Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1916)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

Autor: Turrière, Emile

Kapitel: Décompositions des nombres rationnels.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16887

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Décompositions des nombres rationnels.

35. — Décompositions quadratiques. Parmi les problèmes les plus intéressants de la théorie des nombres rationnels, il y a certainement lieu de placer celui qui consiste, étant donné un nombre rationnel n, à le mettre sous la forme

$$n = \frac{f(x_1, x_2 \dots, x_k)}{g(x_1, x_2 \dots, x_k)},$$

f et g étant deux polynomes à coefficients rationnels et à k variables x_1, $x_2 \dots x_{k-1}$, x_k. Le cas particulier

$$n = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$$

a été précédemment envisagé à l'occasion de l'étude des arithmosphères ou des arithmohypersphères.

Le problème général que je viens d'énoncer n'est évidemment autre qu'une application de la théorie arithmogéométrique d'une certaine surface (ou hypersurface) algébrique dont le degré est le degré le plus élevé des polynomes f ou g.

Après le cas sans difficulté et sans intérêt du problème associé à un arithmoplan ou à un arithmohyperplan, le cas le plus simple est celui du problème associé à une arithmoconique, une arithmoquadrique ou une arithmohyperquadrique.

Ce dernier problème n'est pas toujours possible : c'est ce que prouvent les exemples $n = x_1^2 + x_2^2$ et $n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, puisqu'un cercle ou une sphère ne sont pas nécessairement doués d'arithmopoints. Mais dès qu'une solution est connue par un procédé quelconque, il est possible d'en déduire une ∞^{k-1}, dans ce même cas de polynomes quadratiques. *Une quadrique (ou hyperquadrique) est,* en effet, *une arithmoquadrique ou une arithmohyperquadrique du seul fait qu'elle possède un arithmopoint (ou arithmohyperpoint) particulier.*

L'arithmopoint général de cette arithmoquadrique (ou arithmohyperquadrique) n'est autre que son intersection avec une arithmodroite (ou hyperarithmodroite) quelconque pivotant autour de l'arithmopoint (ou arithmohyperpoint) imposé. Soient x_1^0, x_2^0, ... , x_{k-1}^0, x_k^0, les coordonnées rationnelles de celui-ci. Il suffira de résoudre le système d'équations

$$f(x_1\,,\,\dots\,,\,x_k) - ng(x_1\,,\,\dots\,,\,x_k) = 0\;,$$

$$\frac{x_1 - x_1^0}{a_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{a_2} = \dots = \frac{x_k - x_k^0}{a_k}\;,$$

dans lesquelles $a_1 \dots a_k$ sont k indéterminées; la solution $(x_1\,,\,\dots\,,\,x_k)$ est rationnelle et dépend de $k - 1$ rapports mutuels des $(a_1\,,\,\dots\,a_k)$.

En résumé, *la représentation d'un nombre rationnel imposé* n *au moyen d'une fraction rationnelle quadratique donnée à* k *variables, n'est pas toujours possible ; mais l'existence d'une solution particulière entraîne celle d'une* ∞^{k-1} *de solutions.*

36. — Décomposition du troisième degré. Le problème de la représentation d'un nombre rationnel au moyen de la fraction rationnelle $\frac{f}{g}$, dont un des deux termes au moins est du troisième degré, l'autre pouvant être d'un degré inférieur, mérite sous beaucoup de rapports d'être étudié.

Il y a lieu de traiter tout d'abord le cas de trois variables, qui se trouve être plus simple que celui de deux variables seulement. Je supposerai donc qu'il s'agit de mettre le nombre rationnel n sous la forme de la fraction rationnelle cubique donnée

$$n = \frac{f(x\,,\,y\,,\,z)}{g(x\,,\,y\,,\,z)}\;,$$

dépendant de trois variables x, y, z. La surface associée est alors une surface cubique de l'espace ordinaire, représentée par l'équation

$$f(x\,,\,y\,,\,z) - n.g(x\,,\,y\,,\,z) = 0\;.$$

Le problème n'est pas toujours possible : c'est ce que prouvent les exemples donnés plus loin d'impossibilité de décomposition d'un nombre rationnel donné en une somme de trois cubes de nombres rationnels. Mais ici encore il y a lieu d'affirmer que, sauf dans des cas singuliers, l'existence d'une solution particulière entraîne celle d'une double infinité de solutions.

D'une manière précise, *l'existence d'un arithmopoint sur la surface cubique ci-dessus envisagée entraîne celle d'une ∞^2 de tels points sur cette surface qui est dès lors une arithmosurface cubique.* Il n'y a exception que lorsque l'arithmopoint imposé est un point singulier de la surface ou encore un point de contact d'un plan tangent de direction asymptotique.

