dépend d'une équation de Brahmagupta-Fermat

$$Y^2 = \sum_1^n A_k^2 \cdot t^2 + \sum_1^n A_k A'_k t + \sum_1^n A'^2_n .$$

Cette même équation peut encore être considérée comme résolvant les problèmes des droites arithmodirigées ou des plans arithmodirigés analogues à ceux du § 25 mais relatifs à l'hyperespace à n dimensions. Les considérations développées plus haut quant à la résolubilité d'une telle équation dans le cas d'une solution connue *a priori* et, plus particulièrement, dans celui d'une arithmodirigée, s'étendent sans modification aux hyperdroites. Mais il y a lieu de noter que, dès l'hyperespace à quatre dimensions, un fait remarquable se produit à l'occasion des propriétés caractéristiques de l'équation de Brahmagupta-Fermat du présent paragraphe: c'est qu'en vertu du théorème de Bachet (généralisé pour les nombres rationnels) le coefficient de t^2 et le terme indépendant de t ne sont plus soumis qu'à l'unique condition d'être positifs. Quant au discriminant, positif lui aussi, il reste lié aux deux coefficients dont il vient d'être question. Dans le cas de l'hyperespace à quatre dimensions il y a même lieu d'observer que ce discriminant est nécessairement une somme de trois carrés, en vertu de l'identité d'Euler

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) - (aa' + bb' + cc' + dd')^2 =$$
$$(ab' - ba' - cd' + dc')^2 + (ac' + bd' - ca' - db')^2 + (ad' - bc' + cb' - da')^2 .$$

Triangles à bissectrices rationnelles.

27. — La détermination des triangles à côtés rationnels admettant une bissectrice intérieure ou extérieure rationnelle est réductible à l'étude d'une équation de Brahmagupta-Fermat.

Supposons, en effet, qu'il s'agisse de la bissectrice intérieure d de l'angle A d'un triangle ABC de côtés a, b, c. La relation qui lie a, b, c, d

$$bc = d^2 + \frac{a^2 bc}{(b + c)^2}$$

peut être écrite sous la forme

$$\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 = \left(\frac{b+c}{a}d\right)^2 \frac{1}{bc} + 1 \ ;$$

elle est donc de la forme d'une équation résoluble de Brahmagupta-Fermat :

$$y^2 = nx^2 + 1 \ ,$$

avec

$$y = \frac{b+c}{a} \ , \qquad x = \frac{b+c}{a}d \ , \qquad n = \frac{1}{bc} \ .$$

Il résulte de cette remarque que : *pour avoir un triangle à côtés rationnels admettant une bissectrice intérieure rationnelle, il suffit de se donner les mesures rationnelles* b *et* c *des côtés comprenant cette bissectrice et un troisième paramètre arbitraire* t *et de poser :*

$$a = \frac{bc - t^2}{bc + t^2}(b + c) \ ;$$

la bissectrice a pour longueur :

$$d = \frac{2bct}{bc + t^2} \ .$$

Il suffira, sans restreindre la généralité de la solution, de se borner aux valeurs de t comprises entre 0 et $\sqrt{bc}$, mais il y aura lieu de préciser, suivant les valeurs de b et c, les limites des intervalles dans lesquels doit être choisi le paramètre t.

Le problème des bissectrices extérieures rationnelles est réductible à une équation analogue.

28. — Triangles a bissectrices intérieures rationnelles. Etant donné un triangle quelconque ABC à côtés rationnels a, b, c, le produit des bissectrices intérieures est égal à

$$\frac{8abcp}{(b+c)(c+a)(a+b)} S \ .$$

Si donc, dans un triangle à côtés rationnels, les trois bissectrices intérieures sont simultanément rationnelles, le triangle est nécessairement un arithmotriangle héronien.

Réciproquement, *la rationalité de deux des trois bissec-*

trices intérieures d'un arithmotriangle héronien entraîne celle de la troisième.

On observera, en outre, que, dans un arithmotriangle héronien, la rationalité de la bissectrice intérieure de l'angle A, par exemple, est équivalente à celle de $\operatorname{tang}\frac{A}{4}$. *Les arithmotriangles à bissectrices intérieures rationnelles sont donc caractérisés par la rationalité de* $\operatorname{tang}\frac{A}{4}$, $\operatorname{tang}\frac{B}{4}$, $\operatorname{tang}\frac{C}{4}$.

En posant

$$\operatorname{tang}\frac{A}{4} = x, \qquad \operatorname{tang}\frac{B}{4} = y, \qquad \operatorname{tang}\frac{C}{4} = z,$$

ces nombres x, y, z sont liés par la relation

$$xyz + 1 = xy + yz + zx + x + y + z.$$

L'étude de ces arithmotriangles linéaires à bissectrices intérieures rationnelles est ainsi rattachée à l'étude d'une arithmosurface cubique, ou, mieux, à celle d'une arithmoquadrique

$$\xi\eta + \eta\zeta + \zeta\xi + 1 = 0$$

transformée de la précédente arithmosurface cubique au moyen de la transformation birationnelle définie par les formules :

$$x = \frac{1-\xi}{1+\xi} \qquad y = \frac{1-\eta}{1+\eta} \qquad z = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}.$$

