Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1916)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE
Autor: Turrière, Emile
Kapitel: équations de Brahmagupta-Fermat.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16887

NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

(2e article) [1]

PAR

Emile TURRIÈRE (Montpellier).

Les équations de Brahmagupta-Fermat.

21. — LES ARITHMOCONIQUES. — Une conique, dont l'équaquation est à coefficients rationnels, n'est pas nécessairement douée d'arithmopoints; mais du seul fait qu'une conique, dont l'équation cartésienne a tous ses coefficients rationnels, possède un arithmopoint, il résulte que cette courbe possède une infinité de points de cette nature. L'arithmopoint courant de cette courbe, qui est dès lors une arithmoconique, s'obtient par son intersection avec une arithmodroite arbitraire, pivotant autour de l'arithmopoint primitivement connu. Tout l'effort à faire dans l'étude d'une équation indéterminée du second degré, à deux inconnues, doit précisément porter sur la mise en évidence d'un arithmopoint particulier de la conique représentative (les axes pouvant être quelconques d'ailleurs).

La méthode géométrique qui se rattache aux considérations précédentes permet d'expliquer un certain nombre d'artifices qui ont été employés dans l'étude de diverses équations indéterminées. Ce sera l'objet d'une grande partie du présent travail. Mais, avant d'aborder cette étude, je désire mentionner un exemple bien simple d'identité algébrique, découverte par EULER comme application de la for-

[1] Voir *L'Enseignement mathématique* du 15 mars 1916, 18e année, p. 81 à 110.

mule de Moivre, et qui se rattache à la correspondance entre arithmopoints d'une arithmoconique établie par les cercles osculateurs de cette courbe.

Il est, en effet, évident que le cercle osculateur d'une arithmoconique en un arithmopoint m est un arithmocercle et que cet arithmocercle rencontre à nouveau l'arithmoconique en un second arithmopoint. Pour une arithmoconique représentée, par exemple, par l'équation

$$ax^2 + by^2 = c ,$$

les coordonnées (X, Y) du point M sont données en fonctions de celles (x, y) de m, par les formules suivantes :

$$X = \frac{ax^3 - 3by^2x}{c} , \qquad Y = \frac{3ax^2y - by^3}{c} .$$

La relation

$$ax^2 + by^2 = c$$

entraîne immédiatement l'identité à laquelle je faisais allusion ci-dessus,

$$ak^2 + bl^2 \equiv (ax^2 + by^2)^2 ,$$

dans laquelle Euler pose :

$$\begin{cases} k = x(ax^2 - 3by^2) , \\ l = y(3ax^2 - by^2) . \end{cases}$$

22. — Les équations de Brahmagupta-Fermat. Parmi les équations indéterminées du second degré à deux inconnues, les plus remarquables sous bien des rapports sont assurément celles qui rentrent dans la forme générale suivante :

$$y^2 = Ax^2 + 2Bx + C ,$$

A, B, C étant trois coefficients algébriques absolument quelconques mais rationnels; en d'autres termes, ces équations sont celles qui se rattachent, du point de vue arithmogéométrique, à l'étude d'une conique admettant pour axe de symétrie l'axe des abscisses. Par un simple changement de l'axe des coordonnées, il est d'ailleurs toujours possible de réduire l'étude de cette équation, sans en restreindre la généralité, à celle de l'équation pour laquelle B est nul, c'est-à-dire encore à celle d'une conique rapportée à ses axes de symétrie.

Un cas particulier de cette équation réduite a primitivement été traité par BRAHMAGUPTA qui a montré que la solution générale d'une équation

$$y^2 = nx^2 + 1$$

est donnée par les formules suivantes en fonction d'un paramètre rationnel t quelconque :

$$x = \frac{2t}{t^2 - n}, \qquad y = \frac{t^2 + n}{t^2 - n}.$$

BRAHMAGUPTA démontre d'autre part que l'équation

$$y^2 = nx^2 - 1$$

n'est résoluble en nombres rationnels que lorsque n est exprimable par une somme de deux carrés.

