Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1916)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

Autor: Turrière, Emile

Kapitel: Arithmotriangles héroniens particuliers.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16872

mum imposé entre les centres α_1, α_2, α_3 des trois cercles imposés et les sommets de l'arithmotriangle héronien désiré. Il suffit de substituer au cercle passant par $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ un cercle concentrique à rayon rationnel différent du rayon du précédent de moins de $\frac{1}{2}\varepsilon$; soient alors β_1, β_2, β_3 les points de la nouvelle circonférence qui sont les plus rapprochés de α_1, α_2, α_3. Sur cet arithmocercle de rayon rationnel, on pourra toujours trouver trois arithmopoints repérés par des azimuts dont les tangentes des quarts soient rationnelles et tels que l'on aît :

$$\overline{M_1\beta_1} < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad \overline{M_2\beta_2} < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad \overline{M_3\beta_3} < \frac{\varepsilon}{2}\;;$$

ces trois points $M_1\,M_2\,M_3$ sont alors respectivement situés à des distances de $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ inférieures à ε ; de sorte que l'arithmotriangle héronien $M_1\,M_2\,M_3$ répond à la question.

Reste enfin le cas où les trois centres α_1, α_2, α_3 des trois cercles imposés ne sont pas des arithmopoints. Il suffira de leur substituer trois arithmopoints α'_1, α'_2, α'_3 respectivement intérieurs aux cercles imposés. De ces points $\alpha'_1\,\alpha'_2\,\alpha'_3$ comme centres, on décrira trois cercles respectivement intérieurs aux trois premiers et à rayons rationnels. Le problème, étant possible pour l'ensemble de ces derniers trois cercles, le sera *a fortiori* pour les cercles primitivement donnés.

Arithmotriangles héroniens particuliers.

13. — Il est possible de rattacher, de deux manières distinctes, les arithmotriangles héroniens particuliers, tels que les quatre facteurs p, $p-a$, $p-b$ et $p-c$ qui figurent dans l'expression classique

$$S^2 = p.(p-a).(p-b).(p-c)\,,$$

du carré de la surface d'un triangle de côtés a, b et c soient les carrés de quatre nombres rationnels, à la théorie des points rationnels de l'arithmosphère.

Première représentation de ces triangles héroniens. Posons, en mettant en évidence les racines supposées rationnelles des segments déterminés sur les côtés par les points de contact avec le cercle inscrit :

$$p = R^2 , \qquad p - a = x^2 , \qquad p - b = y^2 , \qquad p - c = z^2 ;$$

R, x, y, z sont quatre nombres rationnels positifs, par hypothèse, évidemment reliés par la relation unique :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 .$$

Tout arithmotriangle héronien de l'espèce envisagée est donc associable à un point rationnel de la partie, située dans le trièdre des directions positives des axes coordonnés, d'une arithmosphère de centre O *et de rayon rationnel.*

Par une projection stéréographique, *il est donc possible d'établir une correspondance entre tout point rationnel du plan et un arithmotriangle héronien de l'espèce considérée.*

Les formules de représentation de ces arithmotriangles héroniens sont, en fonction des coordonnées ξ et η du point image du plan $\omega\xi\eta$:

$$a = R^2 \frac{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2 - 4\xi^2}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2} = R^2 \frac{[\eta^2 + (\xi + 1)^2][\eta^2 + (\xi - 1)^2]}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2} ,$$

$$b = R^2 . \frac{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2 - 4\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2} = R^2 . \frac{[\xi^2 + (\eta + 1)^2][\xi^2 + (\eta - 1)^2]}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2} ,$$

$$c = 4R^2 . \frac{\xi^2 + \eta^2}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2} ,$$

De ces formules résultent les suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} a - b &= 4R^2 \frac{\eta^2 - \xi^2}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2} , \\ b - c &= R^2 . \frac{(\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 - 4\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2} , \\ a - c &= R^2 \frac{(\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 - 4\xi^2}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2} ; \end{aligned} \right.$$

elles permettent de discuter l'ordre de grandeur des côtés du triangle héronien d'après la position du point image dans le plan $\omega\xi\eta$. Les régions correspondantes aux divers cas possibles sont séparées les unes des autres par des courbes très simples : deux droites $\eta + \xi = 0$ et $\eta - \xi = 0$, et quatre circonférences :

$$\xi^2 + \eta^2 + 2\eta - 1 = 0 , \qquad \xi^2 + \eta^2 - 2\eta - 1 = 0 ,$$
$$\xi^2 + \eta^2 + 2\xi - 1 = 0 , \qquad \xi^2 + \eta^2 - 2\xi - 1 = 0 .$$

14. — *Extension à certains arithmoquadrilatères inscriptibles.* Aux arithmotriangles héroniens qui viennent d'être déterminés se rattachent des quadrilatères inscriptibles à surface rationnelle qui méritent d'être mentionnés ici.

