

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 18 (1916)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE  
**Autor:** Turrière, Emile  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-16887>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

(2<sup>e</sup> article)<sup>1</sup>

PAR

Emile TURRIÈRE (Montpellier).

### Les équations de Brahmagupta-Fermat.

21. — LES ARITHMOCONIQUES. — Une conique, dont l'équation est à coefficients rationnels, n'est pas nécessairement douée d'arithmopoints ; mais du seul fait qu'une conique, dont l'équation cartésienne a tous ses coefficients rationnels, possède un arithmopoint, il résulte que cette courbe possède une infinité de points de cette nature. L'arithmopoint courant de cette courbe, qui est dès lors une arithmoconique, s'obtient par son intersection avec une arithmodroite arbitraire, pivotant autour de l'arithmopoint primitivement connu. Tout l'effort à faire dans l'étude d'une équation indéterminée du second degré, à deux inconnues, doit précisément porter sur la mise en évidence d'un arithmopoint particulier de la conique représentative (les axes pouvant être quelconques d'ailleurs).

La méthode géométrique qui se rattache aux considérations précédentes permet d'expliquer un certain nombre d'artifices qui ont été employés dans l'étude de diverses équations indéterminées. Ce sera l'objet d'une grande partie du présent travail. Mais, avant d'aborder cette étude, je désire mentionner un exemple bien simple d'identité algébrique, découverte par EULER comme application de la for-

<sup>1</sup> Voir *L'Enseignement mathématique* du 15 mars 1916, 18<sup>e</sup> année, p. 81 à 110.

mule de Moivre, et qui se rattache à la correspondance entre arithmopoints d'une arithmoconique établie par les cercles osculateurs de cette courbe.

Il est, en effet, évident que le cercle osculateur d'une arithmoconique en un arithmopoint  $m$  est un arithmocercle et que cet arithmocercle rencontre à nouveau l'arithmoconique en un second arithmopoint. Pour une arithmoconique représentée, par exemple, par l'équation

$$ax^2 + by^2 = c ,$$

les coordonnées ( $X, Y$ ) du point  $M$  sont données en fonctions de celles ( $x, y$ ) de  $m$ , par les formules suivantes :

$$X = \frac{ax^3 - 3by^2x}{c} , \quad Y = \frac{3ax^2y - by^3}{c} .$$

La relation

$$ax^2 + by^2 = c$$

entraîne immédiatement l'identité à laquelle je faisais allusion ci-dessus,

$$ak^2 + bl^2 \equiv (ax^2 + by^2)^2 ,$$

dans laquelle EULER pose :

$$\begin{cases} k = x(ax^2 - 3by^2) , \\ l = y(3ax^2 - by^2) . \end{cases}$$

**22. — LES ÉQUATIONS DE BRAHMAGUPTA-FERMAT.** Parmi les équations indéterminées du second degré à deux inconnues, les plus remarquables sous bien des rapports sont assurément celles qui rentrent dans la forme générale suivante :

$$y^2 = Ax^2 + 2Bx + C ,$$

$A, B, C$  étant trois coefficients algébriques absolument quelconques mais rationnels ; en d'autres termes, ces équations sont celles qui se rattachent, du point de vue arithmogéométrique, à l'étude d'une conique admettant pour axe de symétrie l'axe des abscisses. Par un simple changement de l'axe des coordonnées, il est d'ailleurs toujours possible de réduire l'étude de cette équation, sans en restreindre la généralité, à celle de l'équation pour laquelle  $B$  est nul, c'est-à-dire encore à celle d'une conique rapportée à ses axes de symétrie.

Un cas particulier de cette équation réduite a primitive-  
ment été traité par BRAHMAGUPTA qui a montré que la solu-  
tion générale d'une équation

$$y^2 = nx^2 + 1$$

est donnée par les formules suivantes en fonction d'un pa-  
ramètre rationnel  $t$  quelconque :

$$x = \frac{2t}{t^2 - n}, \quad y = \frac{t^2 + n}{t^2 - n}.$$

BRAHMAGUPTA démontre d'autre part que l'équation

$$y^2 = nx^2 - 1$$

n'est résoluble en nombres rationnels que lorsque  $n$  est  
exprimable par une somme de deux carrés.

C'est principalement à FERMAT et à LAGRANGE que sont  
dûes les principales recherches relatives aux équations de  
cette nature. Je rappellerai, à ce propos, que la résolution  
de l'équation

$$y^2 = nx^2 + 1$$

fut proposée en défi par FERMAT à plusieurs géomètres  
anglais; WALLIS obtint la solution par tâtonnements suc-  
cessifs. La solution de Brahmagupta fut retrouvée, en cette  
circonstance, par lord BROUNCKER.

Revenant à la question qui m'intéresse, je ferai observer  
qu'une équation de Brahmagupta-Fermat est nécessairement  
résoluble dès qu'une solution particulière est connue : soit  
( $x_0$ ,  $y_0$ ); il suffit alors de déterminer l'intersection de  
l'arithmoconique qu'elle représente avec une arithmodroite  
arbitraire issue de l'arithmopoint connu, c'est-à-dire de  
résoudre le système formé par l'équation considérée et par  
l'équation

$$y - y_0 = t(x - x_0),$$

dans laquelle  $t$  est un paramètre rationnel quelconque. Pour  
l'équation

$$y^2 = nx^2 + 1,$$

admettant évidemment la solution ( $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ ), on

retrouve de cette façon les formules de Brahmagupta (aux signes près).

**23.** — L'ÉQUATION DU PROBLÈME DES ARITHMODISTANCES RELATIF A UNE ARITHMODROITE. Reprenons le problème du § 18 : nous avons vu que le problème, en géométrie plane, des distances rationnelles relatif à une arithmodroite représentée par les équations

$$x = At + A' , \quad y = Bt + B' ,$$

et à un arithmopoint  $(a, b)$  se ramène à une équation,

$$Y^2 = (A^2 + B^2)X^2 + 2[A(A' - a) + B(B' - b)]X + (A' - a)^2 + (B' - b)^2 ,$$

entrant, comme cas particulier, dans l'équation générale du § 22.

L'équation précédente est caractérisée par les trois conditions simultanément remplies qui suivent : le coefficient de  $X^2$  et le coefficient indépendant de  $X$  sont respectivement deux sommes de deux carrés ; le discriminant du trinôme en  $X$  est carré parfait :

$$\begin{aligned} (A^2 + B^2)[(A' - a)^2 + (B' - b)^2] - [A(A' - a) + B(B' - b)]^2 \\ \equiv [A(B' - b) - B(A' - a)]^2 . \end{aligned}$$

Soit, réciproquement, une équation de Brahmagupta-Fermat satisfaisant à la triple condition précédente :

$$Y^2 = (\alpha^2 + \beta^2)X^2 + \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2)} - \mathcal{D}^2 \cdot X + \alpha'^2 + \beta'^2 ,$$

et, par conséquent, réductible à la forme suivante :

$$Y^2 = (\alpha^2 + \beta^2)X^2 + \frac{\mathcal{D}^2}{\alpha^2 + \beta^2} .$$

Il y aura identité entre cette équation et celle qui est écrite plus haut s'il est possible de déterminer deux azimuts  $\theta$  et  $\theta'$  à demi-tangentes rationnelles tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta , \quad B = -\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta , \\ A' - a = \alpha' \cos \theta' + \beta' \sin \theta' , \quad B' - b = -\alpha' \sin \theta' + \beta' \cos \theta' , \\ \mathcal{D} = A(B' - b) - B(A' - a) ; \end{array} \right.$$

la dernière de ces relations s'écrit encore :

$$(\alpha\alpha' + \beta\beta') \sin(\theta - \theta') + (\alpha\beta' - \beta\alpha') \cos(\theta - \theta') = \mathcal{D} ;$$

cette équation a deux racines rationnelles en  $\tan \frac{\theta - \theta'}{2}$ . Il en résulte qu'il est possible de considérer l'équation de Brahmagupta-Fermat précédente comme étant résolvante d'un problème de distances rationnelles relatif à une arithmodroite ; on se donnera arbitrairement  $a$ ,  $b$  et  $\theta'$ ;  $\theta$ , A, B, A', B' seront dès lors déterminés.

