Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1916)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CONGRUENGES D'ORDRES UN ET DEUX DE CUBIQUES GAUCHES

Autor: Godeaux, Lucien

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16874

SUR LES CONGRUENCES D'ORDRES UN ET DEUX DE CUBIQUES GAUCHES

PAR

Lucien Godeaux (Liége, Belgique).

On sait que l'on entend par congruence d'ordre n de cubiques gauches un système algébrique, doublement infini, de cubiques gauches, tel que par un point générique de l'espace passent n de ces cubiques. Dans cette note, nous considérons les cas où n est égal à un ou deux.

Nous pouvons nous poser deux problèmes relatifs aux congruences linéaires (c'est-à-dire d'ordre un) de cubiques gauches :

a) *Déterminer les types de congruences linéaires de cubiques gauches projectivement différents*, c'est-à-dire tels qu'il ne soit pas possible de passer de l'un à l'autre par une transformation projective de l'espace.

b) *Déterminer les types de congruences linéaires de cubiques gauches birationnellement différents*, c'est-à-dire tels qu'il ne soit pas possible de passer de l'un à l'autre par une transformation birationnelle.

Le premier problème a été abordé dans certains cas particuliers par MM. Stuyvaert [1] et Veneroni [2]. Le premier a déterminé les différents types de congruences linéaires représentées par les matrices

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_{11}(\alpha, x) & \varphi_{12}(\alpha, x) & \varphi_{13}(\alpha, x) \\ \varphi_{21}(\alpha, x) & \varphi_{22}(\alpha, x) & \varphi_{23}(\alpha, x) \end{matrix} \right\| = 0 ,$$

---

[1] *Cinq Etudes de Géométrie Analytique* (*Mémoires de la Soc. R. des sciences de Liége*, 1907). Voir aussi un Mémoire couronné par l'Acad. R. de Belgique, en cours de publication dans les Mémoires in-8° de cette Académie.

[2] *Rend. Circolo Matem. di Palermo*, 1902.

où les formes φ sont linéaires et homogènes par rapport aux paramètres α_1, α_2, α_3, et par rapport aux coordonnées x_0, x_1, x_2, x_3 de l'espace. Le second a déterminé les types de congruences linéaires de classe un, c'est-à-dire les congruences linéaires telles qu'une droite quelconque ne soit en général la bisécante que d'une seule cubique de la congruence.

Nous avons d'autre part rencontré, dans des travaux publiés de 1908 à 1911, de nombreux types de congruences linéaires de cubiques gauches.

Le second problème est, au contraire du premier, complètement résolu par un théorème de M. Enriques [1].

On peut toujours trouver une transformation birationelle de l'espace transformant les cubiques gauches d'une congruence linéaire en les droites d'une gerbe.

Dans la première partie de cette note, nous démontrerons d'une façon élémentaire le théorème de M. Enriques, en construisant la transformation birationnelle.

Dans la deuxième partie, après avoir démontré qu'une congruence d'ordre deux formée de cubiques gauches est rationnelle, nous construirons une transformation (1, 2) changeant cette congruence en une gerbe de droites.

§ 1. — *Congruences linéaires de cubiques gauches.*

1. — Soit Σ une congruence linéaire de cubiques gauches C. Les cubiques C découpent, sur un plan générique de l'espace, des groupes de trois points formant une involution. Or, M. Castelnuovo a démontré [2] qu'une involution plane est rationnelle; par conséquent : *la congruence Σ est rationnelle.*

2. — Considérons une congruence linéaire G de droites *d*, une collinéation Ω et un point P ne possédant aucune propriété particulière par rapport à la congruence Σ.

Σ étant rationnelle, on peut établir, entre les courbes C

[1] *Mathematische Annalen,* 1895. En réalité, le théorème de M. ENRIQUES est plus complet, il s'étend aux congruences linéaires de courbes gauches rationnelles d'ordre impair.

[2] *Mathematische Annalen,* 1893.

de Σ et les droites d de G, une correspondance birationnelle T, par un procédé que nous laissons indéterminé.

Considérons un point A. Par A passe une droite d de G et en général une seule. A cette droite d, T fait correspondre une cubique C de Σ. Par P passe une seule bisécante b de C (en général). A cette bisécante, Ω fait correspondre une droite ne passant pas en général par A. Cette droite détermine, avec A, un plan auquel Ω fait correspondre un plan passant par b et rencontrant C en un seul point B, non situé sur b. Remarquons que lorsque A décrit une droite d de G, B décrit la cubique correspondante de Σ.

Inversement, partons d'un point B et faisons les constructions nous ramenant à un point A. Par B passe une cubique C de Σ et en général une seule. Par P passe une bisécante b de C. T fait correspondre à C une droite d de G et Ω fait correspondre au plan (b, B) un plan rencontrant d en général en un seul point A.

