

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 18 (1916)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** NOTE SUR UN APPAREIL PROPRE A RÉSOUDRE  
MÉCANIQUEMENT LES ÉQUATIONS DE FREDHOLM  
**Autor:** Ballif, L.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-16873>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# NOTE SUR UN APPAREIL PROPRE A RÉSOUDRE MÉCANIQUEMENT LES ÉQUATIONS DE FREDHOLM

PAR

L. BALLIF (Aux armées françaises).

---

L'équation de Fredholm est de la forme :

$$f(x) + \int_a^b F(x, t) \varphi(t) dt = \varphi(x) \quad (1)$$

l'inconnue est la fonction  $\varphi$ ; les données sont les fonctions  $f(x)$  et  $F(x, t)$ .

Nous allons essayer de trouver la solution de cette équation en nous basant sur l'incompressibilité des liquides.

Donnons à  $x$  une valeur constante  $x = x_i$ . L'équation (1) devient

$$f(x_i) + \int_a^b F(x_i, t) \varphi(t) dt = \varphi(x_i) .$$

Nous pouvons remplacer l'intégrale par sa valeur approximative

$$\frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{j=n} F(x_i, t_j) \varphi(t_j)$$

obtenue en divisant en  $n$  parties égales l'intervalle  $b-a$ , de sorte que

$$t_j = a + j \frac{b-a}{n} .$$

On a donc finalement à résoudre le système d'équations

$$f(x_i) + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{b-a}{n} F(x_i, t_j) \varphi(t_j) = \varphi(x_i) \quad (2)$$

si l'on donne à  $x$  les  $n$  valeurs

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n} \quad \text{de } i = 1 \text{ à } i = n.$$

Si l'on trace dans le plan horizontal deux axes  $Ox$ ,  $Ot$ , et si l'on considère le carré de côtés  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $t = a$ ,

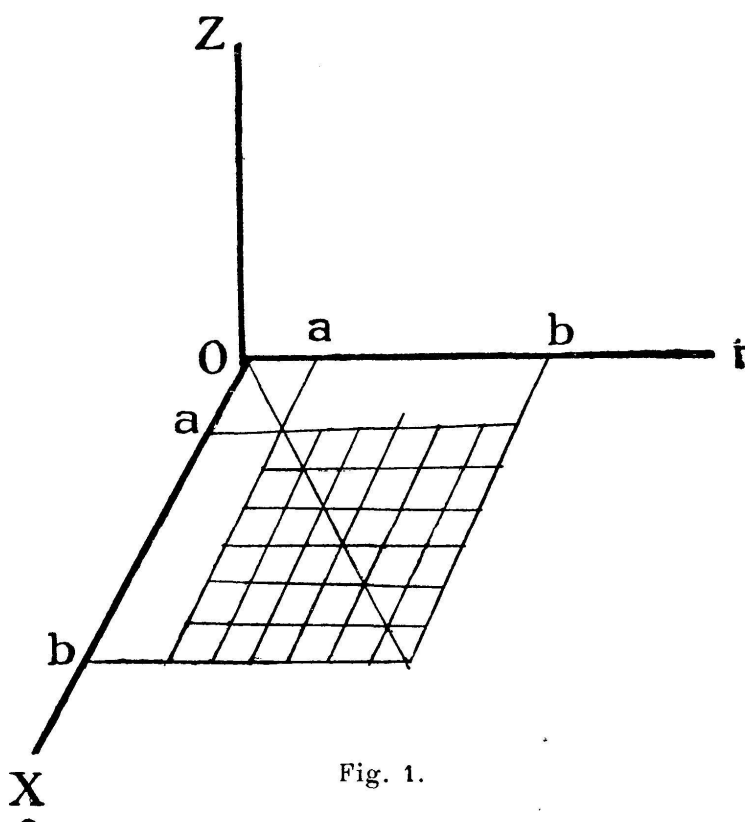


Fig. 1.

$t = b$ , cela revient à le décomposer en  $n^2$  carrés de côté  $\frac{b-a}{n}$ , et à ne considérer parmi les valeurs des fonctions  $F$ ,  $\varphi$  et  $f$  que celles qui correspondent aux sommets de ces carrés.

