Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1916)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DEUX CONFÉRENCES SUR LA NOMOGRAPHIE
Autor: d'Ocagne, Maurice
Kapitel: I. _ PRINCIPES DE NOMOGRAPHIE
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16886

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

DEUX CONFÉRENCES SUR LA NOMOGRAPHIE

données les 28 et 29 juillet 1914 à l'Université d'Edimbourg[1]

PAR

Maurice d'OCAGNE, Prof. à l'Ecole Polytechnique de Paris.

I. — PRINCIPES DE NOMOGRAPHIE

Définitions et résumé des principes relatifs aux représentations nomographiques fondées sur l'entre-croisement.

1. — En vue d'une plus grande commodité nous allons d'abord rappeler quelques définitions et conventions usitées dans nos précédentes publications[2].

Les variables entrant dans les équations sont représentées par la lettre z avec des indices correspondants, et toute fonction d'un certain nombre de ces variables par une seule lettre affectée des indices de toutes ces variables. Ainsi f_1 représentera une fonction de la seule variable z_1, f_{12} une fonction de z_1 et z_2, et si, par exemple, il est dit que l'équation $F_{1234} = 0$ peut prendre la forme $G_{12} = H_{34}$, cela signifiera que cette équation entre quatre variables est telle que deux des variables peuvent être groupées dans un des membres, les deux autres dans l'autre.

Au point de vue de la représentation nomographique, toute quantité variable entrant dans une équation est regardée comme un paramètre au moyen duquel est défini un certain système ∞^1 (c'est-à-dire simplement infini) d'élé-

---

[1] Au cours du *Colloquium* tenu à l'occasion du tricentenaire de l'invention des logarithmes.

[2] Les plus importantes d'entre elles sont : *Traité de Nomographie* (Paris, Gauthier-Villars, 1899) et *Calcul graphique et Nomographie* (Paris, Doin, 1908, 2e édit., 1914), qui seront respectivement désignées par la suite au moyen des abréviations T. N. et C. G. N. Dans le cas de ce dernier ouvrage, les références sont faites à la seconde édition.

ments géométriques, points ou lignes, pris sur un plan. Nous supposons d'ailleurs qu'à chaque valeur du paramètre z_i correspond dans le système (z_i) un élément déterminé et que, pour définir graphiquement un tel système, nous avons tracé sur le plan un nombre fini des éléments en question en inscrivant à côté de chacun d'eux, en manière de graduation, la valeur correspondante du paramètre z_i[1]. En général, les valeurs de z_i choisies sont rondes et forment une progression arithmétique.

Une telle représentation graphique discontinue peut suffire à rendre sensible, à un certain degré d'approximation, la variation continue du paramètre correspondant de la même façon que les courbes de niveau d'une carte suffisent à définir l'étendue continue de la surface du sol. Dans la plupart des cas, la suite continue des éléments géométriques intermédiaires entre ceux qui sont effectivement marqués peut être définie graphiquement, s'il s'agit de points, par leur lieu géométrique, s'il s'agit de droites, par leur enveloppe.

Avec une précision qui dépend de la plus ou moins grande habitude qu'il en a, le calculateur peut se figurer mentalement, entre les éléments effectivement cotés, ceux qui correspondent aux valeurs intermédiaires du paramètre; cette opération est ce qu'on appelle une *interpolation à vue*.

Dans la majorité des cas de la pratique, les valeurs des variables qu'il y a lieu de considérer constituent elles-mêmes des suites discontinues dont les intervalles sont fixés par la nature du problème, et, en de tels cas, s'il n'est pas possible de tracer tous les éléments correspondants, l'interpolation à vue n'a à intervenir que pour un très petit nombre de valeurs dans chaque intervalle.

Notons enfin que l'interpolation à vue s'exerce avec une facilité et une précision incomparablement plus grandes dans le cas d'un système de points distribués sur une ligne que dans celui d'un système de courbes de nature géométrique plus ou moins simple, et même dans celui d'un sys-

[1] En pratique, on peut se dispenser d'inscrire les cotes de tous ces éléments. On peut se contenter de le faire pour celles qui limitent certains intervalles, comme de 5 en 5, ou de 10 en 10, ainsi que cela se pratique sur les graduations des instruments de mesure.

tème de droites. L'importance de cette observation apparaîtra par la suite.

