plan correspond un plan passant par b et rencontrant C, en dehors de cette droite, en un point B que nous dirons par définition correspondre à A.

Inversement, par un point B passent deux cubiques C_1, C_2 de Σ et T fait correspondre à ces cubiques deux droites d_1, d_2 de G. Par P passent deux droites b_1, b_2 bisécantes respectivement de C_1, C_2. Aux plans (B, b_1), (B, b_2), Ω fait correspondre deux plans rencontrant respectivement les droites d_1, d_2 en deux points A_1, A_2.

On a établi ainsi, entre les points A, B, une correspondance (2, 1) qui fait correspondre à une droite de G une cubique gauche de Σ et inversement, une cubique gauche de Σ à deux courbes dont l'une est une droite de G. Par suite :

Etant donnée une congruence d'ordre deux formée de cubiques gauches, il est toujours possible de construire une transformation (2, 1) qui fasse correspondre les droites d'une congruence linéaire aux cubiques de cette congruence.

Ramscappelle, 10 décembre 1915.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos du problème XXVIII de la Géométrographie de Lemoine.

Démonstration élémentaire[1] *de la solution due à* M. Maurice d'Ocagne
par Fr. Redl (St-Poelten).

Le problème XXVIII de la *Géométrographie* de Lemoine *(collection Scientia)* est énoncé comme suit : *Par un point* A, *mener une droite au point de concours inaccessible de deux droites* BB', CC'. Le tracé donné par l'auteur est dû à M. Maurice d'Ocagne (*Journ. de Math. Elém.* de Longchamps, 1886, p. 59).

La solution suivante est obtenue par la considération de la bissectrice d'un angle et de la projection parallèle et respectivement de la projection centrale de la figure.

---

[1] Traduit de l'allemand par A. Staempfli, Zurich.

Soit un losange ABA′B′ *(fig. 1.)* Menons entre les côtés opposés prolongés les segments,

$$PP' \parallel AB' \quad \text{et} \quad QQ' \parallel AB \ .$$

Joignons PQ′ et P′Q et désignons par M(M′) l'intersection de PQ′ avec AB′(A′B′), par N l'intersection de P′Q avec A′B. Des triangles semblables nous tirons aisément la proportion :

$$PM' : PS = MQ' : MS = QN : QS \ .$$

Par suite, les distances du point S aux côtés de l'angle A sont dans le même rapport que les distances correspondantes du point A′, c'est-à-dire, le point S appartient à la diagonale AA′ du

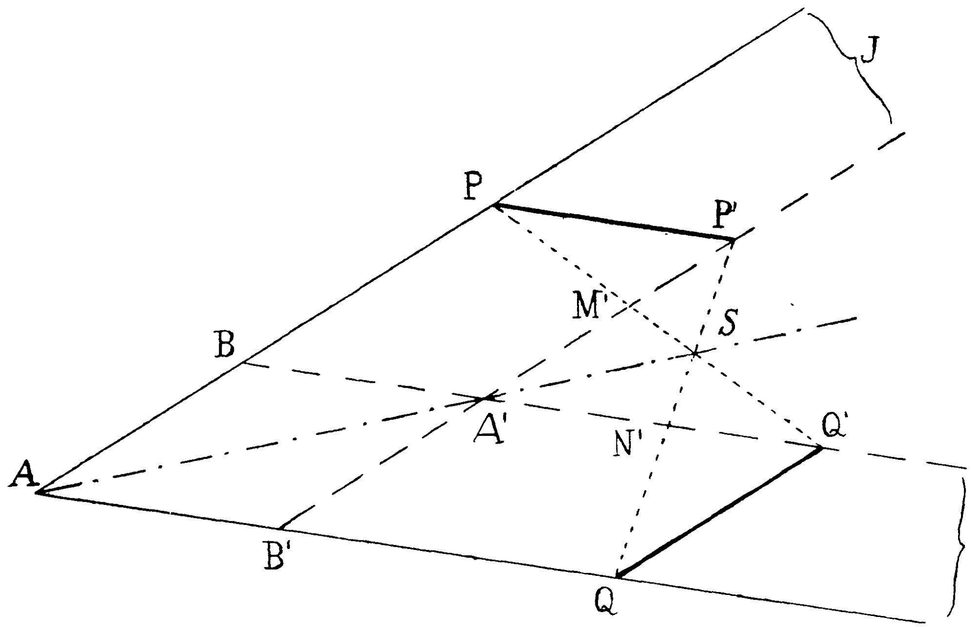

Fig. 1.

parallélogramme ABA′B′, et, dans le cas particulier de la figure, à la bissectrice de l'angle A.