Ceci posé, reprenons l'équation

$$f(x_i) + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{b-a}{n} F(x_i, t_j) \varphi(t_j) = \varphi(x_i)$$

où nous considérons  $x_i$  comme une constante donnée et  $t_j$  comme la variable. Pour simplifier l'exposition nous supposons d'abord que l'on a  $f(x_i) = 0$ , de sorte que l'équation s'écrive

$$\sum_{j=1}^{j=n} \frac{b-a}{n} F(x_i, t_j) \varphi(t_j) = \varphi(x_i).$$

Considérons alors une cavité pleine de liquide, dont la paroi soit formée, d'une part, de  $n$  petits cylindres de verre

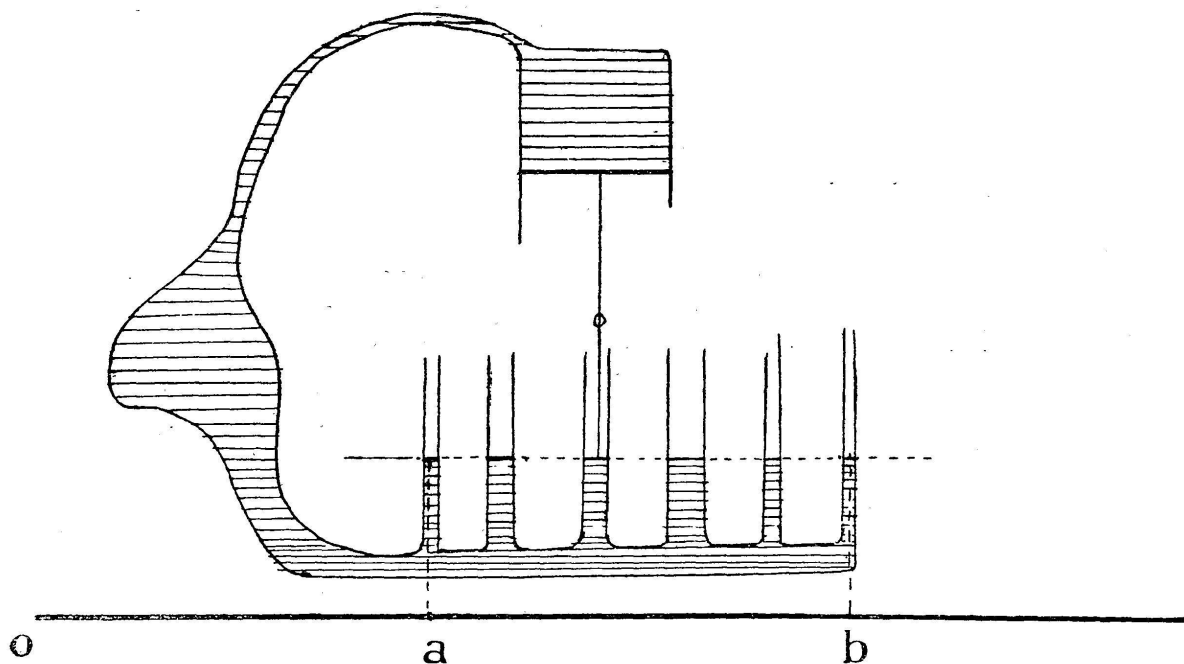


Fig. 2.

à axes verticaux, correspondants aux valeurs  $j = 1, j = 2, \dots, j = n$ , situés à la distance  $\frac{b-a}{n}$  les uns des autres, et tels que la surface de la section du  $j^{\text{ième}}$  soit égale à  $\frac{b-a}{n} F(x_i, t_j)$ , et d'autre part d'un gros cylindre dont l'axe vertical coïncide avec celui du petit cylindre pour lequel  $i = j$ , et dont la surface de la section soit égale à l'unité. Ce gros cylindre se projettera sur la diagonale du carré passant par O, puisque  $i = j$ .

Dans les  $n$  petits cylindres pourront se mouvoir à frottement doux de petits pistons étanches, et dans le gros cy-

lindre un gros piston relié par une tige verticale de longueur invariable au petit piston situé au-dessous de lui.

