Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1916)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE
Autor: Turrière, Emile
Kapitel: arithmotriangles héroniens.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16872

sentation, il est possible, d'autre part, d'étendre aux hypersphères les propriétés de la représentation stéréographique qui est, elle aussi, une representation propre.

Les arithmotriangles héroniens.

10. — Le problème des arithmotriangles héroniens consiste à déterminer les triangles tels que, les côtés étant rationnels, la surface soit aussi un nombre rationnel. Il résulte de cette définition que, dans tout arithmotriangle héronien, les mesures des divers éléments linéaires (longueurs des côtés, longueurs des hauteurs, rayons des cercles inscrits et ex-inscrits, rayon du cercle circonscrit, segments déterminés sur les côtés par les hauteurs) et enfin la surface et les nombres trigonométriques des angles du triangle sont des nombres rationnels.

La détermination des arithmotriangles héroniens généraux peut être effectuée de diverses manières. Il est d'abord possible de faire dériver leur construction de celle des arithmotriangles rectangles pythagoriques. Etant donnés, en effet, deux arithmotriangles rectangles pythagoriques, on peut, par similitudes convenables, rendre égales deux cathètes appartenant respectivement aux deux triangles rectangles; en juxtaposant ensuite les deux cathètes égales, de manière que les deux autres cathètes soient alignées, on constitue un arithmotriangle héronien acutangle et un arithmotriangle héronien obtusangle, suivant que les deux triangles juxtaposés sont de part et d'autre ou non de la cathète commune.

Une seconde méthode de construction générale des arithmotriangles héroniens résulte de la rationalité du rayon du cercle circonscrit et des nombres trigonométriques de ses angles. Il suffit donc de se donner un premier nombre rationnel R qui sera le rayon du cercle circonscrit, et deux autres nombres y et z, rationnels tous deux et assujettis aux inégalités suivantes :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} > z > 0 \,, \qquad \sqrt{1+z^2} - z > y > z \,;$$

en posant alors :

$$\operatorname{tang} A : 2 = \frac{1 - yz}{y + z}, \qquad \operatorname{tang} B : 2 = y, \qquad \operatorname{tang} C : 2 = z,$$

on obtient un arithmotriangle héronien dont les côtés ont pour expressions :

$$a = 4R \cdot \frac{(y+z)(1-yz)}{(1+y^2)(1+z^2)}; \qquad b = 4R \cdot \frac{y}{1+y^2}; \qquad c = 4R \cdot \frac{z}{1+z^2};$$

les inégalités imposées aux nombres rationnels y et z sont celles qui assurent l'ordre suivant des côtés du triangle :

$$a > b > c;$$

cet avantage des formules précédentes, qui permettent d'obtenir tous les arithmotriangles héroniens au moyen de trois nombres rationnels R, y et z, quelconques et uniquement assujettis à des conditions de grandeur, compense largement l'inconvénient qui résulte de la dissymétrie de ces formules.

11. — Arithmotriangles a cotés en progression arithmétique. La méthode qui vient d'être indiquée pour déterminer tous les arithmotriangles héroniens permet de résoudre simplement une question qu'il est tout naturel de se poser. On sait, en effet, que tous les arithmotriangles pythagoriques à côtés en progression arithmétique sont semblables au triangle rectangle de côtés 3, 4 et 5 des harpedonaptes égyptiens et qui fut initialement considéré par Pythagore. C'est d'autre part à un triangle de côtés 13, 14, 15 que *Héron d'Alexandrie* appliqua pour la première fois la formule, par lui découverte, exprimant la surface d'un triangle en fonction des mesures des côtés. Ce même triangle de côtés 13, 14, 15 figure aussi dans l'une des questions posées en 1536 par Zuane di Coi à Tartaglia, l'intérêt de cette question résidant précisément dans le fait que diverses lignes tracées dans le triangle considéré sont mesurées par des nombres rationnels.