En d'autres termes, toute équation de Brahmagupta-Fermat

$$y^2 = \mathfrak{A}x^2 + 2\mathfrak{B}x + \mathfrak{C} ,$$

dans laquelle  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{C}$  sont des sommes de deux carrés et dont le discriminant est carré parfait, est susceptible d'être envisagée comme pouvant être associée, au titre de résolvante, à un problème d'arithmodistances relatif à une arithmodroite du plan.

Un cas particulier remarquable de résolution d'une équation du type précédent est celui où le coefficient de  $x^2$  est un carré parfait, c'est-à-dire celui où les points à l'infini de l'hyperbole représentative sont des arithmopoints. Ce cas correspond au problème des arithmodistances relatif à une arithmodirigée ; la résolution de l'équation considérée s'effectue par l'intersection de l'arithmohyperbole avec une arithmodroite parallèle à l'une des asymptotes. Adoptons la représentation suivante de l'arithmopoint courant

$$x = \varpi \cos \varphi - \lambda \sin \varphi ,$$

$$y = \varpi \sin \varphi + \lambda \cos \varphi ,$$

de l'arithmodirigée d'équation

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi ,$$

$\lambda$  étant la distance de l'arithmopoint au pied de la perpendiculaire menée de O sur l'arithmodirigée ; le problème des arithmodistances relatif à cette arithmodirigée et à l'origine des coordonnées est résolu par l'équation

$$d^2 = \varpi^2 + \lambda^2 ,$$

associable à une arithmohyperbole équilatère. La solution générale est donc :

$$\lambda = \varpi \cdot \frac{2l}{1 - l^2},$$

$l$  étant un paramètre rationnel arbitraire.

**24. — MÊME PROBLÈME POUR L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS.**  
Soit une arithmodroite de l'espace ordinaire, représentée par des équations rationnelles :

$$x = At + A', \quad y = Bt + B', \quad z = Ct + C',$$

et soit à résoudre, pour elle, le problème des arithmodistances, le point rationnel imposé étant, par exemple et sans restriction de la généralité de la question, l'origine des coordonnées. Le problème est réductible à l'étude de solutions rationnelles de l'équation de Brahmagupta-Fermat :

$$Y^2 = (A^2 + B^2 + C^2)X^2 + 2(AB + BC + CA)X + A'^2 + B'^2 + C'^2.$$

Les conclusions, quant à la résolubilité d'une telle équation résultant de la connaissance *a priori* d'une solution particulière, et à la possibilité de résoudre complètement le problème relatif à une arithmodirigée (c'est-à-dire une arithmodroite telle que  $A^2 + B^2 + C^2$  soit carré parfait) sont identiques à celles du problème de la géométrie plane.

Il y a simplement lieu d'énoncer la propriété suivante de l'équation considérée : *Le coefficient de  $X^2$ , le terme indépendant de  $X$  et le discriminant du trinôme en  $X$  sont nécessairement trois sommes de trois carrés.*

**25. — LES PROBLÈMES DES DROITES ET PLANS ARITHMODIRIGÉS DANS L'ESPACE ORDINAIRE.** Etant donné un arithmoplan, on peut se proposer de déterminer celles des arithmodroites qu'il contient qui sont des arithmodirigées. Le plan étant défini par deux directions quelconques  $(A, B, C)$  et  $(A', B', C')$ , toute direction d'arithmodroite contenue dans le plan sera définie par des coefficients directeurs  $At + A'$ ,  $Bt + B'$ ,  $Ct + C'$ , dans lesquels  $t$  est un nombre rationnel arbitraire. La direction envisagée sera celle d'une arithmodirigée si la somme des carrés des trois coefficients direc-

teurs est le carré d'un nombre rationnel;  $t$  sera ainsi solution d'une équation de Brahmagupta-Fermat qui n'est autre que celle du problème du § 24.

Supposons d'autre part qu'étant donnée une arithmodroite de l'espace, on se propose de déterminer ceux des plans appartenant au faisceau qu'elle définit qui soient des *plans arithmodirigés*, en désignant ainsi des plans jouissant de propriétés analogues à celles des droites arithmodirigées et qui sont définis par la condition suivante: un plan d'équation

$$ux + \nu y + \omega z + h = 0 ,$$

où les coefficients  $u, \nu, \omega, h$  sont rationnels, est un plan arithmodirigé si  $\sqrt{u^2 + \nu^2 + \omega^2}$  est un nombre rationnel. Soient

$$Ax + By + Cz + D = 0 , \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0 ,$$

les équations des deux plans particuliers du faisceau, définissant la droite imposée. Un arithmoplan quelconque de ce faisceau est représenté par une équation dont les coefficients  $u, \nu, \omega, h$  sont des expressions de la forme  $u = At + A'$ ,  $\nu = Bt + B'$ ,  $\omega = Ct + C'$ ,  $h = Dt + D'$ ,  $t$  étant un paramètre rationnel quelconque. Ce plan sera un plan arithmodirigé si l'expression  $(At + A')^2 + (Bt + B')^2 + (Ct + C')^2$  est un carré parfait; de sorte que les paramètres  $t$  qui repèrent les plans arithmodirigés appartenant au faisceau donné sont les solutions d'une équation de Brahmagupta-Fermat identique à celle du § 24.

En résumé, *le problème des droites arithmodirigées situées dans un arithmoplan donné et le problème des plans arithmodirigés passant par une arithmodroite donnée sont équivalents au problème des arithmodistances relativement à une arithmodroite de l'espace.*

**26. — MÊMES PROBLÈMES DANS UN HYPERESPACE.** Le problème des arithmodistances relatif à l'origine des coordonnées et à une arithmohyperdroite de l'espace à  $n$  dimensions, représentée par les équations

$$x_1 = A_1 t + A'_1 , \quad x_2 = A_2 t + A'_2 , \dots , \quad x_n = A_n t + A'_n$$

dépend d'une équation de Brahmagupta-Fermat

$$Y^2 = \sum_1^n A_k^2 \cdot t^2 + \sum_1^n A_k A'_k t + \sum_1^n A''_n .$$

Cette même équation peut encore être considérée comme résolvant les problèmes des droites arithmodirigées ou des plans arithmodirigés analogues à ceux du § 25 mais relatifs à l'hyperespace à  $n$  dimensions. Les considérations développées plus haut quant à la résolubilité d'une telle équation dans le cas d'une solution connue *a priori* et, plus particulièrement, dans celui d'une arithmodirigée, s'étendent sans modification aux hyperdroites. Mais il y a lieu de noter que, dès l'hyperespace à quatre dimensions, un fait remarquable se produit à l'occasion des propriétés caractéristiques de l'équation de Brahmagupta-Fermat du présent paragraphe : c'est qu'en vertu du théorème de Bachet (généralisé pour les nombres rationnels) le coefficient de  $t^2$  et le terme indépendant de  $t$  ne sont plus soumis qu'à l'unique condition d'être positifs. Quant au discriminant, positif lui aussi, il reste lié aux deux coefficients dont il vient d'être question. Dans le cas de l'hyperespace à quatre dimensions il y a même lieu d'observer que ce discriminant est nécessairement une somme de trois carrés, en vertu de l'identité d'Euler

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) - (aa' + bb' + cc' + dd')^2 = \\ (ab' - ba' - cd' + dc')^2 + (ac' + bd' - ca' - db')^2 + (ad' - bc' + cb' - da')^2 .$$

### Triangles à bissectrices rationnelles.

27. — La détermination des triangles à côtés rationnels admettant une bissectrice intérieure ou extérieure rationnelle est réductible à l'étude d'une équation de Brahmagupta-Fermat.