Par une construction analogue on obtient un point de la bissectrice de l'angle supplémentaire. On prolonge par exemple PP′ du côté de P jusqu'en P″ d'une longueur égale à PP′. Les droites PQ′ et P″Q se couperont sur la bissectrice de l'angle supplémentaire de A.

Ainsi les deux bissectrices d'un angle peuvent être construites de la manière suivante : Par les points P et Q, choisis arbitrairement sur les côtés de l'angle, on mène deux segments PP′ et QQ′ de même longueur respectivement parallèles aux côtés de l'angle. Le point d'intersection des droites PQ′ et P′Q appartient à l'une des bissectrices.

Passons maintenant à la résolution du problème proposé. A cet effet, construisons une projection oblique de la figure 1, et consi-

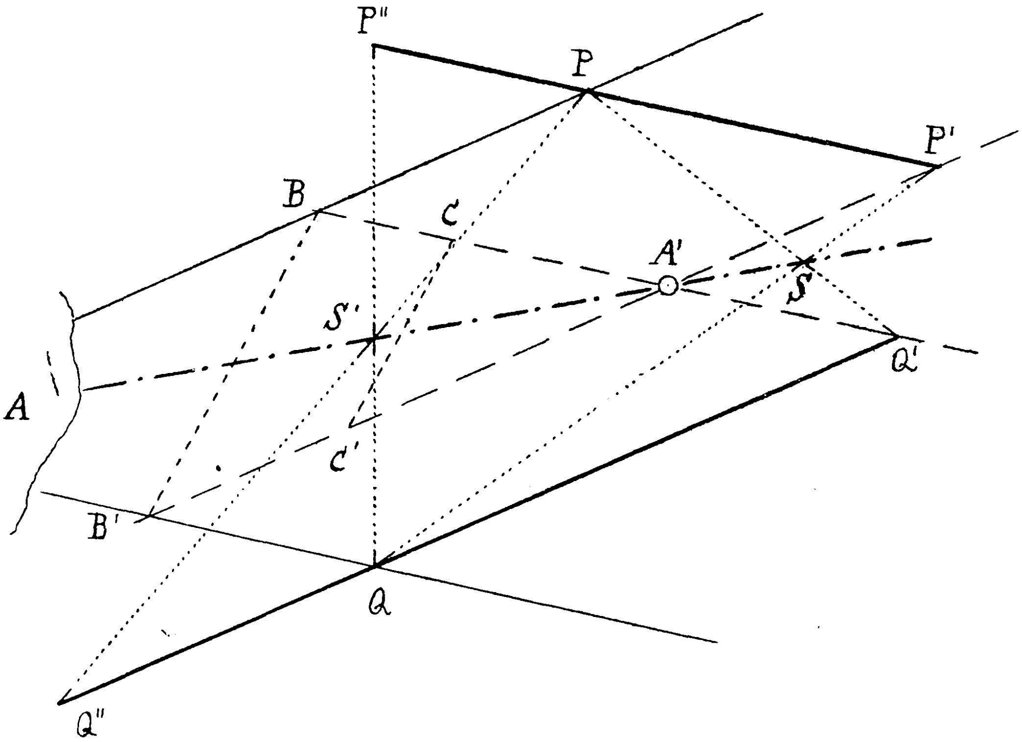

Fig. 2.

dérons dans cette projection A′ comme étant le point à joindre au point d'intersection des deux droites.

