Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1916)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THÉORÈME SUR LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE DE QUANTITÉS POSITIVES

Autor: Petrovitch, Michel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16876

où M et N sont deux constantes numériques ayant pour valeurs

$$M = 3e^{\frac{\pi}{3}} = 8{,}548\ 96 \ldots , \qquad N = 2 + e^{\pi} - 3e^{\frac{\pi}{3}} = 16{,}591\ 34 \ldots$$

Nous remarquerons en terminant que les formules (27) et (28) ne sont qu'un cas particulier d'un théorème général exprimant la relation entre la moyenne arithmétique d'un nombre quelconque de quantités positives, et une fonction symétrique arbitraire de ces quantités, qui sera exposé dans un autre Mémoire.

Glion s. Montreux, février 1916.

THÉORÈME SUR LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE DE QUANTITÉS POSITIVES

PAR

Michel PETROVITCH (Belgrade, Serbie).

---

1. — Soit $f(x)$ une fonction développable, au voisinage de $x = 0$, en série de puissances

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots , \tag{1}$$

chaque coefficient a_i étant réel et positif ou nul, les deux premiers coefficients a_0 et a_1 pouvant, d'ailleurs, avoir des valeurs réelles quelconques.

Soient $x_1, x_2, \ldots , x_n$ des quantités réelles et positives, dont la somme est plus petite que le rayon de convergence de la série (1).

Désignons par

$$\mu = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \qquad \text{et} \qquad M = \frac{f(x_1) + \ldots + (fx_n)}{n}$$

la moyenne arithmétique μ des quantités x_i et la moyenne arithmétique M des valeurs correspondantes de la fonction $f(x)$.

Je me propose d'exprimer M *en fonction de* μ *sous la forme d'un théorème de la moyenne.*

A cet effet j'envisage la fonction de n variables x_i

$$(2) \quad F(x_1, x_2, \dots x_n) = n^{p-1}(x_1^p + \dots + x_n^p) - (x_1 + \dots + x_n)^p$$

où p est un nombre réel quelconque, et je remarque que, comme on le voit facilement par des procédés ordinaires de la théorie des maxima et minima,

1° si $p > 1$ la fonction devient minimum pour

$$(3) \qquad x_1 = x_2 = \dots = x_n \ ;$$

ce minimum étant zéro, la fonction est positive pour tout autre ensemble de valeurs positives des x_i ;

2° si $p < 1$ la fonction devient maximum pour (3) ; ce maximum étant zéro, elle est négative pour tout autre ensemble de valeurs positives des x_i ;

3° si $p = 1$ la fonction se réduit identiquement à zéro.

On en conclut qu'en désignant par ρ la valeur du rapport

$$(4) \qquad \frac{(x_1 + \dots + x_n)^p}{x_1^p + \dots + x_n^p}$$

on aura

$$\rho \leqq n^{p-1} \qquad \text{pour} \qquad p > 1$$
$$\rho \geqq n^{p-1} \qquad \text{pour} \qquad p < 1$$
$$\rho = 1 \qquad \text{pour} \qquad p = 1$$

D'autre part, on a manifestement

$$\rho \geqq 1 \quad \text{pour} \quad p > 1 \ ; \qquad \rho \leqq 1 \quad \text{pour} \quad p < 1$$

l'égalité n'ayant lieu que lorsque les x_i sont négligeables par rapport à l'un d'eux.

Par suite : la valeur ρ est toujours comprise entre les limites 1 et n^{p-1} ; la première limite est atteinte lorsque, p étant quelconque, les x_i sont négligeables par rapport à l'un d'eux, ou bien lorsque, les x_i étant quelconques, on a $p = 1$; la seconde limite est atteinte lorsque les x_i deviennent égaux entre eux.

Ceci étant, on en tire pour $p = 2, 3, 4, \ldots$ la suite d'inégalités

$$a_p(x_1 + \ldots + x_n)^p \geqq a_p(x_1^p + \ldots + x_n^p) \tag{5}$$

$$a_p(x_1 + \ldots + x_n)^p \leqq \frac{a_p}{n}[(nx_1)^p + \ldots + (nx_n)^p] \tag{6}$$

qui se réduisent en égalités (identités) pour $p = 0$ et $p = 1$.