Supposons, en effet, qu'il s'agisse de la bissectrice intérieure  $d$  de l'angle A d'un triangle ABC de côtés  $a, b, c$ . La relation qui lie  $a, b, c, d$

$$bc = d^2 + \frac{a^2 bc}{(b+c)^2}$$

peut être écrite sous la forme

$$\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 = \left(\frac{b+c}{a}d\right)^2 \frac{1}{bc} + 1 ;$$

elle est donc de la forme d'une équation résoluble de Brahmagupta-Fermat :

$$y^2 = nx^2 + 1 ,$$

avec

$$y = \frac{b+c}{a} , \quad x = \frac{b+c}{a}d , \quad n = \frac{1}{bc} .$$

Il résulte de cette remarque que : *pour avoir un triangle à côtés rationnels admettant une bissectrice intérieure rationnelle, il suffit de se donner les mesures rationnelles b et c des côtés comprenant cette bissectrice et un troisième paramètre arbitraire t et de poser :*

$$a = \frac{bc - t^2}{bc + t^2} (b + c) ;$$

la bissectrice a pour longueur :

$$d = \frac{2bct}{bc + t^2} .$$

Il suffira, sans restreindre la généralité de la solution, de se borner aux valeurs de  $t$  comprises entre 0 et  $\sqrt{bc}$ , mais il y aura lieu de préciser, suivant les valeurs de  $b$  et  $c$ , les limites des intervalles dans lesquels doit être choisi le paramètre  $t$ .

Le problème des bissectrices extérieures rationnelles est réductible à une équation analogue.

**28. — TRIANGLES A BISSECTRICES INTÉRIEURES RATIONNELLES.**  
Etant donné un triangle quelconque ABC à côtés rationnels  $a, b, c$ , le produit des bissectrices intérieures est égal à

$$\frac{8abcp}{(b+c)(c+a)(a+b)} S .$$

*Si donc, dans un triangle à côtés rationnels, les trois bissectrices intérieures sont simultanément rationnelles, le triangle est nécessairement un arithmotriangle hérondien.*

Réiproquement, la rationalité de deux des trois bissec-

*trices intérieures d'un arithmotriangle heronien entraîne celle de la troisième.*

On observera, en outre, que, dans un arithmotriangle heronien, la rationalité de la bissectrice intérieure de l'angle A, par exemple, est équivalente à celle de  $\tan \frac{A}{4}$ . *Les arithmotriangles à bissectrices intérieures rationnelles sont donc caractérisés par la rationalité de  $\tan \frac{A}{4}$ ,  $\tan \frac{B}{4}$ ,  $\tan \frac{C}{4}$ .*

En posant

$$\tan \frac{A}{4} = x, \quad \tan \frac{B}{4} = y, \quad \tan \frac{C}{4} = z,$$

ces nombres  $x, y, z$  sont liés par la relation

$$xyz + 1 = xy + yz + zx + x + y + z.$$

L'étude de ces arithmotriangles linéaires à bissectrices intérieures rationnelles est ainsi rattachée à l'étude d'une arithmosurface cubique, ou, mieux, à celle d'une arithmoquadrice

$$\xi\eta + \eta\zeta + \zeta\xi + 1 = 0$$

transformée de la précédente arithmosurface cubique au moyen de la transformation birationnelle définie par les formules :

$$x = \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \quad y = \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \quad z = \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}.$$

Sous un point de vue à la fois plus géométrique et plus élémentaire, il est possible de définir autrement ces mêmes triangles. Soit, en effet, un arithmotriangle général  $\mathcal{ABC}$  de hauteurs  $\mathcal{A}A$ ,  $\mathcal{B}B$  et  $\mathcal{C}C$ . Les bissectrices intérieures du triangle ABC sont identiques à ces hauteurs ; d'autre part, le rayon du cercle circonscrit R au triangle ABC est la moitié de celui  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{ABC}$  ; quant aux angles, ils sont liés par trois relations telles que  $A = \pi - 2\mathcal{A}$  ; les côtés de ABC sont ainsi rationnels et égaux à  $\mathcal{R} \sin 2\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{R} \sin 2\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{R} \sin 2\mathcal{C}$ . *Tout arithmotriangle heronien à bissectrices rationnelles peut*

donc être considéré comme étant le triangle pédal d'un arithmotriangle heronien.

Je ferai remarquer enfin que, le rapport de la bissectrice intérieure à la bissectrice extérieure d'un même angle A d'un triangle ABC étant égal à la valeur absolue de  $\tan \frac{B-C}{2}$ , à toute bissectrice intérieure rationnelle d'un arithmotriangle heronien correspond une bissectrice extérieure rationnelle elle aussi. Le triangle à bissectrices intérieures simultanément rationnelles a donc ses bissectrices extérieures rationnelles.

**29. — ARITHMOTRIANGLES PYTHAGORIQUES A BISSECTRICES RATIONNELLES. LE PROBLÈME DE DIOPHANTE.** Il résulte des considérations qui précèdent que, dans un arithmotriangle pythagorique, les bissectrices intérieure et extérieure issues du sommet de l'angle droit ne sauraient être rationnelles : le nombre  $\tan \frac{A}{8}$  est, en effet, irrationnel.

Un arithmotriangle pythagorique a, en général, toutes ses bissectrices tant intérieures qu'extérieures irrationnelles. Le seul cas de bissectrices rationnelles à considérer ici est celui où les bissectrices intérieure et extérieure d'un même angle aigu sont rationnelles. L'angle droit étant l'angle A, pour que les deux bissectrices de l'angle B soient rationnelles, il faut et il suffit que le nombre  $\tan \frac{B}{4}$  soit rationnel. Ce nombre rationnel doit d'ailleurs être compris dans l'intervalle  $0, \sqrt{2} - 1$ .

Il y a lieu de rappeler ici que DIOPHANTE a montré que, d'un arithmotriangle pythagorique, il est possible de déduire un nouveau triangle de même nature ayant une bissectrice intérieure et une bissectrice extérieure rationnelles. Considérons, en effet, un arithmotriangle pythagorique ABD d'hypoténuse  $BD = \alpha$  et de cathètes  $AB = \delta$ ,  $AD = \beta$ . La méthode de Diophante consiste à prolonger AD, dans le sens de A vers D, d'une longueur inconnue  $DC (= \beta x - \beta)$  telle que  $AC = \beta x$ ; cette inconnue  $x$  est alors déterminée par la condition que BD soit précisément la bissectrice intérieure.

rieure issue de B dans le triangle rectangle ABC; on trouve ainsi :

$$BC = \delta x - \delta, \quad x = \frac{2\delta^2}{\delta^2 - \beta^2}.$$

Ainsi donc, de l'arithmotriangle ABD il est possible de déduire un arithmotriangle pythagorique ABC de côtés

$$BC = \frac{\delta \alpha^2}{\delta^2 - \beta^2}, \quad CA = 2 \frac{\delta^2 \beta^2}{\delta^2 - \beta^2}, \quad AB = \delta,$$

dont la bissectrice intérieure BD est rationnelle et égale à  $\alpha$ .

La bissectrice extérieure BE correspondante est alors rationnelle elle aussi et égale à  $\frac{\alpha \delta}{\beta}$ .

Dans le cas ( $\alpha = 5$ ,  $\beta = 3$ ,  $\delta = 4$ ) de l'arithmotriangle pythagorique le plus simple, Diophante trouve ainsi :

$$BC = \frac{100}{7}, \quad CA = \frac{96}{7}, \quad AB = 4, \quad BD = 5, \quad BE = \frac{20}{3}.$$

Par similitude, on peut rendre entiers les côtés de ce dernier triangle et les prendre égaux à 100, 96 et 28. Cet arithmotriangle correspond d'autre part à la valeur  $\frac{1}{3}$  de  $\tan \frac{B}{4}$ .