Par le point A′ *(fig. 2)* nous menons une parallèle à chacune des

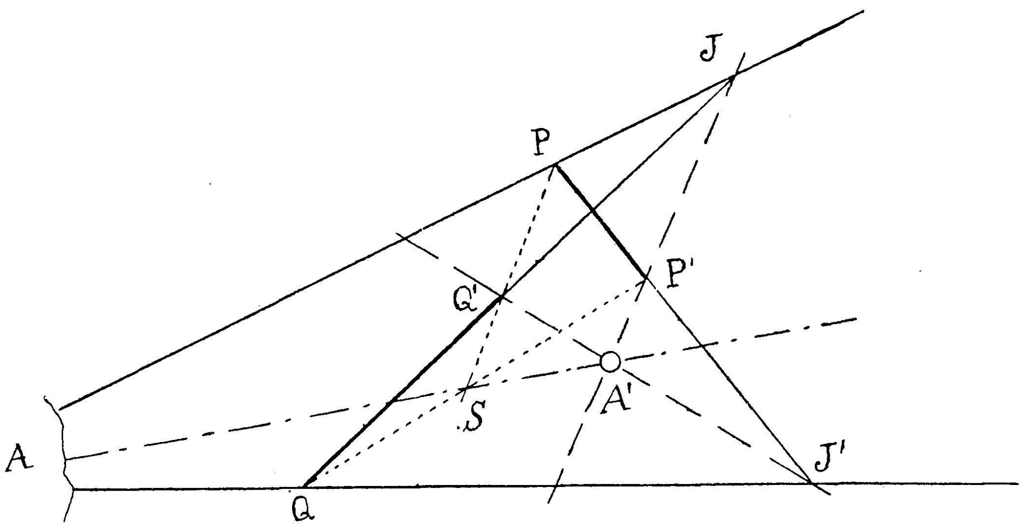

Fig. 3.

deux droites données. Coupons ces deux couples de parallèles par deux droites auxiliaires respectivement parallèles aux deux droites données. Nous aurons deux segments PP′ et QQ′, comme dans la figure 1, dont la figure 2 est une projection oblique. En joignant PQ′ et QP′ nous obtenons le point S ; la droite A′S passe[1] par le point inaccessible A.

La projection centrale de la figure 1 sur un oblique à celle-ci (*fig. 3*) donne la construction proposée par M. d'Ocagne. Son tracé consiste à mener par A′ deux droites quelconques (projection des parallèles par A′ dans la fig. 1) ; par les points d'intersection J et J′ nous menons deux droites quelconques (projection des parallèles auxiliaires par P et Q dans la fig. 1) sur lesquelles on a deux ponctuelles homographiques déterminées par les trois couples de points JJ′, Q′P′ et QP. La droite AA′ n'étant autre chose que l'axe perspectif des deux ponctuelles, nous obtenons un point quelconque de l'axe en joignant convenablement les points des deux supports, ici PQ′ et QP′. Le point d'intersection S est un point de la droite cherchée.

Residuo in Formula de quadratura Cavalieri-Simpson[2].

Nota de G. Peano (Torino.)

Note de la Rédaction. — *Sur la demande de M. G. Peano, professeur d'Analyse à l'Université de Turin et président de l'Academia pro Interlingua, nous reproduisons, à titre de spécimen, une note rédigée dans la langue auxiliaire internationale Interlingua.*

Formula de quadratura que nos considera es :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] ,$$

que es vero, si functione f es integro, de gradu non superiore

---

[1] Indiquons en passant une construction très simple des points de la droite AA′ qui n'a été donnée nulle part: Si l'on mène une parallèle quelconque à BB′, qui coupe A′B en C et A′B′ en C′ et qu'on complète le triangle A′CC′ en un parallélogramme ayant CC′ comme diagonale le sommet opposé à A′ peut servir à déterminer la droite AA′.

En faisant une projection centrale de cette figure on obtient une construction analogue à celle de Lambert.

[2] Omeri vocabulo es latino : *in, de, non, et ;* nomine habe forma de thema, id es : *residuo, formula, gradu. integro* (ablativo), *nos* (nominativo), *que* (ex accusativo *quem*), *ce* (ex *hoc, cetero*) ; verbo : *considera, es, occurre* (imperativo).

« Academia pro Interlingua » habe origine in 1887, et adopta Volapük publicato in 1880 ; stude Esperanto publicato in 1887 ; in 1902 publica « Idiom neutral » constructo super principio de internationalitate maximo ; et continua labores pro lingua internationale.

Articulo presente, tracto ex « Atti R. Acc. di Torino, 21, 2, 1915 », es scripto in « latino sine flexione », uno ex numeroso forma de interlingua, intelligibile sine studio ab magno publico.

ad 3 ; et pro alio functiones, es de usu frequente, ut formula de approximatione.

Ce formula occurre sub forma geometrico, in
B. Cavalieri, *Centuria di varii problemi*, Bologna, a. 1639, p. 446[1] ;
et post, in
J. Gregory, *Exercitationes geometricae*, Londini anno 1668 ;
R. Cotes, *Harmonia mensurarum*, Catabrigiæ, anno 1722, p. 33 ;
et in fine in
Th. Simpson, *Mathematical dissertations*, London, 1743, p. 109.

Es usu de appella « formula di Simpson » formula præcedente. Me adde nomine de primo auctore.

