Gamma_1 + . .) .$$

b) La valeur du second des produits scalaires a été trouvée par (21). Elle est :

$$D^2\Psi_2^2 = (a_2 a_3 \sin \alpha_1 \; \mathfrak{r}_1 + a_3 a_1 \sin \alpha_2 \; \mathfrak{r}_2 + a_1 a_2 \sin \alpha_3 \; \mathfrak{r}_3)^2$$
$$= a_2^2 a_3^2 \sin^2 \alpha_1 + a_3^2 a_1^2 \sin^2 \alpha_2 + a_1^2 a_2^2 \sin^2 \alpha_3 + 2a_1^2 a_2 a_3 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \cos \Gamma_1 + \ldots$$

c) On obtient pour les constantes μ_k en formant les produits *vectoriels* des $\mathfrak{a}_k$ par la somme des $\mu_k \mathfrak{a}_k$ qui est nulle, d'abord :

$$\frac{a_2 a_3 \sin \alpha_1}{\mu_1} = \frac{a_3 a_1 \sin \alpha_2}{\mu_2} = \frac{a_1 a_2 \sin \alpha_3}{\mu_3} \equiv \rho ,$$

et ensuite à cause de (21)

$$\rho^2 = \rho^2(\mu_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 \mathfrak{r}_3)^2 = (a_2 a_3 \sin \alpha_1 \mathfrak{r}_1 + a_3 a_1 \sin \alpha_2 \mathfrak{r}_2 + a_1 a_2 \sin \alpha_3 \mathfrak{r}_3)^2$$
$$= D^2 \Psi_2^2 .$$

Les trois constantes en question sont donc

$$(22) \qquad \mu_1 = \frac{a_2 a_3 \sin \alpha_1}{D\sqrt{\Psi_2^2}} , \quad \mu_2 = \frac{a_3 a_1 \sin \alpha_2}{D\sqrt{\Psi_2^2}} , \quad \mu_3 = \frac{a_1 a_2 \sin \alpha_3}{D\sqrt{\Psi_2^2}} .$$

---

[1] Les expressions trouvées pour Ψ^2 et Ψ_2^2 peuvent être simplifiées par l'introduction des formes quadratiques

$$\omega(x_1 x_2 x_3) \equiv \omega_{11} x_1^2 + \omega_{22} x_2^2 + \omega_{33} x_3^2 + 2\omega_{12} x_1 x_2 + 2\omega_{23} x_2 x_3 + 2\omega_{31} x_3 x_1 ,$$

et $\Omega(u_1 u_2 u_3) \equiv \Omega_{11} u_1^2 + \Omega_{22} u_2^2 + \ldots 2\Omega_{23} u_2 u_3 + \ldots$ où $\omega_{ik} \equiv \cos \gamma_{ik}$ et $\Omega_{ki} \equiv \sin \gamma_i \sin \gamma_k \cos \Gamma_{ik}$ (voir M. Fr. Daniëls, *Essai de Géométrie sphérique en coordonnées projectives*, Fribourg, Suisse, 1907).

d) La seconde partie de $\mathfrak{x}$ possède dans la direction $\mathfrak{r}_1$ une composante, dont la grandeur se trouve d'après (19, 17, 16) facilement :

$$(23) \qquad \sqrt{I} \,.\, \mathfrak{l}' \,.\, \Psi \,.\, \mathfrak{r}'_1 \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{c}.(m^2\Psi.\Psi_c - \mathrm{I}).\Psi\ \mathfrak{r}'_1 / m\sqrt{m^2(\mathfrak{c}.\Psi)^2 - 1}\ ,$$

où $\mathfrak{c}$ est un vecteur-unité dans le plan des $\mathfrak{a}_k$, *pour lequel nous voulons prendre un vecteur-unité dans la direction* $\mathfrak{a}_1$. La substitution ne présente aucune difficulté, mais elle conduit à des résultats plutôt longs, qui font bien apprécier l'extrême concision résultant de l'emploi des dyadiques. Nous trouvons pour les différentes parties dont se compose notre expression (23), si nous posons par abréviation $\sin\gamma_k \equiv s_k$, $\cos\gamma_k \equiv c_k$ et $\cos\Gamma_k \equiv \mathrm{C}_k$, successivement