### Déformation du quadrilatère orthodiagonal. Quadrilatère de Brahmagupta.

#### 30. — La relation

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

caractérise, on le sait, les quadrilatères plans ou gauches dont les diagonales sont orthogonales;  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  sont ici les mesures des longueurs des côtés consécutifs du quadrilatère. Il résulte du fait que la relation précédente ne fait intervenir que les seules mesures des côtés que, si l'orthogonalité est assurée pour un quadrilatère déformable, constitué par quatre tiges rigides et articulées aux quatre sommets, elle se maintient pour toutes les formes du quadrilatère, dans sa déformation dans le plan ou dans l'espace.

La détermination de celles des familles de quadrilatères orthodiagonaux dont les côtés sont rationnellement mesurés

dépend donc de la théorie de l'arithmocercle. Il suffira de se donner arbitrairement deux côtés  $a$  et  $c$  opposés et de poser

$$b = a \cos \lambda + c \sin \lambda \quad d = -a \sin \lambda + c \cos \lambda$$

$\tan \frac{\lambda}{2}$  étant un nombre rationnel quelconque lui aussi.

Parmi les quadrilatères plans obtenus dans la déformation d'un quadrilatère orthodiagonal articulé, ceux qui sont inscriptibles dans une circonference et dont les diagonales sont rationnelles méritent de retenir un instant notre attention : ce sont, en effet, les *quadrilatères de Brahmagupta*, généralisant le quadrilatère de côtés  $AB = 25$ ,  $BC = 52$ ,  $CD = 60$ ,  $DA = 39$  et de diagonales  $AC = 63$ ,  $BD = 56$  considéré par BRAHMAGUPTA, et qui semblent avoir permis à FIBONACCI (LÉONARD DE PISE) d'établir par une méthode géométrique l'identité qui porte son nom<sup>1</sup>.

On remarquera que, dans tout triangle à côtés rationnels, même si le triangle n'est pas heronien, les segments déterminés sur les côtés par les pieds des hauteurs sont mesurés rationnellement ; de sorte que tout quadrilatère de Brahmagupta est constitué par la juxtaposition de quatre arithmotriangles pythagoriques : pour le quadrilatère considéré par Brahmagupta lui-même, par exemple, les diagonales se partagent mutuellement en des segments entiers :  $OA = 15$ ,  $OB = 20$ ,  $OC = 48$ ,  $OD = 36$ . Pour tout quadrilatère de cette espèce, d'autre part, le rayon du cercle circonscrit est nécessairement rationnel.

Il en résulte une construction arithmogéométrique générale des quadrilatères de Brahmagupta généralisant celle des arithmotriangles héroniens (§ 12) : On se donnera un arithmocercle quelconque de rayon rationnel et, sur sa circonference, on marquera quatre arithmopoints particuliers repérés par des azimuts respectifs  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$  tels que  $\tan \frac{\theta_1}{4}$ ,  $\tan \frac{\theta_2}{4}$ ,  $\tan \frac{\theta_3}{4}$ ,  $\tan \frac{\theta_4}{4}$  soient quatre nombres rationnels. Trois d'entre eux sont quelconques ; quant au qua-

<sup>1</sup> Au sujet des quadrilatères de Brahmagupta, cf. A. AUBRY, Le premier chapitre de la théorie élémentaire des nombres. (*L'Enseignement mathématique*, t. XVII, pp. 161-195 ; particulièrement pp. 174-175.)

trième, il est complètement défini au moyen des trois premiers par la condition d'orthogonalité des diagonales.

Il est d'autre part possible d'étendre aux mêmes quadrilatères de Brahmagupta la construction des arithmotriangles héroniens au moyen de droites arithmodirigées. On se donnera trois des directions des côtés, la quatrième direction étant alors entièrement déterminée ; il suffira alors de tracer quatre arithmodirigées parallèles à ces quatre directions.

La théorie des quadrilatères de Brahmagupta présente donc les plus grandes analogies avec celle des arithmotriangles héroniens. *De tout arithmotriangle héronien, il est d'ailleurs possible de déduire trois quadrilatères de Brahmagupta* : à cet effet, il suffit d'adoindre aux trois sommets de l'arithmotriangle héronien l'intersection de l'arithmocercle circonscrit avec l'une quelconque des trois arithmohauteurs.

Le quadrilatère de Brahmagupta le plus général est susceptible d'être ainsi engendré à partir d'un arithmotriangle héronien général. Il y a lieu d'observer d'ailleurs que tout quadrilatère plan dont les côtés et les diagonales sont six longueurs rationnelles et dont la surface est aussi mesurée par un nombre rationnel, peut être considéré comme somme ou différence d'arithmotriangles héroniens. Soit, en effet, ABCD un tel quadrilatère ; il est, pour fixer les idées, somme de deux triangles ABC et BCD. Si les aires de ceux-ci étaient irrationnelles (et nécessairement toutes deux de la forme  $\sqrt{\alpha}$ ,  $\alpha$  étant un nombre rationnel), un nombre rationnel serait la somme de deux irrationnelles  $\sqrt{\alpha}$  et  $\sqrt{\beta}$  ; c'est une condition impossible et, par conséquent, les deux triangles ABC et BCD sont héroniens de toute nécessité.

**31. — TÉTRAÈDRES ORTHOCENTRIQUES.** Parmi l'infini de tétraèdres obtenus par la déformation d'un quadrilatère orthodiagonal articulé, il y a lieu de considérer d'une manière toute spéciale les tétraèdres orthocentriques.

Le tétraèdre orthocentrique général peut être envisagé comme contenant trois quadrilatères gauches orthodiagonaux. Soit SABCD un tétraèdre de cette espèce. Je poserai

$$\begin{array}{lll} BC = a, & CA = b, & AB = c, \\ SA = \alpha, & SB = \beta, & SC = \gamma; \end{array}$$

les conditions, au nombre de deux, d'existence d'un orthocentre, sont :

$$a^2 + \alpha^2 = b^2 + \beta^2 = c^2 + \gamma^2.$$

Conformément à la théorie de l'arithmocercle, il suffira de se donner quatre nombres rationnels  $a, \alpha, \tan \frac{\lambda}{2}, \tan \frac{\mu}{2}$ , et de poser :

$$\begin{aligned} b &= a \cos \lambda + \alpha \sin \lambda, & c &= a \cos \mu + \alpha \sin \mu, \\ \beta &= -\alpha \sin \lambda + a \cos \lambda, & \gamma &= -\alpha \sin \mu + a \cos \mu, \end{aligned}$$

les quatre nombres rationnels  $a, \alpha, \tan \frac{\lambda}{2}, \tan \frac{\mu}{2}$  étant uniquement assujettis aux conditions qui assurent l'existence effective du quadrilatère.

### Application des équations de Brahmagupta-Fermat à l'extraction approchée des racines carrées.

32. — EXTRACTION APPROCHÉE PAR EXCÈS. Je partirai de l'équation considérée par Brahmagupta

$$nx^2 + 1 = y^2,$$

$n$  étant le nombre rationnel, positif, non carré dont il s'agit de calculer la racine carrée;  $t$  étant un nombre rationnel arbitraire, la solution générale de cette équation est donnée par les formules de Brahmagupta rappelées au § 23 :

$$x = \frac{2t}{n-t^2}, \quad y = \frac{n+t^2}{n-t^2}.$$

Dans ces conditions, si  $t$  est un nombre rationnel suffisamment voisin de  $\sqrt{n}$ ,  $x$  et  $y$  sont des nombres très grands; tout se passe alors comme si l'équation  $nx^2 + 1 = y^2$  se réduisait à  $nx^2 = y^2$ ; de sorte que  $\frac{y}{x}$  est une valeur approchée de  $\sqrt{n}$  (par excès). Cette valeur approchée de  $\sqrt{n}$  est

$$v_1 = \frac{n+t^2}{2t};$$

l'erreur commise est :

$$\varepsilon_1 = \nu_1 - \sqrt{n} ;$$

on a donc

$$y = x(\varepsilon_1 + \sqrt{n})$$

et, par suite,

$$1 = x^2(\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1\sqrt{n}) ,$$

de sorte que l'expression

$$\frac{1}{2\sqrt{n}x^2} ,$$

où  $\sqrt{n}$  est remplacé par une valeur approchée par défaut, représente une limite supérieure de cette erreur  $\varepsilon_1$ .