Sous un point de vue à la fois plus géométrique et plus élémentaire, il est possible de définir autrement ces mêmes triangles. Soit, en effet, un arithmotriangle général $\mathcal{ABC}$ de hauteurs $\mathcal{A}$A, $\mathcal{B}$B et $\mathcal{C}$C. Les bissectrices intérieures du triangle ABC sont identiques à ces hauteurs; d'autre part, le rayon du cercle circonscrit R au triangle ABC est la moitié de celui $\mathcal{R}$ de $\mathcal{ABC}$; quant aux angles, ils sont liés par trois relations telles que $A = \pi - 2\mathcal{A}$; les côtés de ABC sont ainsi rationnels et égaux à $\mathcal{R}\sin 2\mathcal{A}$, $\mathcal{R}\sin 2\mathcal{B}$, $\mathcal{R}\sin 2\mathcal{C}$. *Tout arithmotriangle héronien à bissectrices rationnelles peut* *donc être considéré comme étant le triangle pédal d'un arithmotriangle héronien.*

Je ferai remarquer enfin que, le rapport de la bissectrice intérieure à la bissectrice extérieure d'un même angle A d'un triangle ABC étant égal à la valeur absolue de tang $\frac{B-C}{2}$, à toute bissectrice intérieure rationnelle d'un arithmotriangle héronien correspond une bissectrice extérieure rationnelle elle aussi. Le triangle à bissectrices intérieures simultanément rationnelles a donc ses bissectrices extérieures rationnelles.

29. — Arithmotriangles pythagoriques a bissectrices rationnelles. Le problème de Diophante. Il résulte des considérations qui précèdent que, dans un arithmotriangle pythagorique, les bissectrices intérieure et extérieure issues du sommet de l'angle droit ne sauraient être rationnelles : le nombre tang $\frac{A}{8}$ est, en effet, irrationnel.

Un arithmotriangle pythagorique a, en général, toutes ses bissectrices tant intérieures qu'extérieures irrationnelles. Le seul cas de bissectrices rationnelles à considérer ici est celui où les bissectrices intérieure et extérieure d'un même angle aigu sont rationnelles. L'angle droit étant l'angle A, pour que les deux bissectrices de l'angle B soient rationnelles, il faut et il suffit que le nombre tang $\frac{B}{4}$ soit rationnel. Ce nombre rationnel doit d'ailleurs être compris dans l'intervalle 0, $\sqrt{2}-1$.

Il y a lieu de rappeler ici que Diophante a montré que, d'un arithmotriangle pythagorique, il est possible de déduire un nouveau triangle de même nature ayant une bissectrice intérieure et une bissectrice extérieure rationnelles. Considérons, en effet, un arithmotriangle pythagorique ABD d'hypoténuse BD $= \alpha$ et de cathètes AB $= \delta$, AD $= \beta$. La méthode de Diophante consiste à prolonger AD, dans le sens de A vers D, d'une longueur inconnue DC($= \beta x - \beta$) telle que AC $= \beta x$; cette inconnue x est alors déterminée par la condition que BD soit précisément la bissectrice intérieure issue de B dans le triangle rectangle ABC ; on trouve ainsi :

$$BC = \delta x - \delta \ , \qquad x = \frac{2\delta^2}{\delta^2 - \beta^2} \ .$$

Ainsi donc, de l'arithmotriangle ABD il est possible de déduire un arithmotriangle pythagorique ABC de côtés

$$BC = \frac{\delta\alpha^2}{\delta^2 - \beta^2} \ , \qquad CA = 2\frac{\delta^2\beta^2}{\delta^2 - \beta^2} \ , \qquad AB = \delta \ ,$$

dont la bissectrice intérieure BD est rationnelle et égale à α.

La bissectrice extérieure BE correspondante est alors rationnelle elle aussi et égale à $\frac{\alpha\delta}{\beta}$.

Dans le cas ($\alpha = 5$, $\beta = 3$, $\delta = 4$) de l'arithmotriangle pythagorique le plus simple, Diophante trouve ainsi :

$$BC = \frac{100}{7} \ , \qquad CA = \frac{96}{7} \ , \qquad AB = 4 \ , \qquad BD = 5 \ , \qquad BE = \frac{20}{3} \ .$$

Par similitude, on peut rendre entiers les côtés de ce dernier triangle et les prendre égaux à 100, 96 et 28. Cet arithmotriangle correspond d'autre part à la valeur $\frac{1}{3}$ de tang $\frac{B}{4}$.

Déformation du quadrilatère orthodiagonal. Quadrilatère de Brahmagupta.

30. — La relation

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

caractérise, on le sait, les quadrilatères plans ou gauches dont les diagonales sont orthogonales ; a, b, c, d sont ici les mesures des longueurs des côtés consécutifs du quadrilatère. Il résulte du fait que la relation précédente ne fait intervenir que les seules mesures des côtés que, si l'orthogonalité est assurée pour un quadrilatère déformable, constitué par quatre tiges rigides et articulées aux quatre sommets, elle se maintient pour toutes les formes du quadrilatère, dans sa déformation dans le plan ou dans l'espace.

La détermination de celles des familles de quadrilatères orthodiagonaux dont les côtés sont rationnellement mesurés