Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1916)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

Autor: Turrière, Emile

Kapitel: Déformation du quadrilatère orthodiagonal. Quadrilatère de Brahmagupta.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16887

rieure issue de B dans le triangle rectangle ABC; on trouve ainsi :

$$BC = \delta x - \delta \ , \qquad x = \frac{2\delta^2}{\delta^2 - \beta^2} \ .$$

Ainsi donc, de l'arithmotriangle ABD il est possible de déduire un arithmotriangle pythagorique ABC de côtés

$$BC = \frac{\delta\alpha^2}{\delta^2 - \beta^2} \ , \qquad CA = 2\frac{\delta^2\beta^2}{\delta^2 - \beta^2} \ , \qquad AB = \delta \ ,$$

dont la bissectrice intérieure BD est rationnelle et égale à α.

La bissectrice extérieure BE correspondante est alors rationnelle elle aussi et égale à $\frac{\alpha\delta}{\beta}$.

Dans le cas ($\alpha = 5$, $\beta = 3$, $\delta = 4$) de l'arithmotriangle pythagorique le plus simple, Diophante trouve ainsi :

$$BC = \frac{100}{7} \ , \quad CA = \frac{96}{7} \ , \quad AB = 4 \ , \quad BD = 5 \ , \quad BE = \frac{20}{3} \ .$$

Par similitude, on peut rendre entiers les côtés de ce dernier triangle et les prendre égaux à 100, 96 et 28. Cet arithmotriangle correspond d'autre part à la valeur $\frac{1}{3}$ de tang $\frac{B}{4}$.

Déformation du quadrilatère orthodiagonal. Quadrilatère de Brahmagupta.

30. — La relation

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

caractérise, on le sait, les quadrilatères plans ou gauches dont les diagonales sont orthogonales; a, b, c, d sont ici les mesures des longueurs des côtés consécutifs du quadrilatère. Il résulte du fait que la relation précédente ne fait intervenir que les seules mesures des côtés que, si l'orthogonalité est assurée pour un quadrilatère déformable, constitué par quatre tiges rigides et articulées aux quatre sommets, elle se maintient pour toutes les formes du quadrilatère, dans sa déformation dans le plan ou dans l'espace.

La détermination de celles des familles de quadrilatères orthodiagonaux dont les côtés sont rationnellement mesurés dépend donc de la théorie de l'arithmocercle. Il suffira de se donner arbitrairement deux côtés a et c opposés et de poser

$$b = a \cos \lambda + c \sin \lambda \qquad d = - a \sin \lambda + c \cos \lambda$$

$\operatorname{tang} \frac{\lambda}{2}$ étant un nombre rationnel quelconque lui aussi.

Parmi les quadrilatères plans obtenus dans la déformation d'un quadrilatère orthodiagonal articulé, ceux qui sont inscriptibles dans une circonférence et dont les diagonales sont rationnelles méritent de retenir un instant notre attention : ce sont, en effet, les *quadrilatères de Brahmagupta,* généralisant le quadrilatère de côtés AB = 25, BC = 52, CD = 60, DA = 39 et de diagonales AC = 63, BD = 56 considéré par BRAHMAGUPTA, et qui semblent avoir permis à FIBONACCI (LÉONARD DE PISE) d'établir par une méthode géométrique l'identité qui porte son nom [1].

On remarquera que, dans tout triangle à côtés rationnels, même si le triangle n'est pas héronien, les segments déterminés sur les côtés par les pieds des hauteurs sont mesurés rationnellement ; de sorte que tout quadrilatère de Brahmagupta est constitué par la juxtaposition de quatre arithmotriangles pythagoriques : pour le quadrilatère considéré par Brahmagupta lui-même, par exemple, les diagonales se partagent mutuellement en des segments entiers : OA = 15, OB = 20, OC = 48, OD = 36. Pour tout quadrilatère de cette espèce, d'autre part, le rayon du cercle circonscrit est nécessairement rationnel.

Il en résulte une construction arithmogéométrique générale des quadrilatères de Brahmagupta généralisant celle des arithmotriangles héroniens (§ 12) : On se donnera un arithmocercle quelconque de rayon rationnel et, sur sa circonférence, on marquera quatre arithmopoints particuliers repérés par des azimuts respectifs θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 tels que $\operatorname{tang} \frac{\theta_1}{4}$, $\operatorname{tang} \frac{\theta_2}{4}$, $\operatorname{tang} \frac{\theta_3}{4}$, $\operatorname{tang} \frac{\theta_4}{4}$ soient quatre nombres rationnels. Trois d'entre eux sont quelconques ; quant au qua-

[1] Au sujet des quadrilatères de Brahmagupta, cf. A. AUBRY, Le premier chapitre de la théorie élémentaire des nombres. (*L'Enseignement mathématique*, t. XVII, pp. 161-195 ; particulièrement pp. 174-175.)

trième, il est complètement défini au moyen des trois premiers par la condition d'orthogonalité des diagonales.