De (5) on tire

$$f(x_1 + \ldots + x_n) \geqq f(x_1) + \ldots + f(x_n) - (n-1)f(0)$$

et par suite

$$\mathrm{M} \leqq \frac{1}{n}[f(n\mu) + (n-1)f(0)] \ . \tag{7}$$

De (6) on tire, en remplaçant nx_i par x_i

$$a_p\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^p \leqq \frac{a_p}{n}(x_1^p + \ldots + x_n^p)$$

d'où

$$f(\mu) \leqq \frac{1}{n}[f(x_1) + \ldots + f(x_n)]$$

et par suite

$$f(\mu) \leqq \mathrm{M} \tag{8}$$

On arrive ainsi à la double inégalité

$$f(\mu) \leqq \mathrm{M} \leqq \frac{f(n\mu) + (n-1)f(0)}{n} \tag{9}$$

qui fournit les limites le plus resserrées possibles, comprenant la moyenne arithmétique M *exprimée en fonction de la moyenne arithmétique* μ.

D'après ce qui précède ces limites peuvent être atteintes pour une fonction $f(x)$ arbitraire.

La double inégalité (9) se laisse exprimer sous la forme du théorème de la moyenne suivant que nous avions en vue :

THÉORÈME : *les moyennes arithmétiques*

$$M = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

sont liées par une relation de la forme

$$M = \Phi(\mu) + \theta \Psi(\mu) , \tag{10}$$

où

$$\Phi(\mu) = f(\mu) , \tag{11}$$

$$\Psi(\mu) = \frac{f(n\mu) + (n-1) f(0)}{n} - f(\mu) \tag{12}$$

et où θ est un facteur toujours compris entre 0 *et* 1 ; *les limites $\theta = 0$ et $\theta = 1$ sont atteintes, la première lorsque tous les* x_i *sont égaux entre eux, la seconde lorsque tous les* x_i *deviennent négligeables par rapport à l'un d'eux.*

On peut aussi transformer la double inégalité (9) en égalité de la manière suivante : l'expression

$$\frac{1}{t}\left[f(t\mu) + (t-1) f(0)\right] \tag{13}$$

représente une fonction de t se réduisant au premier membre de (9) pour $t = 1$, au troisième membre de (9) pour $t = n$, et croissant constamment lorsque t croît de 1 à n ; par suite, et en remplaçant t par $\frac{1}{\xi}$, *on aura l'égalité*

$$M = \xi f\left(\frac{\mu}{\xi}\right) + (1 - \xi) f(0) , \tag{14}$$

où ξ est une quantité comprise entre $\frac{1}{n}$ et 1, ces limites pouvant être atteintes pour une fonction $f(x)$ arbitraire, la première lorsque tous les x_i sont négligeables par rapport à l'un d'eux et la seconde lorsqu'ils sont égaux entre eux.

La formule (14) fournit également la solution du problème inverse : *exprimer la moyenne arithmétique μ à l'aide de la moyenne arithmétique* M : on aura

$$\mu = \xi x$$

où x est l'une des racines positives de l'équation

$$f(x) = \frac{1}{\xi}\left[M - (1 - \xi) f(0)\right] .$$

La formule (10) ramène le même problème à la résolution de l'équation

$$\Phi(x) + \theta \Psi(x) = M ,$$

μ étant l'une des racines positives de cette équation en x.

Si dans (14) on change x_i en $n\xi x_i$ et si ensuite on pose $n\xi = \frac{1}{\zeta}$ on arrive à la formule

$$(15) \qquad f(x_1 + \dots + x_n) = \zeta \left[f\left(\frac{x_1}{\zeta}\right) + \dots + f\left(\frac{x_n}{\zeta}\right) \right] - (n\zeta - 1) f(0)$$

$$\frac{1}{n} \leq \zeta \leq 1$$

exprimant une sorte de théorème d'addition d'une fonction f(x) *de l'espèce considérée, sous la forme d'un théorème de la moyenne*. Les limites $\zeta = \frac{1}{n}$ et $\zeta = 1$ sont atteintes dans les cas indiqués précédemment. On peut donc affirmer que *la valeur de*

$$(16) \qquad f(x_1 + \dots + x_n)$$

est toujours comprise entre les valeurs des expressions

$$(17) \qquad [f(x_1) + \dots + f(x_n)] - (n - 1) f(0)$$

et

$$(18) \qquad \frac{1}{n} [f(nx_1) + \dots + f(nx_n)]$$

pouvant se confondre, pour une fonction f(x) *arbitraire, avec l'une ou l'autre de ces limites*.