Cela posé, supposons que les  $n$  petits pistons soient placés initialement dans un même plan horizontal et que nous leur donnions des déplacements verticaux arbitraires que nous compterons à partir de ce plan horizontal, et que nous pouvons appeler  $\varphi(t_j)$ . Si nous prenons la seule précaution de vérifier que tous les pistons sont en contact avec le liquide, les déplacements  $\varphi(t_j)$  satisferont à la relation

$$\sum_{j=1}^{j=n} \frac{b-a}{n} F(x_i, t_j) \varphi(t_j) = \varphi(x_i)$$

puisque cette relation exprime que la variation du volume occupé par le liquide est nulle. En effet, la variation de volume de chaque petit cylindre est  $\varphi(t_j) \cdot \frac{b-a}{n} F(x_i, t_j) = \text{déplacement} \times \text{section}$ . Quant à la variation de volume du gros cylindre, elle a lieu en sens inverse et est  $-\varphi(x_i)$ , puisque le déplacement de son piston est égal à celui du petit piston pour lequel  $i = j$ , c'est-à-dire pour lequel  $x_i = t_j$ .

Ceci bien établi, levons la restriction que nous avons faite et supposons  $f(x_i)$  différent de zéro. Nous n'aurons pour cela qu'à déplacer le gros piston de la quantité  $f(x_i)$  avant d'établir la liaison qui le réunit au petit piston placé au-dessous de lui, en maintenant fixes dans leur plan horizontal initial tous les petits pistons, et à leur donner, seulement après, leurs déplacements  $\varphi(t_j)$ . (Une petite difficulté se présente ici : si  $f(x_i)$  est négatif, on ne pourra donner le déplacement qui tendrait à comprimer le liquide. Pour tourner la difficulté, on pourra ménager un cylindre auxiliaire qui permettra la diminution de volume momentanée et que l'on ramènera à sa position initiale dès que l'on aura permis aux petits pistons de se mouvoir en restant au contact du liquide.)

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre le système des équations (2). Construisons en effet  $n$  cavités analogues à celle que nous venons d'étudier, et correspondant aux valeurs  $i = 1, 2, \dots, n$ . Disposons-les parallèlement au

plan  $zOt$  de façon que les axes des cylindres passent par les sommets des petits carrés de côté  $\frac{b-a}{n}$  que nous avons construits, et que le plan horizontal initial du niveau liquide soit le plan  $zOx$ .

Astreignons enfin les déplacements  $\varphi(t_j)$  à être les mêmes dans chaque file de cylindre parallèle à  $Ox$ . Pour réaliser

