

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 18 (1916)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES CONGRUENCES D'ORDRES UN ET DEUX DE CUBIQUES GAUCHES  
**Autor:** Godeaux, Lucien  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-16874>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LES CONGRUENCES D'ORDRES UN ET DEUX DE CUBIQUES GAUCHES

PAR

Lucien GODEAUX (Liège, Belgique).

On sait que l'on entend par congruence d'ordre  $n$  de cubiques gauches un système algébrique, doublement infini, de cubiques gauches, tel que par un point générique de l'espace passent  $n$  de ces cubiques. Dans cette note, nous considérons les cas où  $n$  est égal à un ou deux.

Nous pouvons nous poser deux problèmes relatifs aux congruences linéaires (c'est-à-dire d'ordre un) de cubiques gauches :

a) *Déterminer les types de congruences linéaires de cubiques gauches projectivement différents*, c'est-à-dire tels qu'il ne soit pas possible de passer de l'un à l'autre par une transformation projective de l'espace.

b) *Déterminer les types de congruences linéaires de cubiques gauches birationnellement différents*, c'est-à-dire tels qu'il ne soit pas possible de passer de l'un à l'autre par une transformation birationnelle.

Le premier problème a été abordé dans certains cas particuliers par MM. Stuyvaert<sup>1</sup> et Veneroni<sup>2</sup>. Le premier a déterminé les différents types de congruences linéaires représentées par les matrices

$$\left\| \begin{array}{ccc} \varphi_{11}(\alpha, x) & \varphi_{12}(\alpha, x) & \varphi_{13}(\alpha, x) \\ \varphi_{21}(\alpha, x) & \varphi_{22}(\alpha, x) & \varphi_{23}(\alpha, x) \end{array} \right\| = 0 ,$$

<sup>1</sup> *Cinq Etudes de Géométrie Analytique (Mémoires de la Soc. R. des sciences de Liège, 1907)*. Voir aussi un Mémoire couronné par l'Acad. R. de Belgique, en cours de publication dans les Mémoires in-8° de cette Académie.

<sup>2</sup> *Rend. Circolo Matem. di Palermo, 1902*.

où les formes  $\varphi$  sont linéaires et homogènes par rapport aux paramètres  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , et par rapport aux coordonnées  $x_0, x_1, x_2, x_3$  de l'espace. Le second a déterminé les types de congruences linéaires de classe un, c'est-à-dire les congruences linéaires telles qu'une droite quelconque ne soit en général la bisécante que d'une seule cubique de la congruence.

Nous avons d'autre part rencontré, dans des travaux publiés de 1908 à 1911, de nombreux types de congruences linéaires de cubiques gauches.

Le second problème est, au contraire du premier, complètement résolu par un théorème de M. Enriques <sup>1</sup>.

*On peut toujours trouver une transformation birationnelle de l'espace transformant les cubiques gauches d'une congruence linéaire en les droites d'une gerbe.*

Dans la première partie de cette note, nous démontrerons d'une façon élémentaire le théorème de M. Enriques, en construisant la transformation birationnelle.

Dans la deuxième partie, après avoir démontré qu'une congruence d'ordre deux formée de cubiques gauches est rationnelle, nous construirons une transformation (1, 2) changeant cette congruence en une gerbe de droites.

### § 1. — *Congruences linéaires de cubiques gauches.*

1. — Soit  $\Sigma$  une congruence linéaire de cubiques gauches C. Les cubiques C découpent, sur un plan générique de l'espace, des groupes de trois points formant une involution. Or, M. Castelnuovo a démontré <sup>2</sup> qu'une involution plane est rationnelle; par conséquent: *la congruence  $\Sigma$  est rationnelle.*

2. — Considérons une congruence linéaire G de droites  $d$ , une collinéation  $\Omega$  et un point P ne possédant aucune propriété particulière par rapport à la congruence  $\Sigma$ .

$\Sigma$  étant rationnelle, on peut établir, entre les courbes C

<sup>1</sup> *Mathematische Annalen*, 1895. En réalité, le théorème de M. ENRIQUES est plus complet, il s'étend aux congruences linéaires de courbes gauches rationnelles d'ordre impair.

<sup>2</sup> *Mathematische Annalen*, 1893.

de  $\Sigma$  et les droites  $d$  de  $G$ , une correspondance birationnelle  $T$ , par un procédé que nous laissons indéterminé.

Considérons un point  $A$ . Par  $A$  passe une droite  $d$  de  $G$  et en général une seule. A cette droite  $d$ ,  $T$  fait correspondre une cubique  $C$  de  $\Sigma$ . Par  $P$  passe une seule bisécante  $b$  de  $C$  (en général). A cette bisécante,  $\Omega$  fait correspondre une droite ne passant pas en général par  $A$ . Cette droite détermine, avec  $A$ , un plan auquel  $\Omega$  fait correspondre un plan passant par  $b$  et rencontrant  $C$  en un seul point  $B$ , non situé sur  $b$ . Remarquons que lorsque  $A$  décrit une droite  $d$  de  $G$ ,  $B$  décrit la cubique correspondante de  $\Sigma$ .

Inversement, partons d'un point  $B$  et faisons les constructions nous ramenant à un point  $A$ . Par  $B$  passe une cubique  $C$  de  $\Sigma$  et en général une seule. Par  $P$  passe une bisécante  $b$  de  $C$ .  $T$  fait correspondre à  $C$  une droite  $d$  de  $G$  et  $\Omega$  fait correspondre au plan  $(b, B)$  un plan rencontrant  $d$  en général en un seul point  $A$ .