Il est d'autre part possible d'étendre aux mêmes quadrilatères de Brahmagupta la construction des arithmotriangles héroniens au moyen de droites arithmodirigées. On se donnera trois des directions des côtés, la quatrième direction étant alors entièrement déterminée ; il suffira alors de tracer quatre arithmodirigées parallèles à ces quatre directions.

La théorie des quadrilatères de Brahmagupta présente donc les plus grandes analogies avec celle des arithmotriangles héroniens. *De tout arithmotriangle héronien, il est d'ailleurs possible de déduire trois quadrilatères de Brahmagupta :* à cet effet, il suffit d'adjoindre aux trois sommets de l'arithmotriangle héronien l'intersection de l'arithmocercle circonscrit avec l'une quelconque des trois arithmohauteurs.

Le quadrilatère de Brahmagupta le plus général est susceptible d'être ainsi engendré à partir d'un arithmotriangle héronien général. Il y a lieu d'observer d'ailleurs que tout quadrilatère plan dont les côtés et les diagonales sont six longueurs rationnelles et dont la surface est aussi mesurée par un nombre rationnel, peut être considéré comme somme ou différence d'arithmotriangles héroniens. Soit, en effet, ABCD un tel quadrilatère ; il est, pour fixer les idées, somme de deux triangles ABC et BCD. Si les aires de ceux-ci étaient irrationnelles (et nécessairement toutes deux de la forme $\sqrt{\alpha}$, α étant un nombre rationnel), un nombre rationnel serait la somme de deux irrationnelles $\sqrt{\alpha}$ et $\sqrt{\beta}$; c'est une condition impossible et, par conséquent, les deux triangles ABC et BCD sont héroniens de toute nécessité.

31. — Tétraèdres orthocentriques. Parmi l'infinité de tétraèdres obtenus par la déformation d'un quadrilatère orthodiagonal articulé, il y a lieu de considérer d'une manière toute spéciale les tétraèdres orthocentriques.

Le tétraèdre orthocentrique général peut être envisagé comme contenant trois quadrilatères gauches orthodiagonaux. Soit SABCD un tétraèdre de cette espèce. Je poserai

$$\mathrm{BC} = a, \qquad \mathrm{CA} = b, \qquad \mathrm{AB} = c,$$
$$\mathrm{SA} = \alpha, \qquad \mathrm{SB} = \beta, \qquad \mathrm{SC} = \gamma;$$

les conditions, au nombre de deux, d'existence d'un orthocentre, sont :

$$a^2 + \alpha^2 = b^2 + \beta^2 = c^2 + \gamma^2 .$$

Conformément à la théorie de l'arithmocercle, il suffira de se donner quatre nombres rationnels a, α, $\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{\mu}{2}$, et de poser :

$$b = a \cos\lambda + \alpha \sin\lambda , \qquad c = a \cos\mu + \alpha \sin\mu ,$$

$$\beta = - a \sin\lambda + \alpha \cos\lambda , \qquad \gamma = - a \sin\mu + \alpha \cos\mu ,$$

les quatre nombres rationnels a, α, $\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{\mu}{2}$ étant uniquement assujettis aux conditions qui assurent l'existence effective du quadrilatère.

Application des équations de Brahmagupta-Fermat à l'extraction approchée des racines carrées.

32. — Extraction approchée par excès. Je partirai de l'équation considérée par Brahmagupta

$$nx^2 + 1 = y^2 ,$$

n étant le nombre rationnel, positif, non carré dont il s'agit de calculer la racine carrée; t étant un nombre rationnel arbitraire, la solution générale de cette équation est donnée par les formules de Brahmagupta rappelées au § 23 :

$$x = \frac{2t}{n - t^2} , \qquad y = \frac{n + t^2}{n - t^2} .$$

Dans ces conditions, si t est un nombre rationnel suffisamment voisin de $\sqrt{n}$, x et y sont des nombres très grands; tout se passe alors comme si l'équation $nx^2 + 1 = y^2$ se réduisait à $nx^2 = y^2$; de sorte que $\frac{y}{x}$ est une valeur approchée de $\sqrt{n}$ (par excès). Cette valeur approchée de $\sqrt{n}$ est

$$\nu_1 = \frac{n + t^2}{2t} ;$$