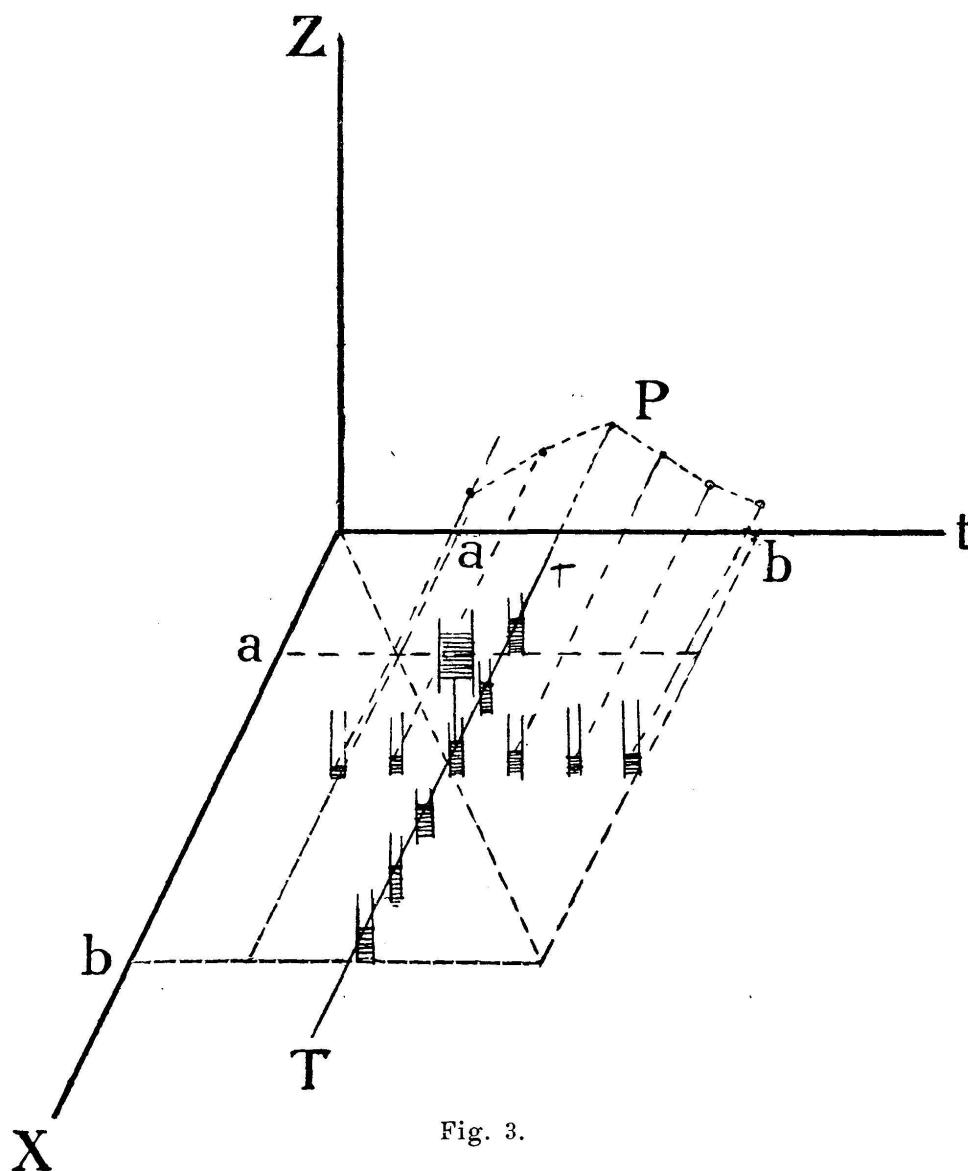


Fig. 3.

cette liaison, nous ferons passer une tige rigide  $T$ , astreinte à rester parallèle à  $Ox$ , dans des anneaux fixés à chacun des petits pistons (un dispositif mécanique facile à imaginer élimine la difficulté due à l'obstacle présenté par le verre du cylindre; par exemple l'anneau pourra être porté par une tige parallèle à la tige du piston, voisine de celle-ci et faisant

corps avec elle, mais placée à l'extérieur du cylindre, fig. 4). Il y aura donc  $n$  tiges correspondant aux  $n$  files de cylindres parallèles à  $Ox$ . Nous enfilerons successivement ces  $n$  tiges dans les  $n$  files de cylindres parallèles à  $Ox$ , et à chaque opération nous diminuerons de  $n$  le nombre définissant le

degré de liberté du système, de sorte qu'à la dernière opération, la position du système sera parfaitement déterminée.

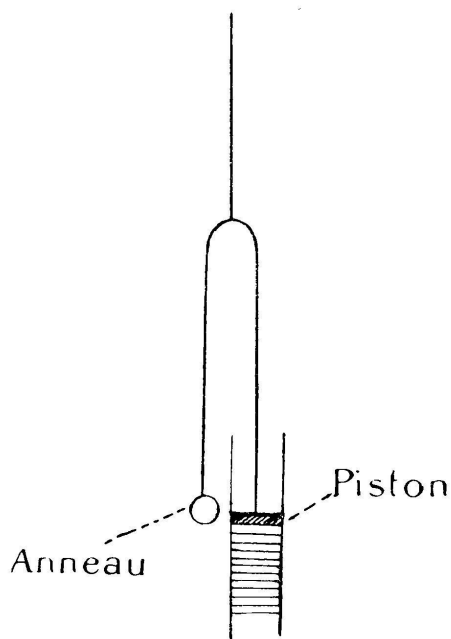


Fig. 4.

A ce moment les projections sur le plan  $zOt$  des  $n$  tiges rigides seront les sommets d'un polygone  $P$  inscrit dans la courbe cherchée  $z = \varphi(t)$ , polygone qui se rapprochera d'autant plus de cette courbe que le nombre  $n$  aura été choisi plus grand.

*Remarque I.* Lorsqu'un terme  $F(x_i, t_j)$  est négatif, il faut établir la communication de la cavité et du cylindre correspondant par le

haut, au lieu de la faire par le bas, comme il a été représenté dans la figure.

II. Le cas des équations homogènes est celui où  $f(x)$  est nulle. Il n'aura pas en général de solution. Pour les chercher, on fera varier le volume des gros cylindres, celui des petits restant fixe, et lorsqu'on aura un mouvement possible on sera dans le cas des constantes caractéristiques.

III. L'équation de Fredholm étant linéaire en  $\varphi$ , se prête au calcul par approximation successive. Donc, quand l'appareil aura fourni une solution approchée, il pourra en fournir une autre plus approchée, et ainsi de suite.