Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1916)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DES EQUATIONS PRIMITIVES TRINOMES DU SECOND DEGRÉ

Autor: Hansen, H. E.

Kapitel: I. — L'équation $a + x^2 = y^2$.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16871

DES ÉQUATIONS PRIMITIVES TRINOMES DU SECOND DEGRÉ

PAR

H. E. HANSEN (Copenhague).

I. — *L'équation* $a + x^2 = y^2$.

p et q désignant des nombres entiers et premiers entre eux, pour p *pair,* q *impair* (ou vice versa), considérons l'identité

$$4pq + (p - q)^2 = (p + q)^2 \tag{I}$$

et pour p et q, *tous les deux impairs,* la suivante

$$pq + \left(\frac{p - q}{2}\right)^2 = \left(\frac{p + q}{2}\right)^2 \tag{II}$$

Ces identités nous fourniront des moyens pour résoudre l'équation donnée.

Si l'on veut employer (I), il faut que a puisse s'écrire $4pq$, où p doit être pair. Ainsi a aura au moins 2^3 comme facteur.

Exemple 1. $a = 4 . 2^\alpha \times$ *un nombre premier impair.*

Les valeurs pour α étant 1, 2, 3 ... , il s'ensuit que dans la formule (I) p sera 2^α et q le nombre premier donné. Ainsi nous n'aurons qu'une seule solution :

$$x = \pm (q - 2^\alpha) \qquad \text{et} \qquad y = q + 2^\alpha .$$

Exemple 2. $a = 4 . 2^\alpha \times$ *un nombre impair composé.*

Dans la formule (I) p et q seront les deux facteurs, premiers entre eux, de tous les *couples de facteurs* qui peuvent se former de 2^α et des facteurs premiers du nombre composé donné. Ainsi les facteurs 2^α, k^β et l^γ forment les couples :

$$\begin{array}{cccc} 1\,, & 2^\alpha\,, & k^\beta\,, & l^\gamma \\ 2^\alpha k^\beta l^\gamma & k^\beta l^\gamma & 2^\alpha l^\gamma & 2^\alpha k^\beta \end{array}$$

c'est-à-dire 2^{3-1} couples en tout.

Si l'on a donné les quatre facteurs, premiers entre eux, 2^α, k, l et m, ils fourniront les couples

$$\begin{array}{cccccccc} 1\,, & 2^\alpha\,, & k\,, & l\,, & m\,, & 2^\alpha k\,, & 2^\alpha l\,, & 2^\alpha m \\ 2^\alpha klm & klm & 2^\alpha lm & 2^\alpha km & 2^\alpha kl & lm & km & kl \end{array}$$

c'est-à-dire 2^{4-1} couples.

Pour n facteurs, on aura 2^{n-1} couples et par suite 2^{n-1} *solutions* de l'équation proposée.

Si l'on veut employer la formule (II), nous procéderons de la même manière.

Exemple 1. $a =$ *un nombre premier impair.*

Pour pq on met le nombre donné, a, et on n'aura que le seul couple de facteurs, a et 1, à poser dans la formule, respectivement pour p et q. Ainsi on n'aura que la seule solution :

$$x = \frac{a-1}{2} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{a+1}{2}\,.$$

Exemple 2. $a =$ *un nombre impair, composé de* n *facteurs premiers.*

Comme plus haut, les n facteurs forment 2^{n-1} couples de facteurs premiers entre eux, et ainsi on aura 2^{n-1} *solutions.*

Application à des exemples numériques :

L'équation (I) peut s'écrire

$$p + q = \sqrt{(p-q)^2 + 4pq} \qquad \text{ou} \qquad p - q = \sqrt{(p+q)^2 - 4pq}\,.$$

et l'équation (II)

$$\frac{p+q}{2} = \sqrt{\left(\frac{p-q}{2}\right)^2 + pq} \qquad \text{ou} \qquad \frac{p-q}{2} = \sqrt{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - pq}\,.$$

Exemple 1. $p + q = \sqrt{z^2 + 4.2.3.5}$.

Les couples de facteurs mentionnés plus haut deviennent:

1 ,	2 ,	3 ,	5 ,
2.3.5	3.5	2.5	2.3

Si l'équation est primitive et en nombres entiers, il faut avoir $z = 29$, 13, 7 ou 1, et les racines correspondantes $p + q$ seront 31, 17, 13 et 11.

Exemple 2. $\frac{p-q}{2} = \sqrt{z^2 - 3.5.7}$.

Les couples de facteurs sont

1 ,	3 ,	5 ,	7 ,
3.5.7	1.5.7	1.3.7	1.3.5

Il faut donc qu'on ait $z = 53$, 19, 13 ou 11, et les racines $\frac{p-q}{2}$ deviendront 52, 16, 8 et 4.

Exemple 3. Soit

$$x = \sqrt{1508^2 + 88305} \;;$$

pour savoir, sans calcul ordinaire, si la racine est rationnelle, il faut examiner si les deux termes sous le signe radical ont un facteur commun. On trouvera le facteur 29; et en outre 88305 étant divisible par 29^2, il s'ensuit

$$x = 29\sqrt{52^2 + 105} \;.$$

Comme 52 est égal à $\frac{105-1}{2}$, la racine sera $\frac{105+1}{2}$, et ainsi on a

$$x = 29.53 \;.$$

II. — *L'équation* $x + y^2 = a^2$.

A l'aide des équations (I) et (II) on sera à même de déterminer x et y.

Il y aura trois cas différents, selon qu'on a a égal à 1° un nombre premier impair, 2° un nombre impair composé ou 3° un nombre pair composé.