### 33. — EXTRACTION APPROCHÉE PAR DÉFAUT. L'équation

$$nx^2 - 1 = y^2$$

n'étant résoluble que lorsque  $n$  est une somme de deux carrés, on ne peut songer à l'utiliser pour déterminer une valeur approchée par défaut de  $\sqrt{n}$ . Pour obtenir celle-ci, il y aura lieu d'avoir recours à une équation résoluble quel que soit  $n$ ; par exemple, à l'équation

$$nx^2 - \frac{1}{n} = y^2$$

représentative d'une arithmohyperbole passant par l'arithmo-point  $x = \frac{1}{n}$ ,  $y = 0$ . La méthode générale de résolution des équations de Bragmagupta-Fermat, à partir d'une solution particulière connue *a priori*, conduit actuellement aux formules suivantes de résolution :

$$x = \frac{n + t^2}{n(n - t^2)} , \quad y = \frac{2t}{n - t^2} .$$

Comme dans le paragraphe précédent,  $t$  sera une valeur rationnelle approchée de  $\sqrt{n}$ ; le rapport  $\frac{y}{x} = \nu_2$ , c'est-à-dire

$$\nu_2 = \frac{2nt}{n + t^2} ,$$

sera une valeur approchée (par défaut) de la racine carrée

de  $n$ . Pour expression de l'erreur  $\epsilon_2$ , on pourrait prendre :

$$\epsilon_2 = \frac{1}{\frac{3}{2n^{\frac{3}{2}}}x^2}.$$

**34.** — En résumé, la théorie des équations de Brahmagupta-Fermat conduit à un procédé d'extraction des racines carrées fondé sur les inégalités

$$\frac{2nt}{n+t^2} < \sqrt{n} < \frac{n+t^2}{2t}.$$

Les termes extrêmes ont pour produit  $n$  et leur différence est :

$$\frac{n+t^2}{2t} - \frac{2nt}{n+t^2} = \frac{(n-t^2)^2}{2t(n+t^2)}.$$

Cette méthode n'est d'ailleurs pas distincte de celle employée par les géomètres grecs, par ARCHIMÈDE notamment :

Soit, pour fixer les idées, à extraire la racine carrée de  $n = 1000$ . Ce nombre étant compris entre  $\overline{31}^2 = 961$  et  $\overline{32}^2 = 1024$ , il y aura lieu de prendre  $t = 32$ , dans une première application des formules précédentes ; on obtient ainsi

$$\frac{8000}{253} = 31,620 < \sqrt{1000} < \frac{253}{8} = 31,625,$$

c'est-à-dire deux décimales exactes dès cette première application.

Une seconde application avec  $t = \frac{253}{8}$  donne

$$\frac{4 \cdot 048 \cdot 000}{128 \cdot 009} < \sqrt{1000} < \frac{128 \cdot 009}{408},$$

ou encore :

$$31,622 \cdot 776 \cdot 3 < \sqrt{1000} < 31,622 \cdot 776 \cdot 6,$$

c'est-à-dire six décimales exactes.

Une troisième application donne quinze décimales :

$$31,622 \cdot 776 \cdot 601 \cdot 683 \cdot 793 \cdot 2 < \sqrt{1000} < 31,622 \cdot 776 \cdot 601 \cdot 683 \cdot 793 \cdot 4.$$

### Décompositions des nombres rationnels.

**35. — DÉCOMPOSITIONS QUADRATIQUES.** Parmi les problèmes les plus intéressants de la théorie des nombres rationnels, il y a certainement lieu de placer celui qui consiste, étant donné un nombre rationnel  $n$ , à le mettre sous la forme

$$n = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k)}{g(x_1, x_2, \dots, x_k)},$$

$f$  et  $g$  étant deux polynomes à coefficients rationnels et à  $k$  variables  $x_1, x_2 \dots x_{k-1}, x_k$ . Le cas particulier

$$n = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$$

a été précédemment envisagé à l'occasion de l'étude des arithmosphères ou des arithmohypersphères.

Le problème général que je viens d'énoncer n'est évidemment autre qu'une application de la théorie arithmogéométrique d'une certaine surface (ou hypersurface) algébrique dont le degré est le degré le plus élevé des polynomes  $f$  ou  $g$ .

Après le cas sans difficulté et sans intérêt du problème associé à un arithmoplan ou à un arithmohyperplan, le cas le plus simple est celui du problème associé à une arithmocoïne, une arithmoquadrique ou une arithmohyperquadrique.

Ce dernier problème n'est pas toujours possible : c'est ce que prouvent les exemples  $n = x_1^2 + x_2^2$  et  $n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ , puisqu'un cercle ou une sphère ne sont pas nécessairement doués d'arithmopoints. Mais dès qu'une solution est connue par un procédé quelconque, il est possible d'en déduire une  $\infty^{k-1}$ , dans ce même cas de polynomes quadratiques. *Une quadrique (ou hyperquadrique) est, en effet, une arithmoquadrique ou une arithmohyperquadrique du seul fait qu'elle possède un arithmopoint (ou arithmohyperpoint) particulier.*

L'arithmopoint général de cette arithmoquadrique (ou

arithmohyperquadrique) n'est autre que son intersection avec une arithmodroite (ou hyperarithmodroite) quelconque pivotant autour de l'arithmopoint (ou arithmohyperpoint) imposé. Soient  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0$ , les coordonnées rationnelles de celui-ci. Il suffira de résoudre le système d'équations

$$f(x_1, \dots, x_k) - ng(x_1, \dots, x_k) = 0,$$

$$\frac{x_1 - x_1^0}{a_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{a_2} = \dots = \frac{x_k - x_k^0}{a_k},$$

dans lesquelles  $a_1 \dots a_k$  sont  $k$  indéterminées; la solution  $(x_1, \dots, x_k)$  est rationnelle et dépend de  $k - 1$  rapports mutuels des  $(a_1, \dots, a_k)$ .

En résumé, *la représentation d'un nombre rationnel imposé n au moyen d'une fraction rationnelle quadratique donnée à k variables, n'est pas toujours possible; mais l'existence d'une solution particulière entraîne celle d'une  $\infty^{k-1}$  de solutions.*

**36.** — DÉCOMPOSITION DU TROISIÈME DEGRÉ. Le problème de la représentation d'un nombre rationnel au moyen de la fraction rationnelle  $\frac{f}{g}$ , dont un des deux termes au moins est du troisième degré, l'autre pouvant être d'un degré inférieur, mérite sous beaucoup de rapports d'être étudié.

Il y a lieu de traiter tout d'abord le cas de trois variables, qui se trouve être plus simple que celui de deux variables seulement. Je supposerai donc qu'il s'agit de mettre le nombre rationnel  $n$  sous la forme de la fraction rationnelle cubique donnée

$$n = \frac{f(x, y, z)}{g(x, y, z)},$$

dépendant de trois variables  $x, y, z$ . La surface associée est alors une surface cubique de l'espace ordinaire, représentée par l'équation

$$f(x, y, z) - n \cdot g(x, y, z) = 0.$$

Le problème n'est pas toujours possible: c'est ce que

prouvent les exemples donnés plus loin d'impossibilité de décomposition d'un nombre rationnel donné en une somme de trois cubes de nombres rationnels. Mais ici encore il y a lieu d'affirmer que, sauf dans des cas singuliers, l'existence d'une solution particulière entraîne celle d'une double infinité de solutions.

D'une manière précise, *l'existence d'un arithmopoint sur la surface cubique ci-dessus envisagée entraîne celle d'une  $\infty^2$  de tels points sur cette surface qui est dès lors une arithmosurface cubique*. Il n'y a exception que lorsque l'arithmopoint imposé est un point singulier de la surface ou encore un point de contact d'un plan tangent de direction asymptotique.