$$\begin{aligned}
\mathfrak{c}.\Psi &= a_1\mathfrak{r}'_1 + a_2 \cos\alpha_3\mathfrak{r}'_2 + a_3 \cos\alpha_2\mathfrak{r}'_3 \\
\mathfrak{c}.\Psi.\Psi_c &= (a_1\mathfrak{r}'_1 + a_2 \cos\alpha_3\mathfrak{r}'_2 + a_3 \cos\alpha_2\mathfrak{r}'_3).(\mathfrak{r}'_1\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{r}'_2\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{r}'_3\mathfrak{a}_3) \\
\mathrm{D}^2\mathfrak{c}.\Psi.\Psi_c &= (a_1 s_1^2 + a_2 \cos\alpha_3 . s_2 s_1 \mathrm{C}_3 + a_3 \cos\alpha_2 . s_3 s_1 \mathrm{C}_2)\mathfrak{a}_1 + \ldots \\
&\equiv m_1\mathfrak{a}_1 + m_2\mathfrak{a}_2 + m_3\mathfrak{a}_3 \\
\mathrm{D}^2\Psi.\mathfrak{r}'_1 &= s_1^2\mathfrak{a}_1 + s_2 s_1 \mathrm{C}_3\mathfrak{a}_2 + s_3 s_1 \mathrm{C}_2\mathfrak{a}_3 \equiv n\mathfrak{a}_1 + n_2\mathfrak{a}_2 + n_3\mathfrak{a}_3 \\
\mathrm{D}^4\mathfrak{c}.\Psi.\Psi_c.\Psi.\mathfrak{r}'_1 &= m_1 n_1 a_1^2 + m_2 n_2 a_2^2 + m_3 n_3 a_3^2 + (m_1 n_2 + m_2 n_1) a_1 a_2 \cos\alpha_3 + \ldots \\
\mathrm{D}^2(\mathfrak{c}.\Psi)^2 &= a_1^2 s_1^2 + a_2^2 \cos^2\alpha_3 . s_2^2 + a_3^2 \cos^2\alpha_2\ s_3^2 + 2a_1 a_2 \cos\alpha_3 . s_1 s_2 \mathrm{C}_3 + \ldots \\
\mathrm{D}^2\mathfrak{c}.\Psi.\mathfrak{r}'_1 &= a_1 s_1^2 + a_2 \cos\alpha_3 . s_2 s_1 \mathrm{C}_3 + a_3 \cos\alpha_2 . s_3 s_1 \mathrm{C}_2\ .
\end{aligned}$$

13. — Les formules précédentes se simplifient beaucoup, lorsque les $\mathfrak{r}_k$ forment un trièdre *trirectangulaire*, comme c'est le cas dans le *théorème de Pohlke*. Nous avons alors en effet :

$$\mathrm{D} = 1 \ ; \qquad s_k = 1 \ ; \qquad c_k = 0 \ ; \qquad \mathrm{C}_k = 0$$

$$\Psi^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ ; \quad \Psi_2^2 = a_2^2 a_3^2 \sin^2\alpha_1 + a_3^2 a_1^2 \sin^2\alpha_2 + a_1^2 a_1^2 \sin^2\alpha_3\ , \quad \text{etc.}$$

Nous revenons sur ce cas dans la seconde partie de notre travail.

14. — Il nous reste encore à démontrer que le carré du vecteur auxiliaire $2\mathfrak{c}.\Psi.\Psi_c - \Psi^2\mathfrak{c}$ introduit au paragraphe 7 est bien $\Psi^4 - 4\Psi_2^2$, autrement dit, qu'un vecteur-unité $\mathfrak{c}$

situé dans le plan des antécédents de la dyadique planaire Ψ satisfait à l'équation :

$$\mathfrak{c}.\Psi.\Psi_c.\Psi.\Psi_c.\mathfrak{c} - \Psi^2\mathfrak{c}.\Psi.\Psi_c.\mathfrak{c} + \Psi_2^2 \equiv \mathfrak{c}.(\Psi.\Psi_c.\Psi.\Psi_c - \Psi^2\Psi.\Psi_c + \Psi_2^2 I).\mathfrak{c} = 0 \ .$$

Nous formulons à ce propos un théorème plus général :

Si Ψ est une dyadique planaire de la forme

$$\Psi \equiv \mathfrak{a}_1\mathfrak{r}_1' + \mathfrak{a}_2\mathfrak{r}_2' + \mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_3' \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{b}_1\mathfrak{i}_1 + \mathfrak{b}_2\mathfrak{i}_2 + \mathfrak{b}_3\mathfrak{i}_3$$

on aura toujours

$$\mathfrak{A}.(\Psi.\Psi_c.\Psi.\Psi_c - \Psi^2\Psi.\Psi_c + \Psi_2^2 I).\mathfrak{B} = 0 \tag{24}$$

pourvu qu'un des vecteurs $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ au moins soit dans le plan des « antécédents » coplanaires.