Observons que la surface d'un quadrilatère plan, inscriptible dans un cercle, est exprimée par la formule

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} ,$$

en fonction des côtés a, b, c, d. Il y a lieu de considérer, au titre de généralisation des arithmotriangles précédents, ceux des quadrilatères inscriptibles tels que les quatre facteurs $p - a$, $p - b$, $p - c$, $p - d$ soient simultanément carrés parfaits. Posant

$$p - a = x^2 , \qquad p - b = y^2 , \qquad p - c = z^2 , \qquad p - d = t^2 ,$$

on aura :

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2p .$$

Dans ces conditions, donnons-nous un périmètre arbitraire $2p$ et observons que le théorème de Bachet est susceptible d'être étendu aux nombres rationnels. Le théorème de Bachet proprement dit consiste dans le fait que tout nombre entier N est de la forme en nombres entiers :

$$N = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 ;$$

il en résulte que l'inverse d'un entier est de la même forme en nombres rationnels, en vertu de l'expression suivante de $\frac{1}{N}$:

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2+t^2} = \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2+t^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2+t^2}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2+t^2}\right)^2 + \left(\frac{t}{x^2+y^2+z^2+t^2}\right)^2 ;$$

on sait enfin que le produit de deux expressions algébriques sommes de quatre carrés est lui aussi somme de quatre carrés. Tout nombre rationnel est donc décomposable en une somme de quatre carrés de nombres rationnels, cette décomposition résultant de celles des divers facteurs qui figurent aux deux termes du nombre rationnel considéré.

Nous supposons donc le périmètre $2p$ ainsi décomposé en une somme de quatre carrés de nombres rationnels ; de cette décomposition particulière il est aisé de déduire une décomposition générale, car nous nous trouvons en présence d'une arithmohypersphère de l'espace à quatre dimensions dont un arithmopoint particulier est connu et à laquelle il suffit d'appliquer les formules du § 9.

Il existe donc une infinité de quadrilatères inscriptibles de l'espèce considérée, admettant un périmètre arbitrairement imposé et dont la détermination s'effectue à l'aide du théorème de Bachet et de la considération d'une arithmohypersphère (avec trois paramètres arbitraires, en plus du périmètre).

15. — *Deuxième méthode de détermination de ces triangles. Leur construction géométrique.* Donnons-nous un triangle ABC, dans le plan de comparaison ; ce triangle est quelconque, ses côtés a, b, c étant supposés toutefois mesurés par des nombres rationnels. Il existe un système de trois sphères, juxtaposées sur un plan horizontal qui leur est tangent en A, B et C. Soient α, β, γ leurs centres respectifs ; leurs rayons sont définis par des formules :

$$R_\alpha = \frac{bc}{2a}, \qquad R_\beta = \frac{ca}{2b}, \qquad R_\gamma = \frac{ab}{2c} ;$$

c'est-à-dire encore

$$R_\alpha = \frac{2abc}{4a^2}, \qquad R_\beta = \frac{2abc}{4b^2}, \qquad R_\gamma = \frac{2abc}{4c^2} .$$

Le produit $2abc$ est ou non le carré d'un nombre rationnel. En tous cas, une similitude permet de transformer le triangle ABC en un triangle tel que $2abc$ soit carré d'un nombre rationnel : si l'on pose, en effet, $a_1 = \lambda a \quad b_1 = \lambda b \quad c_1 = \lambda c$, on a

$$2a_1 b_1 c_1 = 2abc \, . \, \lambda^3 \; ;$$

il suffit de prendre

$$\lambda = \frac{k^2}{2abc} \, ,$$

k étant un nombre rationnel arbitraire, pour obtenir un triangle semblable à ABC et tel que le produit $2a_1 b_1 c_1$ soit carré. Je supposerai dorénavant que cette opération préliminaire a été effectuée. De ce fait, les rayons des trois sphères sont trois carrés de nombres rationnels. Le triangle $\alpha\beta\gamma$ des trois centres des sphères considérées est donc tel que les six segments, deux à deux égaux, déterminés sur ses côtés par les points de contact avec le cercle inscrit sont les carrés de nombres rationnels. Pour qu'un tel triangle $\alpha\beta\gamma$ soit de l'espèce que j'étudie actuellement, il faut et il suffit, en outre, que son demi-périmètre soit lui aussi carré d'un nombre rationnel ; l'expression

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \, ,$$

et, par suite, la somme des carrés des trois hauteurs du triangle ABC doivent être les carrés de deux nombres rationnels. D'où la construction suivante :

On considérera un point quelconque rationnel de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \, ,$$

tel que ses trois coordonnées puissent être considérées comme les trois hauteurs d'un triangle ; parmi les triangles semblables à celui-ci, on en choisira un ABC *à côtés rationnels et dont le double produit de ces côtés soit le carré d'un nombre rationnel. Le triangle des trois centres des sphères tangentes deux à deux et toutes trois tangentes au plan du triangle* ABC *en ses sommets respectifs sera un arithmotriangle héronien de l'espèce actuellement envisagée.*

La construction géométrique des trois sphères est des plus simples ; il suffit d'effectuer une inversion dont le pôle soit un sommet, A par exemple ; les sommets B et C deviennent deux points B′ et C′. On construit alors immédiatement deux sphères tangentes entre elles, et toutes deux tangentes respectivement en B′ et C′ au plan de comparaison. Par la même inversion, le système constitué par ces deux nouvelles sphères et par leur plan tangent commun horizontal, autre que le plan de comparaison, se transforme en les trois sphères désirées.