Il est donc intéressant de déterminer la formule générale donnant tous les arithmotriangles héroniens à côtés en progression arithmétique. La condition est, pour l'ordre $a > b > c$ des côtés,

$$2b = a + c\ ;$$

par l'utilisation des formules précédentes, cette condition devient :

$$\frac{2y}{1+y^2} = \frac{3}{1+z^2} + \frac{(y+z)(1-yz)}{(1+y^2)(1+z^2)}\ ,$$

c'est-à-dire :

$$y = \frac{2z}{1+3z^2}\ .$$

Les inégalités

$$\sqrt{1+z^2} - z > y > z$$

sont ici satisfaites, sous les seules conditions $\frac{1}{\sqrt{3}} > z > 0$. *Il existe donc une infinité d'arithmotriangles héroniens à côtés en progression arithmétique et dissemblables entre eux.* Ces triangles dépendent du paramètre rationnel arbitraire z, uniquement assujetti à la double condition d'être positif et inférieur à $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

12. — Une troisième méthode de détermination des arithmotriangles héroniens, générale et respectant la symétrie entre les éléments, consiste à rattacher la théorie de ces triangles à celle des arithmocercles. J'observerai, en effet, que la formule bien connue qui donne l'aire d'un triangle en fonction des coordonnées des sommets, sous la forme d'un déterminant, conduit à des triangles dont l'aire est rationnelle si les coordonnées des sommets sont six nombres rationnels. Il reste donc à assurer la rationalité des longueurs des trois côtés d'un tel triangle. En d'autres termes, puisqu'un cercle est un arithmocercle dès qu'il possède trois points rationnels, il faut se donner tout d'abord un arithmocercle quelconque du rayon rationnel, dans le plan. Ce cercle sera, par exemple, défini par son centre O et par un point A quelconque du plan, ces deux points O et A étant tous deux rationnels. Il s'agit maintenant de trouver, parmi l'infinité de points rationnels de la circonférence de cet arithmocercle, un groupe de trois points M_1, M_2 et M_3 dont les mesures des distances mutuelles soient des nombres rationnels.

Supposons que le rayon OA ait été choisi comme origine des arcs sur cette circonférence; les points M_1, M_2 et M_3 seront alors repérés par des arcs θ_1, θ_2 et θ_3. Ces trois points étant rationnels, les tangentes des arcs moitiés seront des nombres rationnels; mais cette triple condition n'assure point la rationalité des mesures des distances mutuelles des trois arithmopoints : il faut aussi que les sinus des moitiés des trois différences de ces arcs pris deux à deux soient des nombres rationnels, c'est-à-dire encore que tous les nombres trigonométriques des arcs $\frac{\theta_1}{2}$, $\frac{\theta_2}{2}$, $\frac{\theta_3}{2}$ soient rationnels. La condition pour qu'il en soit ainsi est que les tangentes des arcs $\frac{\theta_1}{4}$, $\frac{\theta_2}{4}$, $\frac{\theta_3}{4}$ soient rationnelles, et réciproquement d'ailleurs.

Nous arrivons ainsi à la construction définitive de ces arithmotriangles héroniens : *On se donnera un arithmocercle quelconque de rayon rationnel, sur lequel on marquera un point rationnel* A *arbitraire. Cet arithmopoint* A *servant d'origine des arcs, sur la circonférence, on marquera les trois points* M_1, M_2 *et* M_3 *de cette circonférence repérés par trois azimuts* θ_1, θ_2 *et* θ_3 *satisfaisant à l'unique condition que les tangentes trigonométriques de leurs quarts soient des nombres rationnels arbitrairement choisis.*

Les formules symétriques, qui correspondent à ce mode général de construction des triangles héroniens, s'obtiennent aisément. Il suffit de se donner quatre nombres rationnels quelconques R, λ_1, λ_2 et λ_3; le premier, essentiellement positif et différent de zéro, sera le rayon du cercle circonscrit; les trois autres seront les nombres :

$$\lambda_1 = \operatorname{tang} \frac{\theta_1}{4}, \qquad \lambda_2 = \operatorname{tang} \frac{\theta_2}{4}, \qquad \lambda_3 = \operatorname{tang} \frac{\theta_3}{4}.$$

La longueur du côté $M_1 M_2$, par exemple, est

$$\overline{M_1 M_2} = 2R \left| \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right|$$

c'est-à-dire :

$$\overline{M_1M_2} = 4R \cdot \frac{|(\lambda_2 - \lambda_1)(1 + \lambda_1\lambda_2)|}{(1 + \lambda_1^2)(1 + \lambda_2^2)} .$$