L'équation (10) fait voir que la fonction symétrique

$$(19) \qquad f(x_1) + \dots + f(x_n)$$

de n quantités positives dont la somme a pour valeur s, se laisse toujours exprimer sous la forme

$$(20) \qquad A + \theta B$$

où

$$A = nf\left(\frac{s}{n}\right)$$

$$(21) \qquad B = f(s) - nf\left(\frac{s}{n}\right) + (n - 1) f(0)$$

$$0 \leq \theta \leq 1$$

de sorte qu'*elle est toujours comprise entre les valeurs*

$$nf\left(\frac{s}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad f(s) + (n-1)f(0)$$

pouvant se confondre avec l'une ou l'autre de ces limites.

2. — Les égalités et les inégalités précédentes se prêtent à des applications variées dont je n'indiquerai, à titre d'exemple, que quelques-unes des plus immédiates.

En prenant, par exemple

$$f(x) = e^x$$

on trouve que la valeur de la somme

$$e^{x_1} + \dots + e^{x_n}$$

se laisse exprimer par $A + \theta B$ où

$$A = ne^{\frac{s}{n}}, \qquad B = e^s + n - 1 - ne^{\frac{s}{n}}, \qquad s = x_1 + \dots + x_n .$$

En prenant

$$f(x) = \alpha^x, \qquad x_k = x^k ,$$

où α et x sont des quantités réelles positives, la somme

$$\alpha^x + \alpha^{x^2} + \dots + \alpha^{x^n}$$

se laisse exprimer sous la forme $A + \theta B$ où

$$A = n\alpha^{\frac{x}{n}\frac{x^n-1}{x-1}}, \qquad B = \alpha^{x\frac{x^n-1}{x-1}} + n - 1 - n\alpha^{\frac{x}{n}\frac{x^n-1}{x-1}} .$$

En prenant

$$x_1 = \sin^2 x, \qquad x_2 = \cos^2 x ,$$

on trouve

$$f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x) = A + \theta B ,$$

où

$$A = 2f\left(\frac{1}{2}\right), \qquad B = f(1) + f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) .$$

Si α, β, γ sont les angles d'un triangle, on aura

$$f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = A + \theta B ,$$

où

$$A = 3f\left(\frac{\pi}{3}\right), \qquad B = f(\pi) + 2f(0) - 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) ,$$

de sorte qu'on aura, par exemple, pour un triangle quelconque

$$e^{\alpha} + e^{\beta} + e^{\gamma} = a + \theta b \ ,$$

où

$$a = 3e^{\frac{\pi}{3}} = 8{,}54896 \ldots \qquad b = 2 + e^{\pi} - 3e^{\frac{\pi}{3}} = 16{,}59134 \ldots .$$

Etant donnée une équation algébrique

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_n = 0 \ ,$$

à racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *toutes réelles,* on aura

$$f(\alpha_1^2) + \ldots + f(\alpha_n^2) = \mathrm{A} + \theta \mathrm{B} \ ,$$

où

$$\mathrm{A} = nf\left(\frac{c_1^2 - 2c_2}{n}\right) \ , \qquad \mathrm{B} = f(c_1^2 - 2c_2) + (n-1)f(0) - nf\left(\frac{c_1^2 - 2c_2}{n}\right) \ ,$$

de sorte qu'en posant

$$\mathrm{S}_p = \alpha_1^p + \ldots + \alpha_n^p$$

on aura

$$\mathrm{S}_{2k} = \lambda \mathrm{S}_2^k = \lambda (c_1^2 - 2c_2)^k \ , \qquad \frac{1}{n^{2k-1}} \leq \lambda \leq 1 \ .$$