Praxi proba quod formula de Cavalieri-Simpson, es in generale satis approximato. Ergo plure auctore desidera de cognosce uno limite de errore in isto approximatione.

In libro : *Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale*, Torino, Bocca, 1887, pag. 208, me publica expressione de residuo, id es de differentia inter primo et secundo membro sub forma :

$$= -\frac{(b-a)^5}{4!\,5!} D^4 f(x) ,$$

ubi x es uno valore medio inter a e b.

Idem risultatu es publicato ab Markov, in libro edito in S. Petersburg, 1889 ; et versione cum titulo :
Markoff, *Differenzenrechnung*, Leipzig, 1896.

Ut casu particulare de regula exposito in meo scripto : *Resto nelle formule di quadratura, espresso con un integrale definito*, « Rendiconti Acc. Lincei », 4 maggio 1913, ibi me da expressione de residuo in formula de Cavalieri-Simpson, sub forma de integrale.

In præsente scripto, me perveni ad idem resultatu, per via plus directo et plus elementare.

---

[1] Phrasi de Cavalieri es « Per havere la capacità della botte moltiplicaremo la terza parte della lunghezza della botte in due cerchi maggiori ed uno dei minori ».

Versione « Pro habe capacitate de vase vinario, nos multiplica tercio parte de longitudine de vase per duo circulo maiore et uno minore ».

Si nos sume axi de vase pro axi de x, et pro origine puncto medio, si longitudine de vase es h, et si $f(x)$ es area de sectione de vase, in puncto de abscissa x, et normale ad axi, tunc volumine $= \int_{-h/2}^{h/2} f(x)\,dx$; circulo maiore $= f(0)$, circulo minore $= f(h/2 = f(-h/2)$; et regula de Cavalieri dic que integrale vale :

$$\frac{h}{3}[2f(0) + f(h/2)] = \frac{h}{6}[4f(0) + f(-h/2) + f(h/2)] .$$

* * *

Me considera formula de Taylor, com residuo sub forma de integrale :

$$(1) \qquad f(b) = f(a) + (b-a)\,\mathrm{D}f(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}\,\mathrm{D}^2 f(a) + \dots$$

$$+ \frac{(b-a)^n}{n!}\,\mathrm{D}^n f(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n\,\mathrm{D}^{n+1} f(x)\,dx\,.$$

Me transporta $f(a)$ ab secundo in primo membro; in vice de $f(b) - f(a)$ scribe $\int_a^b \mathrm{D}f(x)\,dx$; in loco de $\mathrm{D}f$ scribe f; me obtine:

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}\,\mathrm{D}f(a) + \dots$$

$$+ \frac{(b-a)^n}{n!}\,\mathrm{D}^{n-1} f(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n\,\mathrm{D}^n f(x)\,dx\,.$$

Isto es uno formula de quadratura, que resulta etiam ex integratione per partes; et sub isto forma illo es enuntiato ab Joh. Bernoulli in 1694 (Taylor in 1715).

Sine minue generalitate, nos suppone que limites de integrale in formula de Cavalieri-Simpson, es -1 et $+1$; id es nos considera differentia :

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx - \frac{1}{3}\,[f(-1) + 4f(0) + f(1)]\,.$$

In formula (2) me fac $a = 0$, $b = 1$; et ad n me da valore 4 :

$$(3) \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = f(0) + \frac{1}{2}\,\mathrm{D}f(0) + \frac{1}{6}\,\mathrm{D}^2 f(0)$$

$$+ \frac{1}{24}\,\mathrm{D}^3 f(0) + \frac{1}{24}\int_0^1 (1-x)^4\,\mathrm{D}^4 f(x)\,dx\,.$$

$\int_{-1}^{0} f(x)$, posito $x = -z$, fi $\int_{0}^{1} f(-z)\,dz$; et per formula (3), resulta :

$$(4) \qquad \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = f(0) - \frac{1}{2} \mathrm{D}f(0) + \frac{1}{6} \mathrm{D}^2 f(0)$$

$$- \frac{1}{24} \mathrm{D}^3 f(0) + \frac{1}{24} \int_{0}^{1} (1-x)^4 \mathrm{D}^4 f(-x)\,dx \;.$$