C'est principalement à FERMAT et à LAGRANGE que sont dues les principales recherches relatives aux équations de cette nature. Je rappellerai, à ce propos, que la résolution de l'équation

$$y^2 = nx^2 + 1$$

fut proposée en défi par FERMAT à plusieurs géomètres anglais; WALLIS obtint la solution par tâtonnements successifs. La solution de Brahmagupta fut retrouvée, en cette circonstance, par lord BROUNCKER.

Revenant à la question qui m'intéresse, je ferai observer qu'une équation de Brahmagupta-Fermat est nécessairement résoluble dès qu'une solution particulière est connue : soit (x_0, y_0) ; il suffit alors de déterminer l'intersection de l'arithmoconique qu'elle représente avec une arithmodroite arbitraire issue de l'arithmopoint connu, c'est-à-dire de résoudre le système formé par l'équation considérée et par l'équation

$$y - y_0 = t(x - x_0),$$

dans laquelle t est un paramètre rationnel quelconque. Pour l'équation

$$y^2 = nx^2 + 1,$$

admettant évidemment la solution $(x_0 = 0, y_0 = 1)$, on retrouve de cette façon les formules de Brahmagupta (aux signes près).

23. — L'ÉQUATION DU PROBLÈME DES ARITHMODISTANCES RELATIF A UNE ARITHMODROITE. Reprenons le problème du § 18 : nous avons vu que le problème, en géométrie plane, des distances rationnelles relatif à une arithmodroite représentée par les équations

$$x = \mathrm{A}t + \mathrm{A}' , \qquad y = \mathrm{B}t + \mathrm{B}' ,$$

et à un arithmopoint (a, b) se ramène à une équation,

$$\mathrm{Y}^2 = (\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)\mathrm{X}^2 + 2[\mathrm{A}(\mathrm{A}' - a) + \mathrm{B}(\mathrm{B}' - b)]\mathrm{X} + (\mathrm{A}' - a)^2 + (\mathrm{B}' - b)^2 ,$$

rentrant, comme cas particulier, dans l'équation générale du § 22.

L'équation précédente est caractérisée par les trois conditions simultanément remplies qui suivent : le coefficient de X^2 et le coefficient indépendant de X sont respectivement deux sommes de deux carrés ; le discriminant du trinôme en X est carré parfait :

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)[(\mathrm{A}' - a)^2 + (\mathrm{B}' - b)^2] - [\mathrm{A}(\mathrm{A}' - a) + \mathrm{B}(\mathrm{B}' - b]^2 \\ \equiv [\mathrm{A}(\mathrm{B}' - b) - \mathrm{B}(\mathrm{A}' - a)]^2 .\end{aligned}$$

Soit, réciproquement, une équation de Brahmagupta-Fermat satisfaisant à la triple condition précédente :

$$\mathrm{Y}^2 = (\alpha^2 + \beta^2)\mathrm{X}^2 + \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2) - \mathcal{D}^2}\,.\mathrm{X} + \alpha'^2 + \beta'^2 ,$$

et, par conséquent, réductible à la forme suivante :

$$\mathrm{Y}^2 = (\alpha^2 + \beta^2)\mathrm{X}_1^2 + \frac{\mathcal{D}^2}{\alpha^2 + \beta^2} .$$

Il y aura identité entre cette équation et celle qui est écrite plus haut s'il est possible de déterminer deux azimuts θ et θ' à demi-tangentes rationnelles tels que

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{A} = \alpha \cos\theta + \beta \sin\theta , & \mathrm{B} = -\alpha \sin\theta + \beta\cos\theta , \\ \mathrm{A}' - a = \alpha' \cos\theta' + \beta' \sin\theta' , & \mathrm{B}' - b = -\alpha' \sin\theta' + \beta' \cos\theta' , \\ \multicolumn{2}{c}{\mathcal{D} = \mathrm{A}(\mathrm{B}' - b) - \mathrm{B}(\mathrm{A}' - a) ;} \end{array}\right.$$

la dernière de ces relations s'écrit encore :

$$(\alpha\alpha' + \beta\beta') \sin(\theta - \theta') + (\alpha\beta' - \beta\alpha') \cos(\theta - \theta') = \mathcal{D} \;;$$

cette équation a deux racines rationnelles en $\operatorname{tang}\frac{\theta - \theta'}{2}$. Il en résulte qu'il est possible de considérer l'équation de Brahmagupta-Fermat précédente comme étant résolvante d'un problème de distances rationnelles relatif à une arithmodroite; on se donnera arbitrairement a, b et θ'; θ, A, B, A′, B′ seront dès lors déterminés.