Voici une esquisse de la démonstration. Appelons Ω la dyadique entre parenthèses (24) et cherchons d'abord en nous servant de la seconde forme pour Ψ, la direction de $\mathfrak{b}_2$ étant supposée différente de celle de $\mathfrak{b}_1$, les vecteurs

$$\Omega.\mathfrak{b}_1 \ , \qquad \Omega.\mathfrak{b}_2 \ , \qquad \Omega.\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2 = \Psi_2^2\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2 \ .$$

Multiplions-les scalairement une première fois par $\mathfrak{b}_1$, une seconde fois par $\mathfrak{b}_2$. Les six produits obtenus seront tous nuls. Nous en concluons que

$$(u_1\mathfrak{b}_1 + u_2\mathfrak{b}_2 + u_3\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2).\Omega.(v_1\mathfrak{b}_1 + v_2\mathfrak{b}_2 + v_3\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2) = u_3v_3.\Psi_2^2.(\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2)^2 \ .$$

Or ceci ne disparaît que lorsqu'un des coefficients u_3 ou v_3 est égal à zéro, c'est-à-dire lorsqu'un des vecteurs terminaux au moins est dans le plan des « antécédents » coplanaires $\mathfrak{b}_k$. c. f. d.

15. — En dernier lieu il nous faudra montrer (§ 8) qu'une rotation θ du vecteur $\mathfrak{c}$ dans le plan des « antécédents » $\mathfrak{a}_k$ ou $\mathfrak{b}_k$ produit une rotation $-\theta$ dans le même plan du vecteur-auxiliaire :

$$\mathfrak{f} \equiv \mathfrak{c}.(2\Psi.\Psi_c - \Psi^2 I) \equiv \mathfrak{c}.\Sigma \ . \tag{25}$$

La dyadique Σ que nous venons d'introduire n'est pas seulement *planaire*[1] et *auto-conjuguée,* elle satisfait[2] encore à $\mathfrak{i}.\Sigma.\mathfrak{i} + \mathfrak{j}.\Sigma.\mathfrak{j} = 0$, si $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{j}$ sont deux vecteurs-unités rectangulaires dans le plan de $\mathfrak{B}_k$. Ces trois propriétés nous permettent de dire que dans la dyadique écrite comme *nonion,* les neuf coefficients étant $c_{ik}(i, k = 1, 2, 3)$ nous avons d'abord $c_{13} = c_{23} = c_{33} = 0$, ensuite $c_{12} = c_{21}$ et enfin $c_{11} + c_{22} = 0$, donc

$$\Sigma = c_{11}(\mathfrak{i}\mathfrak{i} - \mathfrak{j}\mathfrak{j}) + c_{12}(\mathfrak{i}\mathfrak{j} + \mathfrak{j}\mathfrak{i}) \; . \tag{26}$$

D'autre part, les dyadiques conjuguées qui, employées comme « préfacteurs », produisent les rotations θ et $-\theta$ dans le plan des $\mathfrak{B}_k$ sont[3] :

$$\Delta \equiv \cos\theta\, \mathrm{I} + \sin\theta(\mathfrak{j}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{j}) \quad \text{et} \quad \Delta_c = \cos\theta\, \mathrm{I} - \sin\theta(\mathfrak{j}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{j}) \; . \tag{27}$$

En les multipliant par Σ nous trouvons sans peine

$$\Sigma.\Delta = \Delta_c.\Sigma \; . \tag{28}$$

Si donc nous appelons $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{l}$ les vecteurs en question *avant* et $\Delta.\mathfrak{c}$ et $\bar{\mathfrak{l}}$ *après* la rotation, nous aurons, conformément à la définition (25) de $\mathfrak{l}$ et à cause de l'égalité (28) :

$$\bar{\mathfrak{l}} = (\Delta.\mathfrak{c}).\Sigma = \mathfrak{c}.\Delta_c.\Sigma = (\mathfrak{c}.\Sigma).\Delta = \mathfrak{l}.\Delta = \Delta_c.\mathfrak{l}$$

ce qui nous prouve que le nouveau vecteur $\bar{\mathfrak{l}}$ est obtenu par une rotation $-\theta$ du vecteur $\mathfrak{l}$. q. e. d.