Nous venons de définir, entre les points  $A$  et  $B$ , une correspondance birationnelle changeant une cubique  $C$  de  $\Sigma$  en une droite  $d$  de  $G$ ; par suite :

*On peut toujours transformer birationnellement une congruence linéaire de cubiques gauches en une congruence linéaire de droites.*

En particulier, une congruence linéaire de droites étant birationnellement identique à une gerbe de rayons, le théorème que nous avons en vue est démontré.

3. — Dans certains cas, la construction de la correspondance  $(A, B)$  peut être simplifiée. Si par exemple les cubiques gauches  $C$  de  $\Sigma$  ont une bisécante fixe  $\delta$ , on prendra le point  $P$  sur cette droite. Les droites que nous avons désignées plus haut par  $b$  se confondent toutes avec  $\delta$ . Il n'est plus nécessaire de définir une collinéation  $\Omega$ , mais seulement une projectivité entre le faisceau de plans d'axe  $\delta$  et un faisceau de plans dont l'axe ne passe par aucun point singulier de  $G$ . Une étude approfondie de cette transformation conduirait sans doute à la détermination de tous les types de congruences linéaires de cubiques gauches ayant une bisécante fixe.

§ 2. — *Congruences d'ordre deux de cubiques gauches.*

4. — Soit maintenant  $\Sigma$  une congruence d'ordre deux, formée de cubiques gauches  $C$ . Les cubiques de  $\Sigma$  passant par les points de l'une d'entre elles, forment une surface  $\Phi$ , sur laquelle elles constituent un faisceau rationnel de courbes rationnelles, sauf dans le cas où les  $\infty^2$  courbes de  $\Sigma$  se distribuent en  $\infty^1$  systèmes d'indice 2 situés sur  $\infty^1$  surfaces  $\Phi'$ . Il résulte d'un théorème bien connu dû à M. Nœther, que  $\Phi$  est rationnelle. Imaginons une surface  $F$  dont les points représentent, sans exception, les courbes  $C$  de  $\Sigma$ . Aux surfaces  $\Phi$  correspondent, sur  $F$ , des courbes rationnelles  $\Gamma$ . Or, d'après un théorème de MM. Castelnuovo et F. Enriques<sup>1</sup>,  $F$ , contenant un système continu de courbes rationnelles, est rationnelle.

Reste à examiner le cas où les cubiques de  $\Sigma$  se distribuent sur  $\infty^1$  surfaces  $\Phi'$  en formant sur chacune de ces surfaces un système d'indice deux. Il est alors facile de démontrer que les surfaces  $\Phi'$  sont rationnelles. De plus, ces surfaces forment un faisceau, sans quoi  $\Sigma$  serait d'ordre supérieur à deux. La surface  $F$ , définie comme plus haut, contient un faisceau de courbes rationnelles (image des  $\Phi$ ) et est donc rationnelle.

Par suite :

*Une congruence d'ordre deux, formée de cubiques gauches, est rationnelle.*

5. — La congruence  $\Sigma$ , d'ordre deux, étant rationnelle, on peut établir entre cette congruence et une congruence linéaire  $G$  de droites  $d$  une correspondance birationnelle  $T$ .

— Considérons en outre une collinéation  $\Omega$  et un point  $P$ , sans relation avec la congruence  $\Sigma$ .

Par un point  $A$  passe une seule droite de  $G$ . A cette droite correspond, par  $T$ , une cubique  $C$  de  $\Sigma$ . Par  $P$  passe une seule bisécante  $b$  de cette courbe  $C$ .  $A b$  correspond, par  $\Omega$ , une droite déterminant (en général) un plan avec  $A$ . A ce

<sup>1</sup> *Annali di Matematica*, 1901.

plan correspond un plan passant par  $b$  et rencontrant  $C$ , en dehors de cette droite, en un point  $B$  que nous dirons par définition correspondre à  $A$ .

Inversement, par un point  $B$  passent deux cubiques  $C_1, C_2$  de  $\Sigma$  et  $T$  fait correspondre à ces cubiques deux droites  $d_1, d_2$  de  $G$ . Par  $P$  passent deux droites  $b_1, b_2$  bisécantes respectivement de  $C_1, C_2$ . Aux plans  $(B, b_1), (B, b_2)$ ,  $\Omega$  fait correspondre deux plans rencontrant respectivement les droites  $d_1, d_2$  en deux points  $A_1, A_2$ .

On a établi ainsi, entre les points  $A, B$ , une correspondance  $(2, 1)$  qui fait correspondre à une droite de  $G$  une cubique gauche de  $\Sigma$  et inversement, une cubique gauche de  $\Sigma$  à deux courbes dont l'une est une droite de  $G$ . Par suite :

*Etant donnée une congruence d'ordre deux formée de cubiques gauches, il est toujours possible de construire une transformation  $(2, 1)$  qui fasse correspondre les droites d'une congruence linéaire aux cubiques de cette congruence.*

Ramscapele, 10 décembre 1915.

---

## MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

---

### A propos du problème XXVIII de la Géométrie de Lemoine.

*Démonstration élémentaire*<sup>1</sup> de la solution due à M. Maurice d'Ocagne  
par Fr. REDL (St-Poelten).

Le problème XXVIII de la *Géométrie de LEMOINE* (*collection Scientia*) est énoncé comme suit : *Par un point  $A$ , mener une droite au point de concours inaccessible de deux droites  $BB', CC'$ .* Le tracé donné par l'auteur est dû à M. Maurice d'Ocagne (*Journ. de Math. Elém.* de Longchamps, 1886, p. 59).

La solution suivante est obtenue par la considération de la bissectrice d'un angle et de la projection parallèle et respectivement de la projection centrale de la figure.

---

<sup>1</sup> Traduit de l'allemand par A. Staempfli, Zurich.