Lorsque toutes les racines sont *réelles et positives* on aura

$$f(\alpha_1) + \ldots + f(\alpha_n) = \mathrm{A} + \theta \mathrm{B}$$

où

$$\mathrm{A} = nf\left(-\frac{c_1}{n}\right) \ , \qquad \mathrm{B} = f(-c_1) + (n-1)f(0) - nf\left(-\frac{c_1}{n}\right) \ ,$$

de sorte que, par exemple, la valeur de la fonction symétrique

$$e^{r\alpha_1} + \ldots + e^{r\alpha_n}$$

où r est une quantité positive, est toujours comprise entre la limite

$$ne^{-\frac{rc_1}{n}}$$

atteinte dans le cas de l'équation

$$\left(x + \frac{c_1}{n}\right)^n = 0$$

et la limite

$$e^{-rc_1} + n - 1$$

atteinte dans le cas de l'équation

$$x^{n-1}(x + c_1) = 0 \ .$$

On aura également dans le cas de racines positives

$$S_k = \lambda S_1^k = \lambda(- c_1)^k \ , \qquad \frac{1}{n^{k-1}} \leq \lambda \leq 1 \ .$$

Une fonction rationnelle symétrique quelconque des racines s'expriprimant à l'aide des S_k, on peut en avoir les limites de variation à l'aide de c_1 ou de $c_1^2 - 2c_2$.

On a pour les x_i positifs et p réel

$$\log (x_1^p + \dots + x_n^p) = p \log s + \delta$$

avec

$$0 \leq \delta \leq (1 - p) \log n \qquad \text{si} \qquad p < 1$$

$$(1 - p) \log n \leq \delta \leq 0 \qquad \text{si} \qquad p > 1 \ .$$

Prenons, par exemple

$$x_i = e^{a_i} \ , \qquad p = u \ ,$$

où les $a_1, a_2, \dots a_n$ sont des quantités réelles quelconques et u une fonction réelle et finie d'une variable t dans un intervalle considéré de $t = a$ à $t = b$ et dont les valeurs, pour t compris dans cet intervalle, sont elles-mêmes comprises entre 0 et 1. Soit v une fonction de t, réelle et d'un signe invariable dans l'intervalle (a, b). Il s'en suit de ce qui précède que l'intégrale

$$\int_a^b v \log (e^{a_1 u} + \dots + e^{a_n u}) dt$$

aura pour valeur

$$C \int_a^b uv dt + \theta D \int_a^b v dt$$

où C et D ont pour valeurs

$$C = \log(e^{a_1} + e^{a_2} + \dots + e^{a_n}) , \qquad D = (1 - N)\log n ,$$

où N désigne la plus petite valeur de la fonction u dans l'intervalle (a, b) et où θ est un facteur compris entre 0 et 1.

Dans le cas où les valeurs de la fonction u, pour t compris dans l'intervalle (a, b), seraient plus grandes que 1, la constante D serait à remplacer par $(1 - M)\log n$, où M désigne la plus grande valeur de u dans l'intervalle (a, b).

Faisons aussi une application au calcul des longueurs d'arcs de courbes à n dimensions. Il s'ensuit de ce qui précède que pour les x_i positifs on a

$$(22) \qquad \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \theta(x_1 + \dots + x_n) , \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq 1 .$$

On le voit d'ailleurs directement sur l'identité

$$n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2 = \frac{1}{2}\Sigma(x_i - x_j)^2$$

$$i = 1, 2, \dots n \qquad j = 1, 2, \dots n$$

montrant que

$$n\Sigma x_i^2 \geqq (\Sigma x_i)^2$$

l'égalité n'ayant lieu que dans le cas où tous les x_i sont égaux entre eux.

Soient $x_1, x_2 \dots x_n$ les coordonnées d'un point M dans l'espace à n dimensions, telles que l'élément d'arc d'une courbe considérée dans cet espace soit exprimé par

$$ds^2 = \Sigma dx_i^2 .$$

Considérons une partie s de longueur finie de l'arc, le long de laquelle chaque coordonnée x_i varie constamment dans un même sens, en croissant ou en décroissant. Désignons par X_i la valeur absolue de l'accroissement fini de la coordonnée x_i lorsqu'on passe d'une extrémité de l'arc à l'autre. On aura alors la proposition suivante :

La longueur s *de l'arc a pour valeur*

$$s = \theta \Sigma X_i \tag{23}$$

θ étant un facteur compris entre $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et 1.

Il suffit, pour le voir, de remplacer dans l'égalité précédente (22) les x_i par les valeurs absolues des dx_i et d'intégrer entre les deux extrémités de l'arc, avec l'application du théorème commun de la moyenne que comporte la présence du facteur θ.

Dans le cas particulier des courbes planes, le facteur θ est compris entre $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071 \ldots$ et 1; pour les courbes gauches il est compris entre $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5774 \ldots$ et 1, etc.