---

[1] Comme Σ n'opère que sur des vecteurs dans le plan des $\mathfrak{B}_k$, nous pouvons remplacer l'idemfacteur par $\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j}$.

[2] On a en effet

$$\mathfrak{i}.\Sigma.\mathfrak{i} + \mathfrak{j}.\Sigma.\mathfrak{j} = 2(\mathfrak{B}_1.\mathfrak{i})^2 + 2(\mathfrak{B}_2.\mathfrak{i})^2 + 2(\mathfrak{B}_3.\mathfrak{i})^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2$$
$$+ 2(\mathfrak{B}_1.\mathfrak{j})^2 + 2(\mathfrak{B}_2.\mathfrak{j})^2 + 2(\mathfrak{B}_3.\mathfrak{j})^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 = 0 \; .$$

[3] On a en effet

$$\Delta.(z_1\mathfrak{i} + z_2\mathfrak{j}) = z_1\Delta.\mathfrak{i} + z_2\Delta.\mathfrak{j} = z_1(\mathfrak{i}\cos\theta + \mathfrak{j}\sin\theta) + z_2(-\mathfrak{i}\sin\theta + \mathfrak{j}\cos\theta)$$
$$\equiv z_1\mathfrak{i}' + z_2\mathfrak{j}' \; ,$$

les vecteurs-unités $\mathfrak{i}'$ et $\mathfrak{j}'$ faisant un angle θ avec $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{j}$.

II

1. — Théorème de Pohlke. — *Trois vecteurs-unités trirectangulaires peuvent toujours, par une projection parallèle, donner trois vecteurs coplanaires formant une figure semblable à celle de trois vecteurs coplanaires connus* $(O'A_k) = \mathfrak{a}_k$, *pourvu que parmi les quatre points* O', A_1, A_2, A_3 *il n'y en ait pas plus de trois en ligne droite.*

Les vecteurs-unités trirectangulaires $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{i}_2$, $\mathfrak{i}_3$ donneront, la projection se faisant parallèlement au vecteur-unité $\mathfrak{r}$ par des droites de longueurs x_1, x_2, x_3, des vecteurs proportionnels aux $\mathfrak{a}_k$ (voir fig. 3), lorsque les douze composantes de $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{i}_2$, $\mathfrak{i}_3$ et $\mathfrak{r}$, les trois scalaires x_1, x_2, x_3 et le facteur de proportionnalité m satisfont à :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llll} \mathfrak{i}_1 - x_1\mathfrak{r} = m\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{i}_2 . \mathfrak{i}_3 = 0 & \mathfrak{i}_1 . \mathfrak{i}_1 = 1 & \\ \mathfrak{i}_2 - x_2\mathfrak{r} = m\mathfrak{a}_2 & \mathfrak{i}_3 . \mathfrak{i}_1 = 0 & \mathfrak{i}_2 . \mathfrak{i}_2 = 1 & \mathfrak{r}.\mathfrak{r} = 1 \ , \\ \mathfrak{i}_3 - x_3\mathfrak{r} = m\mathfrak{a}_3 & \mathfrak{i}_1 . \mathfrak{i}_2 = 0 & \mathfrak{i}_3 \, \mathfrak{i}_3 = 1 & \end{array}\right.$$

c'est-à-dire à un système de *seize* équations scalaires. Nous déterminons successivement le vecteur $\mathfrak{r}$ en fonction des $\mathfrak{i}_k$, le coefficient de proportionnalité m et les trois scalaires x_k.

2. — Les vecteurs donnés $\mathfrak{a}_k$ étant *coplanaires*, il existe des nombres μ_k tels que

$$(2)\quad \mu_1\mathfrak{a}_1 + \mu_2\mathfrak{a}_2 + \mu_3\mathfrak{a}_3 = 0 \quad \text{et} \quad (3)\quad \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = 1 \ ,$$

et si nous multiplions les équations (1) par les μ_k, nous obtiendrons par conséquent en ajoutant :

$$\mu_1\mathfrak{i}_1 + \mu_2\mathfrak{i}_2 + \mu_3\mathfrak{i}_3 = (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3)\mathfrak{r} \ .$$

Le premier membre de cette équation est un vecteur-unité à cause de (3) ; $\mathfrak{r}$ est également un vecteur-unité. Il en résulte donc d'abord

$$(4)\qquad \mathfrak{r} = \mu_1\mathfrak{i}_1 + \mu_2\mathfrak{i}_2 + \mu_3\mathfrak{i}_3$$

et ensuite, si les x_k sont considérés comme longueurs des composantes d'un vecteur auxiliaire $\mathfrak{x}$ selon les $\mathfrak{i}_k$

$$(5)\qquad \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 \equiv \mathfrak{r}\,\mathfrak{x} = 1 \ .$$

L'équation (4) nous fait connaître la position du *vecteur* $\mathfrak{r}$, *qui détermine la direction de la projection par rapport au trièdre des* $\mathfrak{i}_k$, dès que les constantes μ_k ou leurs rapports sont connus.