Considérons, en effet, un arithmopoint  $M_1$  d'une surface cubique ( $S$ ) représentée par une équation du troisième degré en  $(x, y, z)$  dont tous les coefficients sont des nombres rationnels. Le plan tangent en  $M_1$  à cette surface cubique est un arithmoplan; la section de la surface par ce plan est généralement une cubique représentée dans son plan par une équation rationnelle et douée d'un point singulier de coordonnées rationnelles; cette cubique plane est donc une arithmocubique plane.

L'existence de l'arithmopoint  $M_1$  entraîne donc celle d'une  $\infty^1$  d'arithmopoints sur la surface. Considérons l'un de ceux-ci : soit  $M_2$ . A ce second arithmopoint est associée une seconde arithmocubique plane, trace de la surface sur l'arithmoplan tangent en  $M_1$ .

Il y a dès lors deux arithmocourbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  non coplanes sur la surface ( $S$ ); soient  $m_1$  l'arithmopoint courant de  $(C_1)$  et  $m_2$  l'arithmopoint courant de  $(C_2)$ ; soient  $t_1$  et  $t_2$  les paramètres rationnels qui repèrent respectivement ces arithmopoints sur les deux arithmocubiques  $(C_1)$  et  $(C_2)$ . Les droites  $m_1 m_2$  sont des arithmodroites appartenant à une congruence rectiligne; chacune d'elles perce à nouveau la surface en un troisième point  $m_3$  qui est nécessairement un arithmopoint et dont les coordonnées sont des fonctions rationnelles des deux paramètres rationnels  $t_1 t_2$ . La surface cubique ( $S$ ) est ainsi représentée rationnellement en fonction

de deux paramètres rationnels  $t_1$  et  $t_2$ : elle est donc une arithmosurface cubique.

**37. — REPRÉSENTATION D'UN NOMBRE RATIONNEL AU MOYEN D'UNE FORME CUBIQUE A TROIS VARIABLES.** Il s'agit de déterminer une forme  $f(x, y, z \dots)$  susceptible de représenter tout nombre rationnel algébrique, les coefficients de cette forme étant de cette nature et les variables  $x, y, z \dots$  ne pouvant prendre des valeurs irrationnelles. Cette forme sera assujettie aux conditions d'être symétrique par rapport aux variables  $x, y, z \dots$  et d'être invariante par multiplication ou par division.

La forme  $x^2 + y^2$  est inacceptable, malgré sa symétrie et son invariance par multiplication ou par division; elle ne saurait, en effet, représenter les nombres 3, 7 d'une manière générale,  $4N - 1$  ( $N$  étant un entier), l'égalité

$$x^2 + y^2 = (4N - 1)z^2$$

étant impossible en nombres entiers. Il en est de même de la forme quadratique ternaire  $x^2 + y^2 + z^2$  pour la double raison qu'elle n'est pas invariante par multiplication et qu'elle ne saurait représenter les nombres entiers  $8N - 1$  (7 par exemple).

Du point de vue du degré de la forme représentative, la plus simple des formes susceptibles de représenter tout nombre rationnel positif est donc la forme quadratique quaternaire  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ . Cette représentation n'est autre que celle qui résulte du théorème de BACHET, généralisé conformément aux considérations des §§ 14 et 26 dans le domaine des nombres rationnels.

Si, d'autre part, on se propose de rechercher celle des formes représentatives de tout nombre rationnel qui dépend du nombre le plus simple de variables, on trouve que cette forme n'est autre que la forme cubique ternaire

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz .$$

Il y a lieu de rappeler tout d'abord à son sujet la propriété d'invariance suivante établie par J. PETERSEN (*Tidsskrift,*

1872, p. 57). La forme précédente est invariante par multiplication. Il suffit, en effet, d'observer que l'identité

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X \\ Z & X & Y \end{vmatrix}$$

dans laquelle  $X, Y, Z$  désignent respectivement les expressions

$$X = ax + by + cz, \quad Y = bx + cy + az, \quad Z = cx + ay + bz,$$

peut être mise sous la forme équivalente

$$(3xyz - x^3 - y^3 - z^3)(3abc - a^3 - b^3 - c^3) = 3XYZ - X^3 - Y^3 - Z^3,$$

puisque l'expression développée du déterminant

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

n'est précisément autre que la forme  $3xyz - x^3 - y^3 - z^3$ .

L'invariance de la même forme relativement à la division s'établit aisément. On observera, à cet effet, que le nombre  $D(X, Y, Z)$  et le nombre  $d(a, b, c)$  étant supposés connus, leur quotient  $q = \frac{D}{d}$  sera défini par les trois variables  $(x, y, z)$ ; celles-ci sont solutions de trois équations linéaires précédemment écrites; l'expression de  $x$  est ainsi

$$(3abc - a^3 - b^3 - c^3)x = \begin{vmatrix} X & b & c \\ Y & c & a \\ Z & a & b \end{vmatrix};$$

$y$  et  $z$  s'obtiennent par permutations de lettres.

La proposition fondamentale d'après laquelle *tout nombre rationnel est susceptible d'être représenté d'une infinité de manières par la forme*

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

résulte simplement des propriétés arithmogéométriques de

l'arithmosurface cubique de révolution représentée par l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = n .$$

Cette surface contient une infinité d'arithmocercles parallèles ; elle peut être représentée par les équations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{n}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \lambda\mu - \mu\nu - \nu\lambda} + \frac{\mu - \nu}{3} , \\ y = \frac{n}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \lambda\mu - \mu\nu - \nu\lambda} + \frac{\nu - \lambda}{3} , \\ z = \frac{n}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \lambda\mu - \mu\nu - \nu\lambda} + \frac{\lambda - \mu}{3} . \end{array} \right.$$

contenant en apparence trois paramètres arbitraires ; mais, en réalité, ces formules ne dépendent que de deux paramètres, qui sont les différences mutuelles des précédentes. En donnant à ces paramètres  $\lambda, \mu, \nu$  des valeurs rationnelles arbitraires, ces formules fournissent les coordonnées d'un arithmopoint de la surface considérée.

Réciproquement, tout arithmopoint de cette surface cubique peut être obtenu de la manière précédente ;  $n, x, y$  et  $z$  étant imposés, les différences mutuelles de  $\lambda, \mu, \nu$  sont parfaitement déterminées par les formules suivantes

$$\mu - \nu = 2x - y - z ,$$

$$\nu - \lambda = 2y - z - x ,$$

$$\lambda - \mu = 2z - x - y ;$$

il en résulte qu'il suffit de prendre :

$$\lambda = z - y , \quad \mu = x - z , \quad \nu = y - x .$$

Ainsi donc, la surface représentée par l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = n ,$$

dans laquelle  $n$  est un nombre rationnel absolument quelconque, est une arithmosurface cubique de révolution, dont une représentation paramétrique propre est celle qui vient d'être indiquée ci-dessus. C'est en ce sens qu'il convient d'énoncer la propriété de tout nombre rationnel  $n$  d'être

d'une  $\infty^2$  de manières susceptible d'être représenté par la forme cubique ternaire

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = n .$$

Parmi ces diverses représentations, en nombre doublement infini, d'un même nombre rationnel  $n$ , il y a lieu de signaler tout spécialement la suivante, en raison de sa grande simplicité

$$x = n \quad y = n + \frac{1}{3} \quad z = n - \frac{1}{3} .$$

Dans le cas où l'on devra décomposer un nombre entier, multiple de trois plus un, il y aura lieu de poser

$$x = y = \frac{n-1}{3} \quad z = \frac{n+2}{3} ;$$

de sorte que *tout multiple de trois plus un est décomposable en nombres entiers*<sup>1</sup>.