2. — Si l'on associe arbitrairement à chacune des variables z_1, z_2, ..., z_n, qui entrent dans une équation donnée $F_{12\ldots n} = 0$, un système d'éléments géométriques, tel que ceux qui viennent d'être définis, il est clair que l'équation donnée établira une certaine relation de position entre ceux de ces éléments qui correspondent à un groupe de valeurs z_1, z_2, ..., z_n satisfaisant à l'équation. Si cette relation prend une forme géométrique telle que la connaissance des éléments correspondant à $n - 1$ des variables entraîne immédiatement celle de l'élément correspondant à la $n^{\text{ième}}$, nous avons alors, en fait, une *représentation nomographique* de l'équation donnée. Lorsque les valeurs de $n - 1$ des variables sont données, une telle représentation permettra de connaître celle de la $n^{\text{ième}}$ par une simple lecture, au besoin complétée par une interpolation à vue.

Le tableau graphique formé par les n systèmes d'éléments cotés (z_1), (z_2), ... (z_n), lorsqu'on sait quelle est la relation qui existe entre les éléments dont les cotes satisfont à l'équation donnée, constitue un *nomogramme* de cette équation.

Le premier objet de la Nomographie est de découvrir des catégories, aussi vastes que possible, d'équations pouvant être représentées par des nomogrammes d'une extrême simplicité en raison, à la fois, de la nature des éléments géométriques y intervenant et de la relation de position à constater entre ces éléments.

Les éléments géométriques les plus simples sont les points, et la relation de position la plus simple entre des points consiste en leur alignement : Donc, *a priori,* le type le plus simple de nomogramme pour trois variables sera fondé sur l'alignement de trois points appartenant chacun à une échelle graduée, ces échelles pouvant être d'ailleurs rectilignes ou curvilignes. Il apparaîtra par la suite que cette forme la plus simple de la représentation nomographique trouve en pratique un champ d'application extraordinairement vaste.

Mais avant d'aller plus loin, il convient d'examiner de plus près la nature des relations de position possibles dont l'im-

médiate constatation peut intervenir dans l'usage des nomogrammes.

Il suffit d'un peu de réflexion pour se convaincre que de telles relations de position peuvent seulement consister dans l'existence de contacts entre certains éléments géométriques, la notion de contact étant prise ici dans un sens très général comprenant, par exemple, le fait pour un point de se trouver sur une certaine ligne.

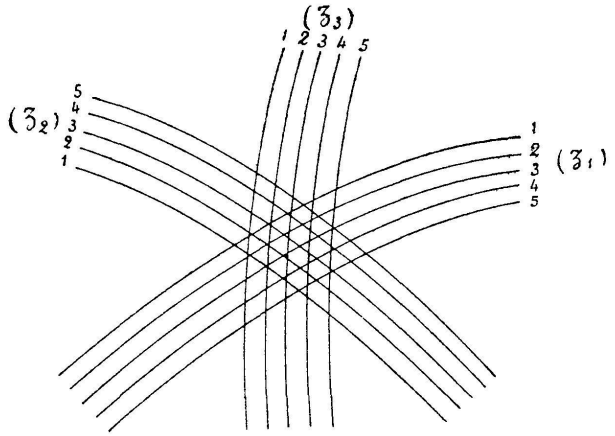

Fig. 1

3. — Dans le cas d'une équation à trois variables, l'idée qui se présente tout d'abord consiste à associer à chacune de ces variables un système de courbes, de telle sorte que *les trois courbes qui correspondent à des valeurs de* z_1, z_2, z_3 *satisfaisant simultanément à l'équation donnée* $F_{123} = 0$ *passent par un même point.* On a ainsi un exemple de *nomogramme à entre-croisement* (fig. 1). Dans ce cas on peut choisir arbitrairement deux des systèmes cotés, sous la réserve toutefois que le troisième, qui s'en déduit, soit aussi réel. Si, d'ailleurs, nous nous donnons les équations cartésiennes des deux premiers systèmes

$$\varphi_1(x, y, z_1) = 0, \qquad \varphi_2(x, y, z_2) = 0,$$

nous n'avons qu'à éliminer z_1 et z_2 entre ces équations et l'équation donnée pour obtenir l'équation du troisième système

$$\varphi_3(x, y, z_3) = 0.$$

D'après ce mode de formation, l'élimination de x et y entre les trois dernières doit reproduire l'équation donnée. Ainsi, *les courbes représentées par les trois dernières équations passent par un même point lorsque les valeurs correspon-*