3. — Or, en multipliant l'équation (2) *vectoriellement*[1] par les $\mathfrak{a}_k$, nous obtenons, si les angles des $\mathfrak{a}_k$ sont α_k :

$$(6) \qquad \frac{a_2 a_3 \sin \alpha_1}{\mu_1} = \frac{a_3 a_1 \sin \alpha_2}{\mu_2} = \frac{a_1 a_2 \sin \alpha_3}{\mu_3} \equiv \rho$$

et ensuite, si σ est l'aire du triangle, qui d'après (2) peut être construit sur les $\mu_k \mathfrak{a}_k$ comme côtés :

$$(7) \qquad \rho^2 = a_2^2 a_3^2 \sin^2 \alpha_1 + a_3^2 a_1^2 \sin^2 \alpha_2 + a_1^2 a_2^2 \sin^2 \alpha_3 = 4\sigma^2/\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2\ ^2 .$$

4. — Le vecteur auxiliaire $\mathfrak{x}$ a une signification bien simple. En effet, les produits scalaires $\mathfrak{x} \cdot \mu_k \mathfrak{a}_k = \mathfrak{x} \cdot (\mathfrak{i}_k - x_k \mathfrak{r}) = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{i}_k - x_k$ étant nuls, *il est normal au plan des trois projections* $m\mathfrak{a}_k$.

5. — Nous connaissons maintenant le vecteur $\mathfrak{r}$, qui détermine la direction de la projection par (4). Pour trouver le facteur de proportionnalité m, prenons la somme des carrés des équations (1) et la somme des carrés des produits vectoriels formés avec ces équations deux à deux[3] ; nous obtien-

---

[1] Le produit vectoriel de (2) par $\mathfrak{a}_1$ donne

$$\mu_2 \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 - \mu_3 \mathfrak{a}_3 \times \mathfrak{a}_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mu_2 a_1 a_2 \sin \alpha_3 = \mu_3 a_3 a_1 \sin \alpha_2 \qquad \text{etc.}$$

[2] L'aire σ du triangle des $\mu_k \mathfrak{a}_k$ satisfait à

$$2\sigma = \mu_2 a_2 . \mu_3 a_3 \sin \alpha_1 = \mu_3 a_3 . \mu_1 a_1 \sin \alpha_2 = \mu_1 a_1 . \mu_2 a_2 \sin \alpha_3$$

donc aussi à

$$4\sigma^2 = 4\sigma^2(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2) = \mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2(a_2^2 a_3^2 \sin^2 \alpha_1 + a_3^2 a_1^2 \sin^2 \alpha_2 + a_1^2 a_2^2 \sin^2 \alpha_3) .$$

[3] Les premiers membres des deux dernières équations (1) sont :

$$\mathfrak{i}_2 - x_2 \mathfrak{r} = \mathfrak{i}_2 - x_2(\mu_1 \mathfrak{i}_1 + \mu_2 \mathfrak{i}_2 + \mu_3 \mathfrak{i}_3) \equiv - \mu_1 x_2 \mathfrak{i}_1 + (1 - \mu_2 x_2)\mathfrak{i}_2 - \mu_3 x_2 \mathfrak{i}_3$$
$$\mathfrak{i}_3 - x_3 \mathfrak{r} = \mathfrak{i}_3 - x_3(\mu_1 \mathfrak{i}_1 + \mu_2 \mathfrak{i}_2 + \mu_3 \mathfrak{i}_3) \equiv - \mu_1 x_3 \mathfrak{i}_1 - \mu_2 x_3 \mathfrak{i}_2 + (1 - \mu_3 x_3)\mathfrak{i}_3$$

On trouve pour leur produit vectoriel en tenant compte de (5) $\mu_1(x_1 \mathfrak{i}_1 + x_2 \mathfrak{i}_2 + x_3 \mathfrak{i}_3)$ et pour son carré $\mu_1^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, etc. Le produit vectoriel des seconds membres correspondants est $m^2 \mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_3$ et son carré $m^4 a_2^2 a_3^2 \sin^2 \alpha_1$, etc.