Il reste à discuter la possibilité de la construction du triangle ABC défini par ses trois hauteurs, construction qui se ramène immédiatement à celle d'un triangle connaissant les trois côtés. Je supposerai que l'ordre imposé aux côtés a, b, c soit : $a < b < c$; que x, y, z soient respectivement les inverses de a, b, c et enfin que les relations entre la sphère et sa représentation stéréographique soient exprimées par les formules :

$$x = \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2 + 1}, \quad y = \frac{2\eta}{\xi^2 + \eta^2 + 1}, \quad z = \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{\xi^2 + \eta^2 + 1} ;$$

on doit donc discuter les inégalités :

$$x > y > z > 0, \quad c < a + b \quad \text{ou} \quad \frac{1}{z} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

qui donnent :

$$\xi > 0, \quad \eta > 0, \quad \xi > \eta, \quad 2\eta > \xi^2 + \eta^2 - 1 > 0,$$
$$2\xi\eta < (\xi + \eta)(\xi^2 + \eta^2 - 1) ;$$

finalement, l'image (ξ, η) du point de la sphère doit être intérieure à un certain triangle mixtiligne $\alpha\beta\gamma$, ayant pour sommets le point $\alpha(\xi = 1, \eta = 0)$, le point $\beta\left(\xi = \eta = \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ et le point $\gamma(1, 1)$; ses côtés sont un segment $\beta\gamma$ de la bissectrice $\xi = \eta$, un arc de cercle $\alpha\beta$ et enfin un arc $\alpha\gamma$ de la cubique circulaire représentée par l'équation

$$(\xi + \eta)(\xi^2 + \eta^2 - 1) - 2\xi\eta = 0,$$

16. — Les côtés a, b, c d'un triangle de l'espèce qui vient d'être considérée dans les paragraphes précédents, c'est-à-dire tels que p, $p - a$, $p - b$, $p - c$ soient des carrés parfaits étant reliés à un point (x, y, z) de la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

par les formules

$$a = R^2 - x^2 \ , \qquad b = R^2 - y^2 \ , \qquad c = R^2 - z^2 \ ,$$

la condition

$$2b = a + c$$

moyennant laquelle ces côtés seraient en progression arithmétique devient :

$$2y^2 = x^2 + z^2 \ ;$$

elle peut être écrite sous la forme équivalente :

$$3y^2 = R^2 \ .$$

De l'impossibilité de cette dernière équation, il résulte donc qu'*il n'existe aucun triangle de l'espèce considérée dont les côtés soient en progression arithmétique.*

Voici encore une curieuse proposition négative concernant ces mêmes triangles. La condition pour que le triangle de côtés a, b, c soit rectangle,

$$a^2 + b^2 = c^2 \ ,$$

devient ici

$$Rz = xy \ ;$$

la quartique gauche intersection du paraboloïde hyperbolique représenté par cette équation et de la sphère $x^2+y^2+z^2 = R^2$ a pour image, dans une projection stéréographique, une quartique plane d'équation :

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - 1 = 4\xi\eta \ .$$

La surface d'un triangle de la même nature est :

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = Rxyz = R^4 . \frac{4\xi\eta(\xi^2 + \eta^2 - 1)}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^3} \ ;$$

cette surface sera mesurée par un carré parfait si le nombre

$$\xi\eta\,[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 1]$$

est un carré. Il résulte de ces deux remarques que, si un triangle de l'espèce considérée était rectangle, sa surface serait mesurée par un carré parfait, ce qui serait contraire à un théorème de Fermat sur les triangles pythagoriques. Par suite :

Aucun triangle de l'espèce considérée ne saurait être un triangle rectangle.

Le problème des distances rationnelles.

17. — D'une façon générale, étant donnés, dans le plan ou dans l'espace, une arithmocourbe (C) et un arithmopoint A, j'appellerai problème des distances rationnelles relatif à cette arithmocourbe et à l'arithmopoint donné le problème suivant: déterminer parmi les arithmopoints de l'arithmocourbe (C) ceux qui sont situés à une distance rationnelle de l'arithmopoint.

Tout d'abord, il y a lieu de se rendre compte de la réduction du problème des distances rationnelles à l'étude arithmogéométrique d'une autre courbe plane. Soient, en effet, les expressions rationnelles en fonction d'un paramètre t,

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t),$$

des coordonnées de l'arithmopoint courant M de l'arithmocourbe (C); soient d'autre part a, b, c les coordonnées rationnelles de l'arithmopoint imposé A. Les axes coordonnés étant essentiellement rectangulaires, on posera :

$$\overline{AM}^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = [f(t)]^2 \cdot g(t)$$

$f(t)$ et $g(t)$ étant des fonctions rationnelles de t; la seconde, $g(t)$, ne contient aucun facteur carré. De cette expression, il résulte que le problème des distances rationnelles équivaut, dans le cas le plus général, à la recherche des arithmopoints de la courbe représentée par l'équation $Y^2 = g(X)$.

18. — *Le problème des distances rationnelles pour une*