Considérons, en effet, un arithmopoint M_1 d'une surface cubique (S) représentée par une équation du troisième degré en (x, y, z) dont tous les coefficients sont des nombres rationnels. Le plan tangent en M_1 à cette surface cubique est un arithmoplan; la section de la surface par ce plan est généralement une cubique représentée dans son plan par une équation rationnelle et douée d'un point singulier de coordonnées rationnelles; cette cubique plane est donc une arithmocubique plane.

L'existence de l'arithmopoint M_1 entraîne donc celle d'une ∞^1 d'arithmopoints sur la surface. Considérons l'un de ceux-ci : soit M_2. A ce second arithmopoint est associée une seconde arithmocubique plane, trace de la surface sur l'arithmoplan tangent en M_1.

Il y a dès lors deux arithmocourbes (C_1) et (C_2) non coplanes sur la surface (S); soient m_1 l'arithmopoint courant de (C_1) et m_2 l'arithmopoint courant de (C_2); soient t_1 et t_2 les paramètres rationnels qui repèrent respectivement ces arithmopoints sur les deux arithmocubiques (C_1) et (C_2). Les droites $m_1 m_2$ sont des arithmodroites appartenant à une congruence rectiligne; chacune d'elles perce à nouveau la surface en un troisième point m_3 qui est nécessairement un arithmopoint et dont les coordonnées sont des fonctions rationnelles des deux paramètres rationnels $t_1 t_2$. La surface cubique (S) est ainsi représentée rationnellement en fonction de deux paramètres rationnels t_1 et t_2 : elle est donc une arithmosurface cubique.

37. — Représentation d'un nombre rationnel au moyen d'une forme cubique a trois variables. Il s'agit de déterminer une forme $f(x, y, z \ldots)$ susceptible de représenter tout nombre rationnel algébrique, les coefficients de cette forme étant de cette nature et les variables $x, y, z \ldots$ ne pouvant prendre des valeurs irrationnelles. Cette forme sera assujettie aux conditions d'être symétrique par rapport aux variables $x, y, z \ldots$ et d'être invariante par multiplication ou par division.

La forme $x^2 + y^2$ est inacceptable, malgré sa symétrie et son invariance par multiplication ou par division ; elle ne saurait, en effet, représenter les nombres 3, 7 d'une manière générale, $4N - 1$ (N étant un entier), l'égalité

$$x^2 + y^2 = (4N - 1) z^2$$

étant impossible en nombres entiers. Il en est de même de la forme quadratique ternaire $x^2 + y^2 + z^2$ pour la double raison qu'elle n'est pas invariante par multiplication et qu'elle ne saurait représenter les nombres entiers $8N - 1$ (7 par exemple).

Du point de vue du degré de la forme représentative, la plus simple des formes susceptibles de représenter tout nombre rationnel positif est donc la forme quadratique quaternaire $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$. Cette représentation n'est autre que celle qui résulte du théorème de Bachet, généralisé conformément aux considérations des §§ 14 et 26 dans le domaine des nombres rationnels.

Si, d'autre part, on se propose de rechercher celle des formes représentatives de tout nombre rationnel qui dépend du nombre le plus simple de variables, on trouve que cette forme n'est autre que la forme cubique ternaire

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz .$$

Il y a lieu de rappeler tout d'abord à son sujet la propriété d'invariance suivante établie par J. Petersen (*Tidsskrift*, 1872, p. 57). *La forme précédente est invariante par multiplication.* Il suffit, en effet, d'observer que l'identité

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X \\ Z & X & Y \end{vmatrix}$$

dans laquelle X, Y, Z désignent respectivement les expressions

$$X = ax + by + cz \ , \qquad Y = bx + cy + az \ , \qquad Z = cx + ay + bz \ ,$$

peut être mise sous la forme équivalente

$$(3xyz - x^3 - y^3 - z^3)(3abc - a^3 - b^3 - c^3) = 3XYZ - X^3 - Y^3 - Z^3 \ ,$$

puisque l'expression développée du déterminant

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

n'est précisément autre que la forme $3xyz - x^3 - y^3 - z^3$.

L'invariance de la même forme relativement à la division s'établit aisément. On observera, à cet effet, que le nombre D(X, Y, Z) et le nombre $d(a, b, c)$ étant supposés connus, leur quotient $q = \frac{D}{d}$ sera défini par les trois variables (x, y, z); celles-ci sont solutions de trois équations linéaires précédemment écrites; l'expression de x est ainsi

$$(3abc - a^3 - b^3 - c^3)x = \begin{vmatrix} X & b & c \\ Y & c & a \\ Z & a & b \end{vmatrix} \ ;$$

y et z s'obtiennent par permutations de lettres.