drons les relations :

$$(8) \qquad 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = m^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \equiv m^2 s$$

$$(9) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = m^4(a_2^2 a_3^2 \sin^2 \alpha_1 + a_3^2 a_1^2 \sin^2 \alpha_2 + \ldots)$$

$$\equiv 4m^4\sigma^2/\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2$$

qu'il nous est facile de simplifier. En effet, si $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$ sont trois vecteurs-unités coplanaires faisant des angles $2\alpha_k$ et

$$(10) \qquad \mathfrak{l} \equiv a_1^2\mathfrak{l}_1 + a_2^2\mathfrak{l}_2 + a_3^2\mathfrak{l}_3$$

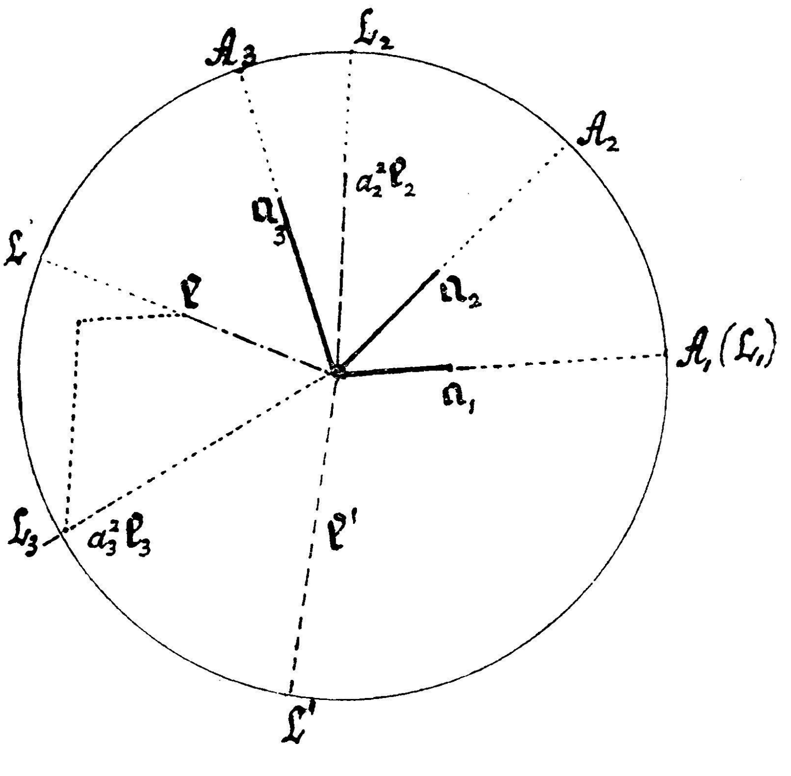

Fig. 2.

un nouveau vecteur auxiliaire de longueur l, nous aurons d'abord évidemment [1] :

$$(11) \qquad l < a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \equiv s$$

et ensuite au lieu des deux équations précédentes [2] :

$$(12) \qquad 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = m^2 s \quad \text{et} \quad 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = m^4(s^2 - l^2) .$$

[1] On a seulement $l = s$ dans le cas où les quatre points O, A_1, A_2, A_3 sont en ligne droite.

[2] La différence $s^2 - l^2$ est égale (d'après 11, 10 et 7) à $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 - (a_1^4 + \ldots + 2a_2^2 a_3^2 \cos 2\alpha_1 + \ldots) \equiv 4(a_2^2 a_3^2 \sin^2 \alpha_1 + \ldots) = 16\sigma^2/\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2$.

Nous en tirons sans peine pour m^2 la valeur positive

$$m^2 = 2/s - l\ . \tag{13}$$

La seconde valeur de m^2 également positive ne conduit pas, comme il ressort du paragraphe suivant à des x_k réels. Pour la construction du vecteur auxiliaire $\mathfrak{l}$ comme somme des vecteurs $a_k^2 \mathfrak{l}_k$, nous renvoyons à la fig. 2, où nous avons fait coïncider $\mathfrak{l}_1$ avec $\mathfrak{a}_1$, la longueur de ce dernier vecteur étant prise comme unité. Pour obtenir $a_2^2 \mathfrak{l}_2$ et $a_3^2 \mathfrak{l}_3$, il s'agit de construire sur $\mathfrak{a}_2$ respectivement $\mathfrak{a}_3$ comme bases des triangles semblables à ceux qui ont $\mathfrak{a}_1$ comme base et $\mathfrak{a}_2$ respectivement $\mathfrak{a}_3$ comme seconds côtés.