3. — Le théorème précédent sur les moyennes arithmétiques fournit également des théorèmes de la moyenne pour les intégrales d'une foule d'équations différentielles ordinaires, équations aux dérivées partielles ou aux différences mêlées. Il fournit le moyen d'en exprimer les intégrales, satisfaisant à des conditions très larges, en fonctions connues des variables indépendantes et d'un ou plusieurs facteurs θ dont on connaîtra les limites des variations.

Considérons, par exemple, l'équation du premier ordre

$$s = f(x, y) \tag{24}$$

à laquelle se réduit le problème général de déterminer les courbes planes dont l'arc s est une fonction donnée $f(x, y)$ des coordonnées.

En y remplaçant s par

$$\theta[(x - x_0) + (y - y_0)] \quad \text{ou bien par} \quad \theta[(x - x_0) - (y - y_0)],$$

suivant que l'on considère les branches réelles croissantes ou les branches réelles décroissantes dans l'interville considéré, on aura, sans l'intégration, les équations de ces branches sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\begin{aligned} f(x, y) - \theta\,[x + y - (x_0 + y_0)] &= 0 \\ f(x, y) - \theta\,[x - y - (x_0 - y_0)] &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

où θ est un facteur dont les valeurs ne peuvent varier qu'entre 0,7071... et 1, et où le point initial (x_0, y_0) joue le rôle de la constante d'intégration.

Considérons comme deuxième exemple l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = f(x) \tag{26}$$

qui se présente dans des problèmes généraux de géométrie et de mécanique. En désignant par $\varphi(x)$ la détermination positive de $\sqrt{f(x)}$, supposée finie et continue dans un intervalle de $x = x_0$ à $x = x_1$, considérons les intégrales réelles passant par un point initial donné $M(x_0, y_0)$, situé (pour fixer les idées) au-dessus de l'axe des x; ce point se trouve nécessairement dans la région D comprise entre l'axe des x et la courbe $y = \varphi(x)$, sans quoi la branche considérée de la courbe intégrale serait imaginaire.

Par M_0 passent deux branches de la courbe intégrale, l'une positive croissante Y_1 à coefficient angulaire de la tangente en M_0 ayant pour valeur

$$\sqrt{f(x_0) - y_0^2}$$

l'autre positive décroissante à coefficient angulaire de la tangente en M_0 égal à

$$-\sqrt{f(x_0) - y_0^2}\ ;$$

les deux tangentes se confondent lorsque M_0 se trouve sur la courbe $y = \varphi(x)$.

Pour la branche Y_1 on aura, d'après ce qui précède,

$$\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2} = \theta_1 \left(\frac{dy}{dx} + y\right), \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \theta_1 \leq 1, \tag{27}$$

et par suite cette branche satisfait à une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} + y = \lambda_1 \varphi(x), \qquad 1 \leq \lambda \leq \sqrt{2}. \tag{28}$$

On en tire

$$y = e^{-(x-x_0)} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} \lambda_1 e^{x-x_0}\, \varphi(x)\, dx \right],$$

ou bien, en y appliquant le théorème commun de la moyenne

$$(29) \qquad y = y_0 \Phi(x, x_0) + \mu_1 \Psi(x, x_0)$$

où

$$(30) \qquad \Phi(x, x_0) = e^{-(x-x_0)} \qquad \Psi(x, x_0) = e^{-x} \int_{x_0}^{x} e^x \varphi(x)\, dx$$

et où μ_1 désigne un facteur, fonction de x, dont la valeur reste, le long de la branche Y_1, constamment comprise entre 1 et $\sqrt{2}$.

L'équation (29) *représente la branche* Y_1 *et montre que celle-ci se trouve constamment comprise entre les branches correspondantes des deux courbes*

$$(31) \qquad y = y_0 \Phi(x, x_0) + \Psi(x, x_0) \quad \text{et} \quad y = y_0 \Phi(x, x_0) + \sqrt{2}\, \Psi(x, x_0) .$$

Pour la branche Y_2 l'équation (27) est à remplacer par

$$(32) \qquad \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2} = \theta_2 \left(y - \frac{dy}{dx}\right), \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \theta_2 \leq 1 ,$$

ce qui conduit à l'équation

$$(33) \qquad y = y_0 \Phi(x, x_0) - \mu_2 \Psi(x, x_0) , \qquad 1 \leq \mu_2 \leq \sqrt{2}$$