dantes de z_1, z_2, z_3 *satisfont simultanément à l'équation donnée.*

A première vue, il semble que le plus simple soit de prendre

$$x = z_1 , \qquad y = z_2 ,$$

dans tous les cas. Cela donne immédiatement pour le troisième système l'équation

$$F(x, y, z_3) = 0$$

définissant les projections sur le plan des xy des lignes de niveau de la surface représentée par la dernière équation lorsqu'on y regarde les trois variables comme des coordonnées cartésiennes[1]. Mais, pour la construction pratique des nomogrammes, on doit s'attacher spécialement à n'avoir affaire qu'à des courbes d'un tracé facile, et même seulement à des droites et des cercles, lorsque la chose est possible. Or, il est évident qu'un choix judicieux peut, en certains cas, conduire à des équations $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ ne représentant que des droites ou des cercles, alors que l'équation $F(x, y, z_3) = 0$ représenterait des courbes plus compliquées qu'il ne serait possible de construire que point par point.

Le type le plus général d'équation représentable par trois systèmes de droites est évidemment de la forme[2]

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

pour lequel on prend comme équations des systèmes (z_1), (z_2), (z_3),

$$xf_1 + yg_1 + h_1 = 0 ,$$
$$xf_2 + yg_2 + h_2 = 0 ,$$
$$xf_3 + yg_3 + h_3 = 0 .$$

[1] L'apparence de damier (en grec ἄβαξ) du réseau des lignes $x = z_1$, $y = z_2$, a donné naissance au terme d'*abaque* qui a été étendu depuis lors (T. N.) à toute espèce de représentation nomographique. Il semble préférable, dans le cas général, d'employer le terme de *nomogramme* (C. G. N., p. 181).

[2] Au sujet du type le plus général d'équation représentable par trois systèmes de cercles, voir : T. N., p. 113 et C. G. N., p. 193.

La formation de ces équations porte le nom de *disjonction des variables*, et ces équations elles-mêmes sont appelées les *équations de disjonction*.

Il est digne de remarque que la grande majorité des équations rencontrées dans la pratique rentre dans le type précédent, et même, en général, dans le type plus particulier donné par

$$f_1 g_3 + f_2 h_3 + f_3 = 0 \ . \tag{2}$$

ou, sous forme de déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -f_1 \\ 0 & 1 & -f_2 \\ g_3 & h_3 & f_3 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Un très grand nombre sont réductibles à la forme plus simple

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0 \ , \tag{3}$$

notamment celles du type

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 = 1$$

qui peuvent s'écrire

$$\log \varphi_1 + \log \varphi_2 + \log \varphi_3 = 0 \ .$$

Cette dernière transformation, envisagée pour la première fois par Lalanne en 1842, a reçu de lui le nom d'*anamorphose logarithmique*[1].

Historiquement, elle offre le très haut intérêt d'avoir fourni le premier exemple d'une représentation nomographique distincte de la pure représentation cartésienne définie par $x = z_1$, $y = z_2$.

4. — La question qui s'offre maintenant est de discerner s'il est possible d'obtenir la représentation d'équations à plus de trois variables au moyen du simple entre-croisement de courbes fixes tracées sur un plan. La réponse est qu'une telle représentation est inapplicable à une équation à plus de trois variables à moins qu'il ne soit possible, grâce à l'introduction de variables auxiliaires, de remplacer cette équation par une suite d'équations ne contenant pas chacune

[1] T. N., p. 61 et C. G. N., p. 189.

plus de trois variables. La représentation revient alors en réalité à un enchaînement de nomogrammes à entre-croisement [1].

Sans pénétrer dans le détail du sujet, nous pouvons rendre ces idées plus claires en examinant les cas les plus simples : ceux de quatre, cinq et six variables.

Supposons qu'une équation à quatre variables

$$F_{1234} = 0$$

puisse être regardée comme le résultat de l'élimination de la variable auxiliaire t entre les deux équations

$$f_{12}(z_1, z_2, t) = 0,$$
$$g_{34}(z_3, z_4, t) = 0,$$

ce qui revient à dire qu'elle peut revêtir la forme $\varphi_{12} = \psi_{34}$, comme on le voit en égalant les valeurs de t tirées des deux dernières équations.