En d'autres termes, *toute équation de Brahmagupta-Fermat*

$$y^2 = \mathcal{A}x^2 + 2\mathcal{B}x + \mathcal{C} \;,$$

dans laquelle $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ sont des sommes de deux carrés et dont le discriminant est carré parfait, est susceptible d'être envisagée comme pouvant être associée, au titre de résolvante, à un problème d'arithmodistances relatif à une arithmodroite du plan.

Un cas particulier remarquable de résolution d'une équation du type précédent est celui où le coefficient de x^2 est un carré parfait, c'est-à-dire celui où les points à l'infini de l'hyperbole représentative sont des arithmopoints. Ce cas correspond au problème des arithmodistances relatif à une arithmodirigée; la résolution de l'équation considérée s'effectue par l'intersection de l'arithmohyperbole avec une arithmodroite parallèle à l'une des asymptotes. Adoptons la représentation suivante de l'arithmopoint courant

$$x = \varpi \cos\varphi - \lambda \sin\varphi \;,$$
$$y = \varpi \sin\varphi + \lambda \cos\varphi \;,$$

de l'arithmodirigée d'équation

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = \varpi \;,$$

λ étant la distance de l'arithmopoint au pied de la perpendiculaire menée de O sur l'arithmodirigée; le problème des arithmodistances relatif à cette arithmodirigée et à l'origine des coordonnées est résolu par l'équation

$$d^2 = \varpi^2 + \lambda^2 \;,$$

associable à une arithmohyperbole équilatère. La solution générale est donc :

$$\lambda = \varpi \cdot \frac{2l}{1 - l^2},$$

l étant un paramètre rationnel arbitraire.

24. — MÊME PROBLÈME POUR L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS. Soit une arithmodroite de l'espace ordinaire, représentée par des équations rationnelles :

$$x = At + A', \qquad y = Bt + B', \qquad z = Ct + C',$$

et soit à résoudre, pour elle, le problème des arithmodistances, le point rationnel imposé étant, par exemple et sans restriction de la généralité de la question, l'origine des coordonnées. Le problème est réductible à l'étude de solutions rationnelles de l'équation de Brahmagupta-Fermat :

$$Y^2 = (A^2 + B^2 + C^2)X^2 + 2(AA' + BB' + CC')X + A'^2 + B'^2 + C'^2 .$$

Les conclusions, quant à la résolubilité d'une telle équation résultant de la connaissance *a priori* d'une solution particulière, et à la possibilité de résoudre complètement le problème relatif à une arithmodirigée (c'est-à-dire une arithmodroite telle que $A^2 + B^2 + C^2$ soit carré parfait) sont identiques à celles du problème de la géométrie plane.

Il y a simplement lieu d'énoncer la propriété suivante de l'équation considérée : *Le coefficient de* X^2, *le terme indépendant de* X *et le discriminant du trinôme en* X *sont nécessairement trois sommes de trois carrés.*

25. — LES PROBLÈMES DES DROITES ET PLANS ARITHMODIRIGÉS DANS L'ESPACE ORDINAIRE. Etant donné un arithmoplan, on peut se proposer de déterminer celles des arithmodroites qu'il contient qui sont des arithmodirigées. Le plan étant défini par deux directions quelconques (A, B, C) et (A', B', C'), toute direction d'arithmodroite contenue dans le plan sera définie par des coefficients directeurs $At + A'$, $Bt + B'$, $Ct + C'$, dans lesquels t est un nombre rationnel arbitraire. La direction envisagée sera celle d'une arithmodirigée si la somme des carrés des trois coefficients direc-

teurs est le carré d'un nombre rationnel; t sera ainsi solution d'une équation de Brahmagupta-Fermat qui n'est autre que celle du problème du § 24.

