Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1916)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES FONCTIONS DES COTÉS ET DES ANGLES D'UN TRIANGLE

Autor: Petrovitch, Michel

Kapitel: I. — Une fonction des angles.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16875

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR QUELQUES FONCTIONS DES COTÉS ET DES ANGLES D'UN TRIANGLE

PAR

Michel PETROVITCH (Belgrade, Serbie).

I. — *Une fonction des angles.*

Soient a, b, c les côtés d'un triangle, α, β, γ les angles qui leur sont opposés. Envisageons la fonction des angles

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha . \sin\beta . \cos\gamma}}{\sin\alpha + \sin\beta} . \tag{1}$$

En posant pour abréger

$$\sin\alpha = \xi , \qquad \sin\beta = \eta ,$$

l'identité

$$2\xi\eta = (\xi + \eta)^2 - (\xi^2 + \eta^2)$$

transforme l'expression (1) en

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{\lambda(1 + \cos\gamma) - \cos\gamma} ,$$

où

$$\lambda = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(\xi + \eta)^2} .$$

Or, l'inégalité et l'identité

$$1 \geqq \frac{\xi^2 + \eta^2}{(\xi + \eta)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi - \eta}{\xi + \eta}\right)^2$$

montrent que

$$\frac{1}{2} \leqq \lambda \leqq 1 ,$$

la limite inférieure $\frac{1}{2}$ étant atteinte pour $\xi = \eta$ et la limite supérieure 1 lorsque l'une des valeurs ξ et η est négligeable par rapport à l'autre.

On en conclut

$$\sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2}-\cos\gamma} \leq \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \leq 1 ,$$

ou encore

$$\cos\frac{\pi-\gamma}{2} \leq \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \leq 1 .$$

Par suite

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1+\cos\frac{\pi-\gamma}{2}}{2} \pm \delta ,$$

avec

$$\delta \leq \frac{1-\cos\frac{\pi-\gamma}{2}}{2} ,$$

ou bien encore

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \cos\frac{2\pi-\gamma}{4} \pm \delta , \tag{2}$$

avec

$$\delta \leq \sin\frac{\pi-\gamma}{4} . \tag{3}$$

L'égalité (3) aura lieu : 1° pour $\xi = \eta$; 2° lorsque l'une ou l'autre des quantités ξ et η devient négligeable par rapport à l'autre. Au premier cas correspond

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \cos^2\frac{\pi-\gamma}{4} - \sin^2\frac{\pi-\gamma}{4} = \cos\frac{\pi-\gamma}{2}$$

et au second

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \cos^2\frac{\pi-\gamma}{4} + \sin^2\frac{\pi-\gamma}{4} = 1 .$$

On en conclut que

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \cos^2\frac{\pi-\gamma}{4}(1 \pm \varepsilon) \tag{4}$$

où l'erreur relative ε *ne surpasse jamais la grandeur* $\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\gamma}{4}$;

cette erreur est nulle pour le cas où $\alpha = \beta$, *et atteint son maximum* $\mathrm{tg}^2\frac{\pi-\gamma}{4}$ *lorsque l'un des deux angles* α *et* β *tend vers zéro.*

La proposition présente un intérêt particulier pour les triangles à angle γ *obtus.* Dans ce cas *en prenant pour* $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ *la valeur* $\cos^2\frac{\pi-\gamma}{4}$ *l'erreur relative commise* ε *n'atteint jamais la valeur*

$$\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{8} = 0{,}171$$

et cette erreur décroît rapidement lorsque l'angle γ *s'approche de 180°.*

Ainsi, l'on a

$$\text{(5)}\qquad \begin{array}{lll} \text{pour} & \gamma > 120^\circ & \varepsilon < 0{,}070 \\ & \gamma > 140^\circ & \varepsilon < 0{,}040 \\ & \gamma > 150^\circ & \varepsilon < 0{,}018 \\ & \gamma > 160^\circ & \varepsilon < 0{,}007 \\ & \gamma > 170^\circ & \varepsilon < 0{,}002 \\ & \gamma > 175^\circ & \varepsilon < 0{,}0003\ . \end{array}$$

Les triangles pour lesquels l'erreur relative ε est, en valeur absolue, plus petite qu'une valeur ε' donnée à l'avance, sont ceux pour lesquels l'angle γ, exprimé en parties de π, est plus grand que la différence

$$\pi - 4\mathrm{arctg}\sqrt{\varepsilon'}\ ,$$

où, pour ε' suffisamment petit

$$\gamma < \pi - 4\sqrt{\varepsilon'}\ .$$

A l'aide de ce qui précède on peut, par exemple, calculer, avec une approximation connue à l'avance, *le troisième côté d'un triangle dont on ne connaît que la somme* a + b *de deux côtés et l'angle obtus* γ *qu'ils forment entre eux.*

En effet, désignons par h la somme donnée; des

$$a + b = h\ , \qquad \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

on tire

$$a = h\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta}, \qquad b = h\frac{\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

et par suite

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma} = h\varphi(\alpha, \beta, \gamma).$$

Il s'ensuit que

$$c = (a + b)\cos^2\frac{\pi - \gamma}{4}(1 \pm \varepsilon), \tag{6}$$

où l'erreur relative ε *est celle commise sur la fonction* φ *qu'on vient d'étudier.*

En prenant

$$c = (a + b)\cos^2\frac{\pi - \gamma}{4} \tag{7}$$

on commet une erreur relative qui pour les angles γ supérieurs à 140° n'atteindra pas 4 %, pour les angles supérieurs à 150° 1,8 %, pour les angles supérieurs à 160° 0,7 %, pour les angles supérieurs à 170° 0,2 %, etc.

II. — *Une fonction des côtés.*

L'identité

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 = (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2$$

écrite sous la forme

$$1 \geqq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} = \frac{1}{3} + \frac{(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2}{3(a + b + c)^2} \tag{8}$$

montre que, a, b, c étant des quantités positives, dont une ou deux peuvent être nulles, la valeur du rapport

$$\mu = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a + b + c} \tag{9}$$

est toujours comprise entre $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et 1, la limite inférieure $\frac{1}{\sqrt{3}}$ étant atteinte pour $a = b = c$ et la limite supérieure 1 étant