La forme précédemment envisagée rentre dans la forme plus générale

$$n = Ax^3 + By^3 + Cz^3 - 3Dxyz ,$$

à quatre coefficients algébriques, rationnels mais quelconques qui fut envisagée par Ed. LUCAS. Dans le cas le plus général, la décomposition n'est pas toujours possible quel que soit le nombre  $n$ . Mais dès qu'un nombre  $n$  est décomposable d'une manière, la décomposition est possible d'une  $\infty^2$  de manières, en vertu du théorème général sur les décompositions cubiques (exception faite pour le cas d'un point singulier). Parmi les diverses formes qui rentrent dans cette catégorie, il y a spécialement lieu d'étudier celle qui correspond aux valeurs suivantes des coefficients :

$$A = B = C = 1 , \quad D = 0 .$$

<sup>1</sup> On peut, à ce sujet, affirmer que les multiples de 3 qui ne sont pas multiples de 9 ne sont pas susceptibles d'être décomposés en nombres entiers. C'est ainsi que le nombre 3 ne peut être décomposé qu'au moyen de nombres rationnels.

Voir CARMICHAEL, *Bull. of the American mathematical Society*, XXII, décembre 1915, p. 111-117.

**38.** — DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE RATIONNEL EN UNE SOMME DE TROIS CUBES. La forme dont il s'agit est

$$n = x^3 + y^3 + z^3 .$$

La décomposition n'est pas toujours possible : c'est ainsi qu'en vertu du théorème de Fermat le nombre  $n = 0$  ne pourra être mis sous la forme d'une somme de trois cubes de nombres rationnels différents de zéro. La surface cubique est alors un cône cubique d'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

qui n'admet qu'un seul arithmopoint ( $x = 0, y = 0, z = 0$ ).

Par des considérations diverses, j'ai pu de même établir l'impossibilité en nombres algébriques entiers simples de l'équation

$$X^3 + Y^3 + Z^3 = nT^3 ,$$

lorsque  $n$  est un entier multiple de 9 plus 4 ou plus 5. En d'autres termes, les nombres 4, 5 et, plus généralement, tout multiple entier de 9 augmenté soit de 4 soit de 5, ne semblent point susceptibles d'être rationnellement décomposable en une somme de trois cubes.

Cela étant, supposons que ( $a, b, c$ ) soit une des décompositions du nombre donné  $n$ . La cubique plane, intersection de la surface d'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3 + b^3 + c^3$$

et du plan tangent en l'arithmopoint ( $a, b, c$ ), peut être représentée par les équations

$$x = a + \lambda \cdot \frac{\beta - \gamma}{a^2} ,$$

$$y = b + \lambda \cdot \frac{\gamma - \alpha}{b^2} ,$$

$$z = c + \lambda \cdot \frac{\alpha - \beta}{c^2} ;$$

$\alpha, \beta, \gamma$  sont trois paramètres rationnels, algébriques et arbi-

traires ;  $\lambda$  représente l'expression

$$\lambda = - \frac{\frac{(\beta - \gamma)^2}{a^3} + \frac{(\gamma - \alpha)^2}{b^3} + \frac{(\alpha - \beta)^2}{c^3}}{\frac{(\beta - \gamma)^3}{a^6} + \frac{(\gamma - \alpha)^3}{b^6} + \frac{(\alpha - \beta)^3}{c^6}};$$

en réalité il n'y a qu'un seul paramètre indépendant : l'un des rapports anharmoniques des nombres  $(0, \alpha, \beta, \gamma)$ .

Ces formules représentent une  $\infty^1$  d'arithmopoints. Il est théoriquement possible d'en déduire l'expression générale des solutions de l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3 + b^3 + c^3 ;$$

mais ces formules générales sont très compliquées.

Bien entendu, ces formules deviennent illusoires lorsque l'un au moins des nombres  $a, b, c$  est nul. Mais, alors, il est aisément d'obtenir par la méthode arithmogéométrique de nouveaux arithmopoints situés en dehors des plans ou des axes coordonnés.

Je terminerai en mentionnant d'une manière toute spéciale l'équation remarquable

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1 ;$$

en plus des solutions banales qui correspondent aux arithmopoints situés sur les côtés de l'arithmotriangle

$$\begin{aligned} x &= 1, & y + z &= 0, \\ y &= 1, & z + x &= 0, \\ z &= 1, & x + y &= 0, \end{aligned}$$

il y a lieu de signaler les solutions qui résultent des égalités bien connues

$$\begin{aligned} 3^3 + 4^3 + 5^3 &= 6^3, \\ 1^3 + 6^3 + 8^3 &= 9^3. \end{aligned}$$

Sur cette arithmosurface d'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1,$$

se trouve d'ailleurs une arithmoquadrique gauche représentée paramétriquement par les équations :

$$x = 9t^4, \quad y = 1 + 9t^3, \quad z = -3t(1 + 3t^3)$$

et qui est tracée sur un paraboloïde hyperbolique d'équation

$$y(z + x) + 2x - z = 0.$$

Il suffit de considérer les cordes de cette arithmoquadrique définies par deux arithmopoints de paramètres respectifs  $t_1$  et  $t_2$  pour avoir une représentation rationnelle en fonction de deux paramètres  $t_1$  et  $t_2$  de cette surface.

### Les arithmopoints des cubiques.

39. — ARITHMOCUBIQUE GAUCHE. La théorie arithmogéométrique des cubiques gauches est absolument identique à celle des coniques dans le plan. Une cubique gauche représentée par des équations à coefficients rationnels n'est pas généralement une arithmocourbe. Mais dès qu'elle possède un arithmopoint particulier, elle est une arithmocubique gauche. L'arithmopoint courant est alors l'intersection de l'arithmocubique avec un arithmoplan (dépendant d'un paramètre rationnel arbitraire) pivotant autour de la tangente à cette courbe en l'arithmopoint connu *a priori*.

Il peut arriver d'ailleurs, à l'occasion de l'étude de cas particuliers, qu'il soit inutile d'avoir recours à la considération de l'arithmoplan général passant par cette tangente particulière. C'est, par exemple, ce qui se produit pour le système suivant de deux équations à trois inconnues :

$$ax + a' = y^2,$$

$$bx + b' = z^2;$$

$a, a', b, b'$  sont quatre coefficients rationnels absolument quelconques. L'élimination de  $x$  entre ces deux équations donne une équation

$$by^2 - az^2 = ba' - ab'$$

du type de celle considérée par Brahmagupta et Fermat. Il

peut se faire que cette dernière n'admette pas de solution : c'est ce qui se produit, par exemple, pour le système :

$$2x + 3 = y^2 ,$$

$$3x + 5 = z^2 ,$$

considéré par FERMAT comme n'admettant pas de solution en nombres entiers ; l'équation obtenue par l'élimination de  $x$  est alors

$$2z^2 - 3y^2 = 1 ;$$

si cette dernière équation avait des solutions rationnelles, l'équation

$$2z^2 - 3y^2 = t^2$$

à trois inconnues ( $y$ ,  $z$ ,  $t$ ) aurait des solutions entières ;  $t$  et  $z$  seraient nécessairement premiers avec 3 ; en posant donc

$$z = 3Z + \varepsilon_1 \quad t = 3T + \varepsilon_2 \quad (\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1)$$

on aurait la relation impossible suivante :

$$1 = 3(Y^2 + 3T^2 - 6z^2 - 4\varepsilon_1 z + 2\varepsilon_2 T) .$$

Mais lorsque le système considéré admet une solution particulière, il est certain qu'il en admet une infinité, car l'équation  $by^2 - az^2 = ab' - ba'$  est alors attachée à une arithmoconique.