6. — Pour obtenir la grandeur scalaire x_1, nous élevons au carré la première des équations (1)

$$x_1^2 - 2\mu_1 x_1 + 1 = m^2 a_1^2 \quad \text{ou} \quad (x_1 - \mu_1)^2 = m^2 a_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2\ .$$

Les racines de cette équation sont réelles, car si nous substituons pour m^2 la valeur (12) trouvée dans le paragraphe précédent :

$$m^2 = 2(s + l)/(s^2 - l^2) = 2\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + l)/16\sigma^2\ .$$

nous trouvons facilement, en introduisant de nouveau *le vecteur auxiliaire* $\mathfrak{l}$ *et les angles positifs qu'il fait avec les* $\mathfrak{l}_k$, *angles que nous nommons* $2\theta_k$

$$\begin{aligned} 16\sigma^2(x_1 - \mu_1)^2 &= 2\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2 . a_1^2 .(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + l) - 16\sigma^2 . \mu_2^2 - 16\sigma^2 . \mu_3^2 \\ &= 2\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2 . a_1^2 .(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + l) - 4\mu_3^2\mu_1^2 a_3^2 a_1^2 \sin^2 \alpha_2 . \mu_2^2 \\ &\qquad - 4\mu_1^2\mu_2^2 a_1^2 a_2^2 \sin^2 \alpha_3 . \mu_3^2 \\ &= 2\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2 . a_1^2 .(a_1^2 + a_2^2 \cos 2\alpha_3 + a_3^2 \cos 2\alpha_2 + l) \\ &= 2\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2 . a_1^2 .(l \cos 2\theta_1 + l) [1] \\ &= 4\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2 . a_1^2 . l \cos^2 \theta_1\ . \end{aligned}$$

---

[1] Le vecteur auxiliaire $\mathfrak{l}$ fait avec $\mathfrak{l}_1$ l'angle $2\theta_1$; nous avons donc d'une part $\mathfrak{l}.\mathfrak{l}_1 = l \cos 2\theta_1$; d'autre part, d'après (10) aussi

$$\mathfrak{l}.\mathfrak{l}_1 = (a_1^2\mathfrak{l}_1 + a_2^2\mathfrak{l}_2 + a_3^2\mathfrak{l}_3).\mathfrak{l}_1 = a_1^2 + a_2^2 \cos 2\alpha_3 + \alpha_3^2 \cos 2\alpha_2\ .$$

Il en résulte, si ε_k est l'unité positive ou négative, et si par abréviation nous posons :

$$(14) \qquad |\mu_1\mu_2\mu_3 . a_k . \cos\theta_k . \sqrt{l} : 2\sigma| \equiv \Delta_k$$

pour les valeurs des x_k, qui constituent (voir paragraphe 4) les grandeurs des composantes de la normale au plan des projections :

$$(15) \qquad x_k = \mu_k + \varepsilon_k \Delta_k$$

où seuls les ε_k sont inconnus. Or en utilisant successivement les relations (5), (3) et (14) nous trouvons d'une part :

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 - 1 = \mu_1(\mu_1 + \varepsilon_1\Delta_1) + \mu_2(\mu_2 + \varepsilon_2\Delta_2) + \mu_3(\mu_3 + \varepsilon_3\Delta_3) - 1$$

$$(16) \qquad = \mu_1\varepsilon_1\Delta_1 + \mu_2\varepsilon_2\Delta_2 + \mu_3\varepsilon_3\Delta_3 = 0$$

$$\text{ou} \qquad \mu_1\varepsilon_1|a_1\cos\theta_1| + \mu_2\varepsilon_2|a_2\cos\theta_2| + \mu_3\varepsilon_3|a_3\cos\theta_3| = 0 \; .$$

d'autre part si (fig. 2) L′ est le milieu de (LL_1) et $\mathfrak{l}'$ un vecteur-unité dans cette direction[1]

$$(17) \qquad \mathfrak{l}'.(\mu_1\mathfrak{a}_1 + \mu_2\mathfrak{a}_2 + \mu_3\mathfrak{a}_3) = \mu_1 a_1\cos\theta_1 + \mu_2 a_2\cos\theta_2 + \mu_3 a_3\cos\theta_3 = 0.$$

La comparaison de (16) et (17) nous apprend que les signes des ε_k doivent être tous égaux ou bien tous opposés à ceux des $a_k\cos\theta_k$. *Ces dernières grandeurs sont les projections des $\mathfrak{a}_k$ sur $\mathfrak{l}'$.*