La proposition fondamentale d'après laquelle *tout nombre rationnel est susceptible d'être représenté d'une infinité de manières par la forme*

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

résulte simplement des propriétés arithmogéométriques de l'arithmosurface cubique de révolution représentée par l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = n .$$

Cette surface contient une infinité d'arithmocercles parallèles; elle peut être représentée par les équations suivantes

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{n}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \lambda\mu - \mu\nu - \nu\lambda} + \frac{\mu - \nu}{3} , \\ y &= \frac{n}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \lambda\mu - \mu\nu - \nu\lambda} + \frac{\nu - \lambda}{3} , \\ z &= \frac{n}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \lambda\mu - \mu\nu - \nu\lambda} + \frac{\lambda - \mu}{3} . \end{aligned}\right.$$

contenant en apparence trois paramètres arbitraires; mais, en réalité, ces formules ne dépendent que de deux paramètres, qui sont les différences mutuelles des précédentes. En donnant à ces paramètres λ, μ, ν des valeurs rationnelles arbitraires, ces formules fournissent les coordonnées d'un arithmopoint de la surface considérée.

Réciproquement, tout arithmopoint de cette surface cubique peut être obtenu de la manière précédente; n, x, y et z étant imposés, les différences mutuelles de λ, μ, ν sont parfaitement déterminées par les formules suivantes

$$\begin{aligned} \mu - \nu &= 2x - y - z , \\ \nu - \lambda &= 2y - z - x , \\ \lambda - \mu &= 2z - x - y ; \end{aligned}$$

il en résulte qu'il suffit de prendre :

$$\lambda = z - y , \qquad \mu = x - z , \qquad \nu = y - x .$$

Ainsi donc, la surface représentée par l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = n ,$$

dans laquelle n est un nombre rationnel absolument quelconque, est une arithmosurface cubique de révolution, dont une représentation paramétrique propre est celle qui vient d'être indiquée ci-dessus. C'est en ce sens qu'il convient d'énoncer la propriété de tout nombre rationnel n d'être d'une ∞^2 de manières susceptible d'être représenté par la forme cubique ternaire

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = n \ .$$

Parmi ces diverses représentations, en nombre doublement infini, d'un même nombre rationnel n, il y a lieu de signaler tout spécialement la suivante, en raison de sa grande simplicité

$$x = n \qquad y = n + \frac{1}{3} \qquad z = n - \frac{1}{3} \ .$$

Dans le cas où l'on devra décomposer un nombre entier, multiple de trois plus un, il y aura lieu de poser

$$x = y = \frac{n-1}{3} \qquad z = \frac{n+2}{3} \ ;$$

de sorte que *tout multiple de trois plus un est décomposable en nombres entiers* [1].

La forme précédemment envisagée rentre dans la forme plus générale

$$n = Ax^3 + By^3 + Cz^3 - 3Dxyz \ ,$$

à quatre coefficients algébriques, rationnels mais quelconques qui fut envisagée par Ed. Lucas. Dans le cas le plus général, la décomposition n'est pas toujours possible quel que soit le nombre n. Mais dès qu'un nombre n est décomposable d'une manière, la décomposition est possible d'une ∞^2 de manières, en vertu du théorème général sur les décompositions cubiques (exception faite pour le cas d'un point singulier). Parmi les diverses formes qui rentrent dans cette catégorie, il y a spécialement lieu d'étudier celle qui correspond aux valeurs suivantes des coefficients :

$$A = B = C = 1 \ , \qquad D = 0 \ .$$

---

[1] On peut, à ce sujet, affirmer que les multiples de 3 qui ne sont pas multiples de 9 ne sont pas susceptibles d'être décomposés en nombres entiers. C'est ainsi que le nombre 3 ne peut être décomposé qu'au moyen de nombres rationnels.

Voir Carmichael, *Bull. of the American mathematical Society*, XXII, décembre 1915, p. 111-117.

38. — Décomposition d'un nombre rationnel en une somme de trois cubes. La forme dont il s'agit est

$$n = x^3 + y^3 + z^3 \ .$$

La décomposition n'est pas toujours possible : c'est ainsi qu'en vertu du théorème de Fermat le nombre $n = 0$ ne pourra être mis sous la forme d'une somme de trois cubes de nombres rationnels différents de zéro. La surface cubique est alors un cône cubique d'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

qui n'admet qu'un seul arithmopoint ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$).