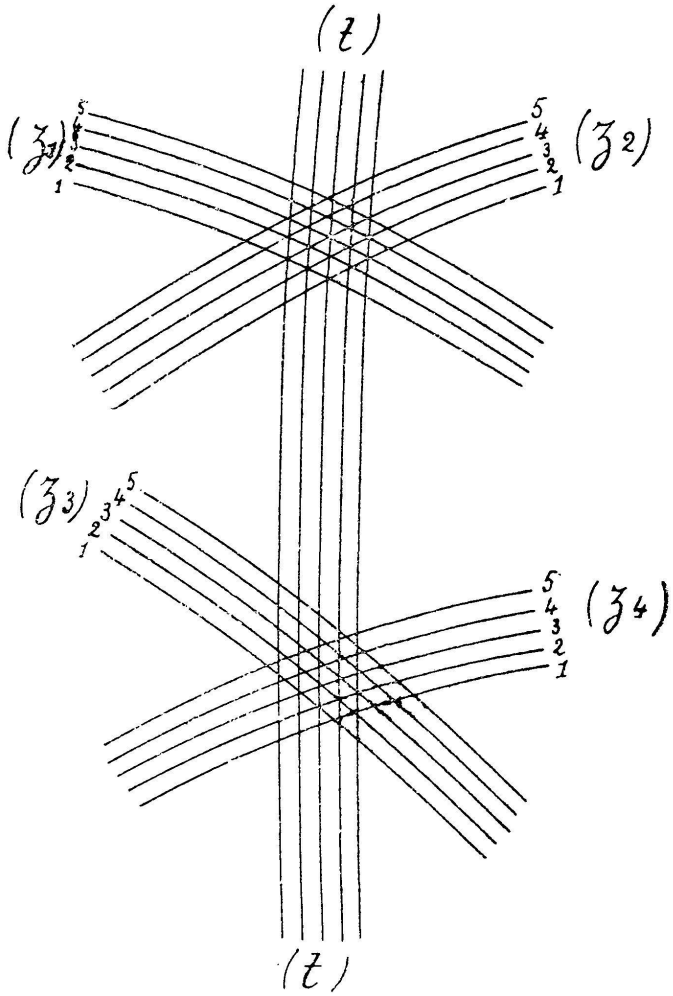

Fig. 2

Nous pouvons représenter chacune de ces équations par un nomogramme à entre-croisement et, puisque (n° 3) nous avons le libre choix de deux des systèmes cotés qui entrent dans chacun de ces nomogrammes, nous pouvons faire en sorte que le système (t) soit le même sur chacun d'eux et tracer les deux nomogrammes sur une même figure. Le système (t)

[1] Voir C. G. N., p. 206, ou le travail de l'auteur intitulé *Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie* (*Journal de l'Ecole Polytechnique*, 2e série, 8e cahier, 1903, p. 97 et 119), et encore une note qu'il a publiée dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (T. 148, 1909, p. 1244).

commun dont il n'est pas besoin d'inscrire les cotes constitue une sorte de pont pour le passage d'un nomogramme à l'autre.

Par exemple, dans le cas de la fig. 2, supposons que l'on donne $z_1 = 2$, $z_2 = 3$, $z_3 = 1$ et que l'on cherche z_4. Si l'on suit la courbe (t) qui passe par le point de rencontre des courbes $z_1 = 2$, $z_2 = 3$, jusqu'en son point d'intersection avec la courbe $z_3 = 1$, on voit que la courbe (z_4) passant par ce point a pour cote le nombre 3. La valeur cherchée est dès lors $z_4 = 3$.