Nous venons de définir, entre les points A et B, une correspondance birationnelle changeant une cubique C de Σ en une droite d de G ; par suite :

On peut toujours transformer birationnellement une congruence linéaire de cubiques gauches en une congruence linéaire de droites.

En particulier, une congruence linéaire de droites étant birationnellement identique à une gerbe de rayons, le théorème que nous avons en vue est démontré.

3. — Dans certains cas, la construction de la correspondance (A, B) peut être simplifiée. Si par exemple les cubiques gauches C de Σ ont une bisécante fixe δ, on prendra le point P sur cette droite. Les droites que nous avons désignées plus haut par b se confondent toutes avec δ. Il n'est plus nécessaire de définir une collinéation Ω, mais seulement une projectivité entre le faisceau de plans d'axe δ et un faisceau de plans dont l'axe ne passe par aucun point singulier de G. Une étude approfondie de cette transformation conduirait sans doute à la détermination de tous les types de congruences linéaires de cubiques gauches ayant une bisécante fixe.

§ 2. — *Congruences d'ordre deux de cubiques gauches.*

4. — Soit maintenant Σ une congruence d'ordre deux, formée de cubiques gauches C. Les cubiques de Σ passant par les points de l'une d'entre elles, forment une surface Φ, sur laquelle elles constituent un faisceau rationnel de courbes rationnelles, sauf dans le cas où les ∞^2 courbes de Σ se distribuent en ∞^1 systèmes d'indice 2 situés sur ∞^1 surfaces Φ'. Il résulte d'un théorème bien connu dû à M. Nœther, que Φ est rationnelle. Imaginons une surface F dont les points représentent, sans exception, les courbes C de Σ. Aux surfaces Φ correspondent, sur F, des courbes rationnelles Γ. Or, d'après un théorème de MM. Castelnuovo et F. Enriques[1], F, contenant un système continu de courbes rationnelles, est rationnelle.

Reste à examiner le cas où les cubiques de Σ se distribuent sur ∞^1 surfaces Φ' en formant sur chacune de ces surfaces un système d'indice deux. Il est alors facile de démontrer que les surfaces Φ' sont rationnelles. De plus, ces surfaces forment un faisceau, sans quoi Σ serait d'ordre supérieur à deux. La surface F, définie comme plus haut, contient un faisceau de courbes rationnelles (image des Φ) et est donc rationnelle.

Par suite :

Une congruence d'ordre deux, formée de cubiques gauches, est rationnelle.

5. — La congruence Σ, d'ordre deux, étant rationnelle, on peut établir entre cette congruence et une congruence linéaire G de droites *d* une correspondance birationnelle T.

Considérons en outre une collinéation Ω et un point P, sans relation avec la congruence Σ.

Par un point A passe une seule droite de G. A cette droite correspond, par T, une cubique C de Σ. Par P passe une seule bisécante *b* de cette courbe C. A *b* correspond, par Ω, une droite déterminant (en général) un plan avec A. A ce

---

[1] *Annali di Matematica,* 1901.

plan correspond un plan passant par b et rencontrant C, en dehors de cette droite, en un point B que nous dirons par définition correspondre à A.

Inversement, par un point B passent deux cubiques C_1, C_2 de Σ et T fait correspondre à ces cubiques deux droites d_1, d_2 de G. Par P passent deux droites b_1, b_2 bisécantes respectivement de C_1, C_2. Aux plans (B, b_1), (B, b_2), Ω fait correspondre deux plans rencontrant respectivement les droites d_1, d_2 en deux points A_1, A_2.

On a établi ainsi, entre les points A, B, une correspondance (2, 1) qui fait correspondre à une droite de G une cubique gauche de Σ et inversement, une cubique gauche de Σ à deux courbes dont l'une est une droite de G. Par suite :

Etant donnée une congruence d'ordre deux formée de cubiques gauches, il est toujours possible de construire une transformation (2, 1) qui fasse correspondre les droites d'une congruence linéaire aux cubiques de cette congruence.

Ramscappelle, 10 décembre 1915.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos du problème XXVIII de la Géométrographie de Lemoine.

Démonstration élémentaire[1] *de la solution due à* M. Maurice d'Ocagne

par Fr. Redl (St-Poelten).

Le problème XXVIII de la *Géométrographie* de Lemoine *(collection Scientia)* est énoncé comme suit : *Par un point* A, *mener une droite au point de concours inaccessible de deux droites* BB′, CC′. Le tracé donné par l'auteur est dû à M. Maurice d'Ocagne (*Journ. de Math. Elém.* de Longchamps, 1886, p. 59).

La solution suivante est obtenue par la considération de la bissectrice d'un angle et de la projection parallèle et respectivement de la projection centrale de la figure.

---

[1] Traduit de l'allemand par A. Staempfli, Zurich.