7. — Nous possédons maintenant, les ε_k étant déterminés de cette manière, trois vecteurs

$$\mathfrak{i}_1 - (\mu_1 + \varepsilon_1\Delta_1)\mathfrak{r} \; , \qquad \mathfrak{i}_2 - (\mu_2 + \varepsilon_2\Delta_2)\mathfrak{r} \; , \qquad \mathfrak{i}_3 - (\mu_3 + \varepsilon_3\Delta_3)\mathfrak{r}$$

dont les *grandeurs*, d'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, sont *proportionnelles* à celles des $\mathfrak{a}_k$. Le coefficient de proportionnalité a été trouvé au paragraphe 5. Si nous ajoutons ces vecteurs, après les avoir multipliés par

---

[1] On a en effet

$$2\theta_3 \equiv (LL_3) = (LL_1) + (L_1L_2) + (L_2L_3)$$
$$= 2(L'A_1) + 2(A_1A_2) + 2(A_2A_3) = 2(L'A_3) \; ,$$

c'est-à-dire $(L'A_3) = \theta_3$, et de même $(L'A_2) = \theta_2$ et $(L'A_1) = \theta_1$.

les μ_k, ils donneront, absolument comme les $\mathfrak{a}_k$, une *somme*

$$-(\mu_1 \varepsilon_1 \Delta_1 + \mu_2 \varepsilon_2 \Delta_2 + \mu_3 \varepsilon_3 \Delta_3)\mathfrak{r}$$

nulle, à cause de l'équation (16), ce qui nous prouve : 1° qu'ils sont *coplanaires* et 2° qu'ils font bien, le triangle formé étant semblable à celui des $\mu_k \mathfrak{a}_k$, *entre eux aussi les angles* α_k.

8. — Il nous reste à dire un mot sur le vecteur *normal* au plan des projections. Ce vecteur est, d'après ce que nous avons vu au paragraphe 4 :

$$\mathfrak{x} = (\mu_1 + \varepsilon_1 \Delta_1)\mathfrak{i}_1 + (\mu_2 + \varepsilon_2 \Delta_2)\mathfrak{i}_2 + (\mu_3 + \varepsilon_3 \Delta_3)\mathfrak{i}_3 \, . \tag{18}$$

Les équations (6), (7) et (14) permettent de l'écrire :

$$\begin{aligned}(a_2 a_3 \sin \alpha_1 \pm a_1 \cos \theta_1 \sqrt{l})\mathfrak{i}_1 + (a_3 a_1 \sin \alpha_2 \pm a_2 \cos \theta_2 . \sqrt{l})\mathfrak{i}_2 \\ + (a_1 a_2 \sin \alpha_3 \pm a_3 \cos \theta_3 . \sqrt{l})\mathfrak{i}_3 \, .\end{aligned} \tag{19}$$

9. — Il y a donc en général deux solutions, et comme dans (18) les deux parties dont se compose le second membre

$$\mu_1 \mathfrak{i}_1 + \mu_2 \mathfrak{i}_2 + \mu_3 \mathfrak{i}_3 = \mathfrak{r} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_1 \Delta_1 \mathfrak{i}_1 + \varepsilon_2 \Delta_2 \mathfrak{i}_2 + \varepsilon_3 \Delta_3 \mathfrak{i}_3$$

sont des vecteurs normaux, vu que leur produit scalaire

$$\mu_1 \varepsilon_1 \Delta_1 + \mu_2 \varepsilon_2 \Delta_2 + \mu_3 \varepsilon_3 \Delta_3$$

est nul à cause de (16), les deux $\mathfrak{x}$ sont symétriques par rapport à $\mathfrak{r}$.

10. — Les deux solutions coïncident, lorsque (19)

$$l \equiv | a_1^2 \mathfrak{k}_1 + a_2^2 \mathfrak{k}_2 + a_3^2 \mathfrak{k}_3 |$$

est nul. Dans ce cas $\mathfrak{x}$ coïncide avec $\mathfrak{r}$: la projection est *orthogonale*.

11. — La construction des vecteurs $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{r}$ qui déterminent les plans de projection et la direction des droites projetantes par rapport au trièdre trirectangulaire des $\mathfrak{i}_k$ ne présente aucune difficulté. Tous les éléments essentiels de cette construction se trouvent dans la figure 2.

Fribourg (Suisse), octobre 1915.