Soit  $(x_0, y_0, z_0)$  la solution imposée *a priori*. L'arithmoconique

$$by^2 - az^2 = by_0^2 - az_0^2$$

et l'arithmodroite  $z - z_0 = t(y - y_0)$  pivotant autour du point  $(y_0, z_0)$ , dans le plan  $Oyz$ , admettent pour intersection l'arithmopoint courant de l'arithmoconique, représenté par les coordonnées suivantes :

$$y = \frac{(at^2 + b)y_0 - 2atz_0}{at^2 - b} , \quad z = \frac{-(at^2 + b)z_0 + 2bt y_0}{at^2 - b} .$$

D'où se déduit l'expression de  $x$  en fonction de  $t$  :

$$x = x_0 + 4t \cdot \frac{t(by_0^2 + az_0^2) - (at^2 + b)y_0 z_0}{(at^2 - b)^2} .$$

Il résulte des considérations qui précèdent que le système considéré est généralement impossible. Lorsqu'il admet une solution, il en admet une infinité dépendant d'un paramètre ; toute solution rationnelle du système appartient à cet ensemble de solutions. La courbe représentative est alors une arithmocubique gauche.

**40. — CUBIQUE PLANE.** L'étude arithmogéométrique d'une cubique plane unicursale n'offre aucune difficulté. L'équation de cette courbe étant rationnelle, les coordonnées du point singulier dont l'existence a pour effet d'annuler le genre de la courbe sont nécessairement rationnelles, si la courbe n'est pas décomposable en une conique et une droite. Cette cubique plane unicursale et non décomposable est donc nécessairement une arithmocubique, susceptible d'être représentée par des équations paramétriques rationnelles.

Je supposerai donc que les cubiques qui seront étudiées dorénavant sont essentiellement des courbes unicursales. Dans aucun cas une telle courbe ne saurait être désignée sous le nom d'arithmocubique ; mais elle peut néanmoins posséder une infinité d'arithmopoints. Si, en effet, une cubique plane, représentée en coordonnées cartésiennes par une équation rationnelle, possède un arithmopoint particulier, il est généralement possible de déduire de la connaissance de celui-ci un nouvel arithmopoint ; il suffit, à cet effet, d'observer que la tangente à la cubique en l'arithmopoint connu *a priori* rencontre à nouveau la courbe en un second arithmopoint. De ce second point peut se déduire, par application du même procédé, un troisième arithmopoint. De sorte que, dans le cas général, l'existence d'un arithmopoint particulier sur une cubique plane d'équation rationnelle entraîne celle d'une suite d'arithmopoints en nombre infini.

Il n'y a exception que dans les deux cas suivants :

1° Lorsque l'arithmopoint connu de la cubique est un point d'inflexion, il est impossible de déduire de cet arithmopoint inflexional un autre arithmopoint par la méthode qui précède. C'est, par exemple, le cas de la cubique représentée par l'équation

$$x^3 + y^3 = 1$$

qui admet trois arithmopoints particuliers alignés et qui ne sont autres que les trois points d'inflexion réels de la courbe : les deux points sur les axes ( $x = 0, y = 1$ ) et ( $x = 1, y = 0$ ) et le point à l'infini dans la direction  $x + y = 0$ . La courbe n'admet d'ailleurs aucun autre arithmopoint : c'est en cette négation que consiste précisément le dernier théorème de Fermat, dans le cas des troisièmes puissances.

2<sup>o</sup> Lorsque l'arithmopoint connu conduit, après l'application plusieurs fois répétée de la méthode tangentielle, à un arithmopoint d'inflexion. Dans ce cas le nombre d'arithmopoints de la cubique est limité. C'est le cas de la cubique représentée par l'équation  $x^3 + y^3 = 2$ ; elle admet évidemment l'arithmopoint  $x = 1, y = 1$  dont la tangente est parallèle à l'asymptote; l'arithmopoint ainsi obtenu à partir de (1, 1) n'est donc autre que le point d'inflexion situé à l'infini.

Il y a lieu maintenant d'exposer les calculs dans un certain nombre de cas remarquables, en faisant appel aux notions les plus élémentaires de géométrie analytique et en laissant notamment de côté toute considération de fonctions elliptiques.

**41.** — COURBES  $x^3 + y^3 = a$ . C'est à l'étude arithmogéométrique de ces courbes de Lamé particulières que se ramène l'étude des solutions entières de l'équation  $x^3 + y^3 = az^3$  dont l'impossibilité pour  $a = 1$  et  $a = 2$  a été affirmée par FERMAT et pour  $a = 3, 4, 5, 6, 8, 16$  par LEGENDRE. Toutefois, pour  $a = 6$ , l'équation est possible en vertu de l'égalité

$$\bar{17}^3 + \bar{37}^3 = 6 \cdot \bar{21}^3$$

découverte par PEPIN. Cette même équation  $x^3 + y^3 = az^3$  a été aussi considérée par Ed. LUCAS.

La courbe d'équation  $x^3 + y^3 = a$  admettant pour points d'inflexion réels les points ( $x = 0, y = \sqrt[3]{a}$ ), ( $x = \sqrt[3]{a}, y = 0$ ) et le point à l'infini, il n'y aura pas lieu de se préoccuper de ces points d'inflexion; les deux premiers ne sont, en effet, des arithmopoints que lorsque  $a$  est un cube parfait. D'après le théorème de Fermat, la cubique n'admet alors aucun autre arithmopoint. Il résulte donc des considé-

rations qui précèdent que si l'équation  $x^3 + y^3 = a$  admet une solution particulière, elle admet une infinité de solutions.

Soit  $(x_0, y_0)$  la solution connue. La tangente à la courbe  $x^3 + y^3 = x_0^3 + y_0^3$  en l'arithmopoint  $(x_0, y_0)$  a pour équations paramétriques

$$x = x_0 + uy_0^2,$$

$$y = y_0 - ux_0^2;$$

le paramètre  $u$  du point où cette tangente rencontre à nouveau la cubique est ainsi la solution différente de zéro de l'équation

$$(x_0 + uy_0^2)^3 + (y_0 - ux_0^2)^3 = x_0^3 + y_0^3$$

c'est-à-dire :

$$u = \frac{3x_0y_0}{x_0^3 - y_0^3};$$

les coordonnées du point *tangentiel* du point  $(x_0, y_0)$  sont ainsi :

$$x_1 = x_0 \cdot \frac{a + y_0^3}{x_0^3 - y_0^3} \quad y_1 = y_0 \cdot \frac{a + x_0^3}{y_0^3 - x_0^3}.$$

**42. — CUBIQUES**  $y^2 = x^3 + a$ . La tangente au point  $(x_0, y_0)$  peut être représentée par les équations paramétriques

$$x = x_0 + 2y_0 u \quad y = y_0 + 3x_0^2 u$$

le paramètre  $u$  du point tangentiel de  $(x_0, y_0)$  est

$$u = 3x_0 \cdot \frac{3x_0^3 - 4y_0^2}{8y_0^3};$$

les coordonnées de ce point tangentiel sont donc :

$$x_1 = x_0 \cdot \frac{x_0^3 - 8a}{4(x_0^3 + a)}, \quad y_1 = -\frac{y_0^4 + 18ay_0^2 - 27a^2}{8y_0^3}.$$

Dans le cas où  $a$  est le nombre — 4, FERMAT a énoncé, sans démonstration, que l'équation correspondante

$$y^2 = x^3 - 4$$

admet deux solutions et deux seulement,  $(x_0 = 2, y_0 = 2)$  et  $(x_1 = 5, y_1 = 11)$ , en nombres entiers. On observera que la solution  $(x_1, y_1)$  n'est autre que celle qui se déduit de  $(x_0, y_0)$  par application des formules ci-dessus données. Cette équation a une infinité de solutions rationnelles.

Il en est de même de l'équation  $y^2 = x^3 - 2$  (Fermat, Legendre) qui admet la solution  $(x = 3, y = 5)$  et, par suite, une infinité de solutions rationnelles.

L'équation

$$y^2 = x^3 + 17$$

étudiée par E. CESARO possède les systèmes suivants de solutions :

$$\begin{cases} x = -2, -1, 2, 4, 8, 43, 52 \\ y = 3, 4, 5, 9, 23, 282, 375 \end{cases}$$

qui se déduisent les unes des autres par la méthode du point tangentiel ou par alignements.

*(A suivre.)*