Les deux autres côtés ont des expressions qui se déduisent de celle-ci par permutations circulaires. Quant aux angles de l'arithmotriangle héronien, ils seront déterminés par des formules telles que les suivantes :

$$\widehat{M_3} = \frac{1}{2}|\theta_2 - \theta_1| , \qquad \text{tang}\frac{M_3}{2} = \left|\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2}\right| .$$

Ces considérations permettent d'établir la proposition suivante relative à la déformation continue des arithmotriangles héroniens et à l'existence d'un arithmotriangle héronien aussi voisin qu'on le veut d'un triangle imposé : *Etant donnés trois cercles arbitrairement et indépendamment choisis dans le plan, de rayons aussi petits qu'on le veut, il est toujours possible de trouver trois arithmopoints respectivement intérieurs aux trois cercles imposés et qui soient les sommets d'un arithmotriangle héronien.* En d'autres termes : *Etant donné un triangle quelconque, il existe toujours un arithmotriangle héronien dont les côtés soient aussi voisins qu'on le désire de ceux du triangle imposé.*

Pour établir cette proposition, je supposerai tout d'abord que les centres α_1, α_2, α_3 des trois petits cercles sont trois arithmopoints. Par eux passe une circonférence qui est nécessairement une arithmocirconférence ; elle peut d'ailleurs dégénérer en une arithmodroite. Si le rayon est rationnel, il sera possible de trouver sur cette circonférence trois points repérés par les azimuts θ_1, θ_2 et θ_3 tels que $\text{tg}\frac{\theta_1}{4}$, $\text{tg}\frac{\theta_2}{4}$, $\text{tg}\frac{\theta_3}{4}$ soient des nombres rationnels et respectivement aussi rapprochés qu'on le désirera des trois centres des cercles imposés. Les trois points ainsi déterminés seront alors les sommets d'un arithmotriangle héronien satisfaisant à la question.

Si, au contraire, le rayon de l'arithmocercle passant par α_1, α_2, α_3 n'est pas un nombre rationnel, soit ε l'écart minimum imposé entre les centres α_1, α_2, α_3 des trois cercles imposés et les sommets de l'arithmotriangle héronien désiré. Il suffit de substituer au cercle passant par $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$ un cercle concentrique à rayon rationnel différent du rayon du précédent de moins de $\frac{1}{2}\varepsilon$; soient alors β_1, β_2, β_3 les points de la nouvelle circonférence qui sont les plus rapprochés de α_1, α_2, α_3. Sur cet arithmocercle de rayon rationnel, on pourra toujours trouver trois arithmopoints repérés par des azimuts dont les tangentes des quarts soient rationnelles et tels que l'on aït :

$$\overline{M_1\beta_1} < \frac{\varepsilon}{2}\ , \qquad \overline{M_2\beta_2} < \frac{\varepsilon}{2}\ , \qquad \overline{M_3\beta_3} < \frac{\varepsilon}{2}\ ;$$

ces trois points $M_1\,M_2\,M_3$ sont alors respectivement situés à des distances de $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ inférieures à ε ; de sorte que l'arithmotriangle héronien $M_1\,M_2\,M_3$ répond à la question.

Reste enfin le cas où les trois centres α_1, α_2, α_3 des trois cercles imposés ne sont pas des arithmopoints. Il suffira de leur substituer trois arithmopoints α'_1, α'_2, α'_3 respectivement intérieurs aux cercles imposés. De ces points $\alpha'_1\,\alpha'_2\,\alpha'_3$ comme centres, on décrira trois cercles respectivement intérieurs aux trois premiers et à rayons rationnels. Le problème, étant possible pour l'ensemble de ces derniers trois cercles, le sera *a fortiori* pour les cercles primitivement donnés.

Arithmotriangles héroniens particuliers.

13. — Il est possible de rattacher, de deux manières distinctes, les arithmotriangles héroniens particuliers, tels que les quatre facteurs p, $p - a$, $p - b$ et $p - c$ qui figurent dans l'expression classique

$$S^2 = p\,.\,(p - a)\,.\,(p - b)\,.\,(p - c)\ ,$$

du carré de la surface d'un triangle de côtés a, b et c soient les carrés de quatre nombres rationnels, à la théorie des points rationnels de l'arithmosphère.