Adde membro ad membro æqualitates (3) e (4) :

$$(5) \qquad \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = 2f(0) + \frac{1}{3} \mathrm{D}^2 f(0) + \frac{1}{24} \int_{0}^{1} (1-x)^4 [\mathrm{D}^4 f(x)$$

$$+ \mathrm{D}^4 f(-x)\,dx] \;.$$

Ab formula (1), si nos fac $a = 0$, $b = 1$, $n = 3$, resulta :

$$(6) \qquad f(1) = f(0) + \mathrm{D}f(0) + \frac{1}{2} \mathrm{D}^2 f(0) + \frac{1}{6} \mathrm{D}^3 f(0)$$

$$+ \frac{1}{6} \int_{0}^{1} (1-x)^3 \mathrm{D}^4 f(x)\,dx \;.$$

Applica isto formula (6) ad functione $f(-x)$, ubi x es variabile :

$$(7) \qquad f(-1) = f(0) - \mathrm{D}f(0) + \frac{1}{2} \mathrm{D}^2 f(0) - \frac{1}{6} \mathrm{D}^3 f(0)$$

$$+ \frac{1}{6} \int_{0}^{1} (1-x)^3 \mathrm{D}^4 f(-x)\,dx \;.$$

Adde (6) et (7) :

$$(8) \qquad f(-1) + f(+1) = 2f(0) + \mathrm{D}^2 f(0)$$

$$+ \frac{1}{6} \int_{0}^{1} (1-x)^3 [\mathrm{D}^4 f(x) + \mathrm{D}^4 f(-x)]\,dx \;.$$

Ab (5) et (8) suffice elimina $\mathrm{D}^2 f(0)$, per algebra elementare.

Ergo me trahe $D^2f(0)$ ab (8), et substitue in (5):

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = 2f(0) + \frac{1}{3}\,[f(-1) + f(1) - 2f(0)]$$

$$+ \int_0^1 \left[\frac{1}{24}(1-x)^4 - \frac{1}{18}(1-x)^3\right][D^4f(x) + D^4f(-x)]\,dx \; .$$

Parte integrato $2f(0) + \frac{1}{3}[f(-1) - 2f(0) + f(1)]$ es alio forma de $\frac{1}{3}[f(-1) + 4f(0) + f(1)]$, id es de secundo membro in formula de quadratura; nota quod

$$f(-1) - 2f(0) + f(1)$$

es differentia secundo de functione f, pro tres valore -1, 0, 1 de variabile. Polynomio sub integrale:

$$\frac{1}{24}(1-x)^4 - \frac{1}{18}(1-x)^3 = -\frac{1}{24}(1-x)^3\left(x + \frac{1}{3}\right) \; .$$

Ergo resulta in fine:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\,[f(-1) + 4f(0) + f(1)] \tag{9}$$

$$- \frac{1}{24}\int_0^1 (1-x)^3\left(x+\frac{1}{3}\right)[D^4f(x) + D^4f(-x)]\,dx$$

que es formula de quadratura de Cavalieri, cum residuo sub forma de integrale.

In isto residuo, factore $(1-x)^3\left(x+\frac{1}{3}\right)$ conserva signo constante positivo, dum x varia in limites de integrale, 0 ed 1; ergo lice transporta ex integrale secundo factore, $D^4f(x) + D^4f(-x)$, que nos pote scribe $2D^4f(z)$, ubi z indica uno valore medio inter -1 et $+1$.

$$\int_0^1 (1-x)^3\left(x+\frac{1}{3}\right)[D^4f(x) + D^4f(-x)]\,dx \; .$$

$$= 2D^4f(z)\int_0^1 (1-x)^3\left(x+\frac{1}{3}\right)dx \; .$$

Nunc

$$\int_0^1 (1-x)^3\left(x+\frac{1}{3}\right)dx = \frac{2}{15} ,$$

Substitue in (9) ad ultimo integrale isto valore :

$$(10) \qquad \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}[f(-1) + 4f(0) + f(1)] - \frac{1}{90}\,D^4 f(z)$$

ubi z es uno valore incognito, inter -1 et $+1$.

Pro obtine integrale inter limites a et b, nos muta variabile $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,t$; posito $g(t) = f(x)$, nos habe :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1} g(t)\,dt \ ; \qquad g(-1) = f(a) \ , \qquad g(0) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) ,$$

$$g(1) = f(b) \ , \qquad D^4 gt = \left(\frac{b+a}{2}\right)^4 D^4 f(x) \ ;$$

et in fine :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{90\times 32}\,D^4 f(x) ,$$

ubi x in residuo es uno valore medio inter a et b. Coefficiente $\frac{1}{90\times 32}$ vale $\frac{1}{4!\ 5!}$, ut es scripto in principio de præsente nota.