Supposons d'autre part qu'étant donnée une arithmodroite de l'espace, on se propose de déterminer ceux des plans appartenant au faisceau qu'elle définit qui soient des *plans arithmodirigés*, en désignant ainsi des plans jouissant de propriétés analogues à celles des droites arithmodirigées et qui sont définis par la condition suivante : un plan d'équation

$$ux + vy + wz + h = 0 ,$$

où les coefficients u, v, w, h sont rationnels, est un plan arithmodirigé si $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ est un nombre rationnel. Soient

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0 , \qquad \mathrm{A}'x + \mathrm{B}'y + \mathrm{C}'z + \mathrm{D}' = 0 ,$$

les équations des deux plans particuliers du faisceau, définissant la droite imposée. Un arithmoplan quelconque de ce faisceau est représenté par une équation dont les coefficients u, v, w, h sont des expressions de la forme $u = \mathrm{A}t + \mathrm{A}'$, $v = \mathrm{B}t + \mathrm{B}'$, $w = \mathrm{C}t + \mathrm{C}'$, $h = \mathrm{D}t + \mathrm{C}'$, t étant un paramètre rationnel quelconque. Ce plan sera un plan arithmodirigé si l'expression $(\mathrm{A}t + \mathrm{A}')^2 + (\mathrm{B}t + \mathrm{B}')^2 + (\mathrm{C}t + \mathrm{D}')^2$ est un carré parfait; de sorte que les paramètres t qui repèrent les plans arithmodirigés appartenant au faisceau donné sont les solutions d'une équation de Brahmagupta-Fermat identique à celle du § 24.

En résumé, *le problème des droites arithmodirigées situées dans un arithmoplan donné et le problème des plans arithmodirigés passant par une arithmodroite donnée sont équivalents au problème des arithmodistances relatif à une arithmodroite de l'espace.*

26. — MÊMES PROBLÈMES DANS UN HYPERESPACE. Le problème des arithmodistances relatif à l'origine des coordonnées et à une arithmohyperdroite de l'espace à n dimensions, représentée par les équations

$$x_1 = \mathrm{A}_1 t + \mathrm{A}'_1 , \qquad x_2 = \mathrm{A}_2 t + \mathrm{A}'_2 , \ \ldots\ , \ x_n = \mathrm{A}_n t + \mathrm{A}'_n$$

dépend d'une équation de Brahmagupta-Fermat

$$Y^2 = \sum_1^n A_k^2 \,.\, t^2 + \sum_1^n A_k A'_k t + \sum_1^n A'^2_n \,.$$

Cette même équation peut encore être considérée comme résolvant les problèmes des droites arithmodirigées ou des plans arithmodirigés analogues à ceux du § 25 mais relatifs à l'hyperespace à n dimensions. Les considérations développées plus haut quant à la résolubilité d'une telle équation dans le cas d'une solution connue *a priori* et, plus particulièrement, dans celui d'une arithmodirigée, s'étendent sans modification aux hyperdroites. Mais il y a lieu de noter que, dès l'hyperespace à quatre dimensions, un fait remarquable se produit à l'occasion des propriétés caractéristiques de l'équation de Brahmagupta-Fermat du présent paragraphe : c'est qu'en vertu du théorème de Bachet (généralisé pour les nombres rationnels) le coefficient de t^2 et le terme indépendant de t ne sont plus soumis qu'à l'unique condition d'être positifs. Quant au discriminant, positif lui aussi, il reste lié aux deux coefficients dont il vient d'être question. Dans le cas de l'hyperespace à quatre dimensions il y a même lieu d'observer que ce discriminant est nécessairement une somme de trois carrés, en vertu de l'identité d'Euler

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) - (aa' + bb' + cc' + dd')^2 =$$
$$(ab' - ba' - cd' + dc')^2 + (ac' + bd' - ca' - db')^2 + (ad' - bc' + cb' - da')^2 \,.$$

Triangles à bissectrices rationnelles.

27. — La détermination des triangles à côtés rationnels admettant une bissectrice intérieure ou extérieure rationnelle est réductible à l'étude d'une équation de Brahmagupta-Fermat.

Supposons, en effet, qu'il s'agisse de la bissectrice intérieure d de l'angle A d'un triangle ABC de côtés a, b, c. La relation qui lie a, b, c, d

$$bc = d^2 + \frac{a^2 bc}{(b + c)^2}$$