[où Φ et Ψ sont donnés par (30)], *représentant la branche* Y_2*; celle-ci se trouve ainsi comprise entre les branches correspondantes des deux courbes*

$$(34) \qquad \begin{aligned} y &= y_0 \Phi(x, x_0) - \Psi(x, x_0) \\ y &= y_0 \Phi(x, x_0) - \sqrt{2}\, \Psi(x, x_0) \end{aligned}$$

Par le point $M'_0(x_0 - y_0)$, symétrique au point M_0 par rapport à l'axe des x, passent également deux branches de la courbe intégrale, l'une négative décroissante U_1, l'autre négative croissante U_2, toutes les deux symétriques aux branches Y_1 et Y_2 par rapport à l'axe des x et dont il est facile d'avoir les équations.

Les branches Y_1 et Y_2 (ainsi que U_1 et U_2) se succèdent alternativement en se raccordant aux points où elles rencontrent la courbe fixe

$$y^2 - f(x) = 0$$

représentant le lieu des maxima et des minima de la courbe intégrale.

Envisageons comme troisième exemple l'équation aux dérivées partielles

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = f(x, y) \tag{35}$$

et considérons une région D dans le plan xOy dans laquelle l'intégrale V est réelle et où chacune des dérivées $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$ conserve un signe invariable. Soit ε l'unité affectée du signe constant de $\frac{\partial V}{\partial x}$ et η la quantité correspondant à la dérivée $\frac{\partial V}{\partial y}$. Dans la région D l'intégrale V satisfera à l'équation

$$\sqrt{\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\eta\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} = \varphi(x, y)$$

avec

$$\varphi(x, y) = \sqrt{f(x, y)} \tag{36}$$

ou, d'après ce qui précède, à l'équation linéaire

$$\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} + \eta\frac{\partial V}{\partial y} = \theta\varphi(x, y) \tag{37}$$

où θ est un facteur compris entre 1 et $\sqrt{2}$.

On est ainsi amené à considérer le système

$$\varepsilon\frac{dx}{1} = \eta\frac{dy}{1} = \frac{dV}{\theta\varphi} \tag{38}$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{\varepsilon}{\eta}x + C_1 \tag{39}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \varepsilon\theta\varphi \tag{40}$$

C_1 étant une constante arbitraire. Si dans le second membre de (40) on remplace y par sa valeur (39), l'équation (40) prend la forme

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \varepsilon\theta\varphi\left(x, \frac{\varepsilon}{\eta}x + C_1\right) \tag{41}$$

La fonction φ gardant un signe invariable, on aura par l'application du théorème commun de la moyenne

$$V = \varepsilon \theta' \int \varphi\left(x, \frac{\varepsilon}{\eta} x + C_1\right) dx + C_2 \tag{42}$$

C_2 étant une seconde constante arbitraire, et θ' un facteur compris entre 1 et $\sqrt{2}$.

D'autre part, de (39) et (42) on tire

$$C_1 = y - \frac{\varepsilon}{\eta} x, \qquad C_2 = V - \varepsilon \theta' \Phi(x, C_1)$$

où

$$\Phi(x, C_1) = \int \varphi\left(x, \frac{\varepsilon}{\eta} x + C_1\right) dx$$

de sorte que l'intégrale cherchée sera de la forme

$$V = \varepsilon \theta' \Phi\left((x, y - \frac{\varepsilon}{\eta} x\right) + \Psi\left(y - \frac{\varepsilon}{\eta} x\right)$$

$\Psi(t)$ étant une fonction, convenablement choisie, d'une seule variable t.

Le procédé s'applique, avec la même facilité, à l'équation générale

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2 = f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

et conduit à une expression analogue de l'intégrale V dans tout domaine de l'espace à n variables indépendantes $x_1 \dots x_n$ dans lequel l'intégrale V est réelle et où chaque dérivée partielle $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ conserve un signe invariable ; l'intégrale se laisse mettre sous la forme

$$V = \Psi + \theta \Phi$$

où Ψ et Φ sont des fonctions de $x_1 \dots x_n$ de forme connue et où θ est un facteur compris entre 1 et $\sqrt{n}$.

Glion, mars 1916.