Par des considérations diverses, j'ai pu de même établir l'impossibilité en nombres algébriques entiers simples de l'équation

$$X^3 + Y^3 + Z^3 = nT^3 \ ,$$

lorsque n est un entier multiple de 9 plus 4 ou plus 5. En d'autres termes, les nombres 4, 5 et, plus généralement, tout multiple entier de 9 augmenté soit de 4 soit de 5, ne semblent point susceptibles d'être rationnellement décomposable en une somme de trois cubes.

Cela étant, supposons que (a, b, c) soit une des décompositions du nombre donné n. La cubique plane, intersection de la surface d'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3 + b^3 + c^3$$

et du plan tangent en l'arithmopoint (a, b, c), peut être représentée par les équations

$$x = a + \lambda \, . \, \frac{\beta - \gamma}{a^2} \ ,$$

$$y = b + \lambda \, . \, \frac{\gamma - \alpha}{b^2} \ ,$$

$$z = c + \lambda \, . \, \frac{\alpha - \beta}{c^2} \ ;$$

α, β, γ sont trois paramètres rationnels, algébriques et arbitraires ; λ représente l'expression

$$\lambda = -3\,\frac{\dfrac{(\beta-\gamma)^2}{a^3}+\dfrac{(\gamma-\alpha)^2}{b^3}+\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{c^3}}{\dfrac{(\beta-\gamma)^3}{a^6}+\dfrac{(\gamma-\alpha)^3}{b^6}+\dfrac{(\alpha-\beta)^3}{c^6}}\ ;$$

en réalité il n'y a qu'un seul paramètre indépendant: l'un des rapports anharmoniques des nombres $(0, \alpha, \beta, \gamma)$.

Ces formules représentent une ∞^1 d'arithmopoints. Il est théoriquement possible d'en déduire l'expression générale des solutions de l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3 + b^3 + c^3\ ;$$

mais ces formules générales sont très compliquées.

Bien entendu, ces formules deviennent illusoires lorsque l'un au moins des nombres a, b, c est nul. Mais, alors, il est aisé d'obtenir par la méthode arithmogéométrique de nouveaux arithmopoints situés en dehors des plans ou des axes coordonnés.

Je terminerai en mentionnant d'une manière toute spéciale l'équation remarquable

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1\ ;$$

en plus des solutions banales qui correspondent aux arithmopoints situés sur les côtés de l'arithmotriangle

$$\begin{array}{ll} x = 1\ , & y + z = 0\ , \\ y = 1\ , & z + x = 0\ , \\ z = 1\ , & x + y = 0\ , \end{array}$$

il y a lieu de signaler les solutions qui résultent des égalités bien connues

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3\ ,$$
$$1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3\ .$$

Sur cette arithmosurface d'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1\ ,$$

se trouve d'ailleurs une arithmoquadrique gauche représentée paramétriquement par les équations :

$$x = 9t^4 , \qquad y = 1 + 9t^3 , \qquad z = -3t(1 + 3t^3)$$

et qui est tracée sur un paraboloïde hyperbolique d'équation

$$y(z + x) + 2x - z = 0 .$$

Il suffit de considérer les cordes de cette arithmoquadrique définies par deux arithmopoints de paramètres respectifs t_1 et t_2 pour avoir une représentation rationnelle en fonction de deux paramètres t_1 et t_2 de cette surface.

Les arithmopoints des cubiques.

39. — Arithmocubique gauche. La théorie arithmogéométrique des cubiques gauches est absolument identique à celle des coniques dans le plan. Une cubique gauche représentée par des équations à coefficients rationnels n'est pas généralement une arithmocourbe. Mais dès qu'elle possède un arithmopoint particulier, elle est une arithmocubique gauche. L'arithmopoint courant est alors l'intersection de l'arithmocubique avec un arithmoplan (dépendant d'un paramètre rationnel arbitraire) pivotant autour de la tangente à cette courbe en l'arithmopoint connu *a priori*.

Il peut arriver d'ailleurs, à l'occasion de l'étude de cas particuliers, qu'il soit inutile d'avoir recours à la considération de l'arithmoplan général passant par cette tangente particulière. C'est, par exemple, ce qui se produit pour le système suivant de deux équations à trois inconnues :

$$ax + a' = y^2 ,$$
$$bx + b' = z^2 ;$$

a, a', b, b' sont quatre coefficients rationnels absolument quelconques. L'élimination de x entre ces deux équations donne une équation

$$by^2 - az^2 = ba' - ab'$$

du type de celle considérée par Brahmagupta et Fermat. Il