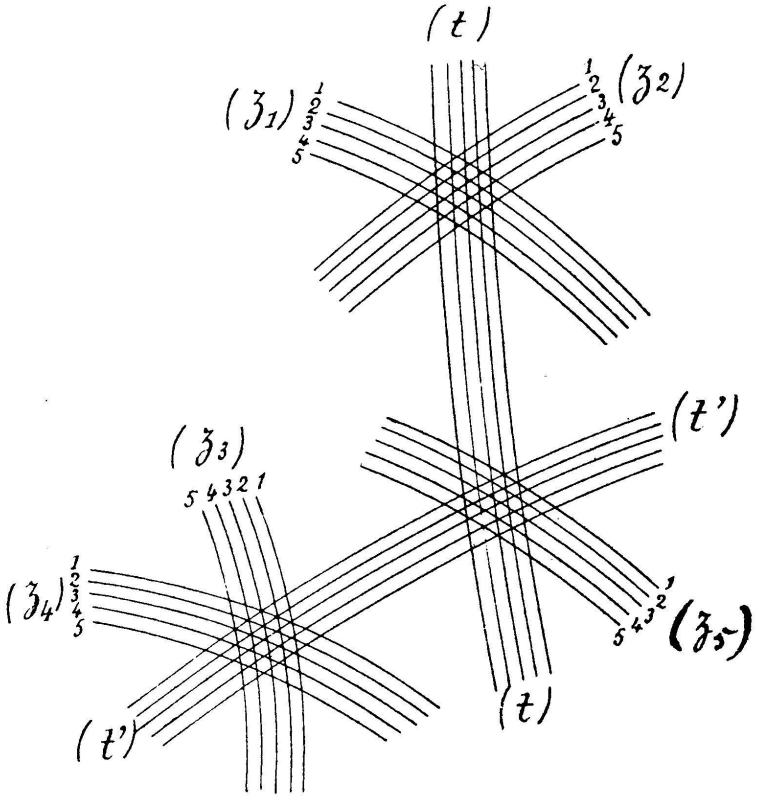

Fig. 3

Il est évident de même que la fig. 3 montre une représentation de l'équation

$$F_{12345} = 0$$

s'il est possible de la regarder comme le résultat de l'élimination de t et t' entre les équations

$$f_{12}(z_1, z_2, t) = 0,$$
$$g_{34}(z_3, z_4, t') = 0,$$
$$h_5(z_5, t, t') = 0,$$

et aussi que la fig. 4 montre une représentation de l'équation

$$F_{123456} = 0$$

si celle-ci peut être regardée comme le résultat de l'élimination de t, t' et t'' entre les équations

$$f_{12}(z_1, z_2, t) = 0 ,$$
$$g_{34}(z_3, z_4, t') = 0 ,$$
$$h_{56}(z_5, z_6, t'') = 0 ,$$
$$\varphi(t, t', t'') = 0 .$$

La généralisation est évidente et peut s'énoncer comme suit : *les seules équations à plus de trois variables susceptibles*

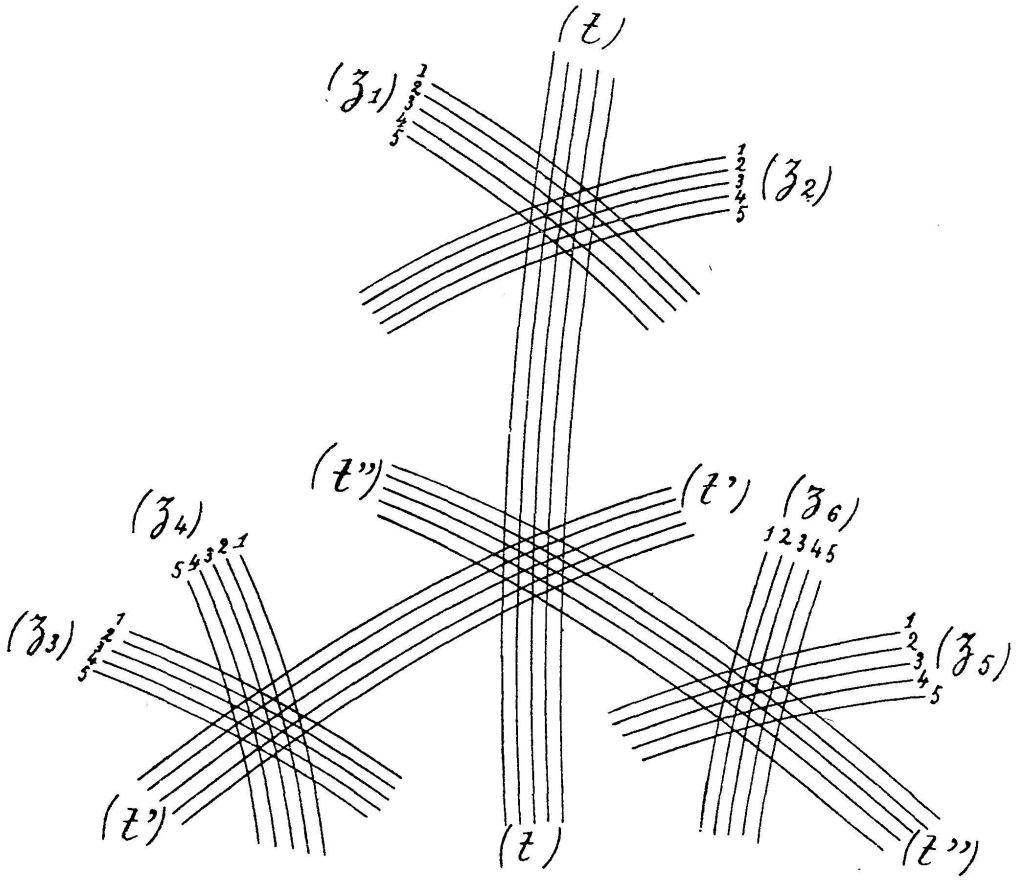

Fig. 4

d'être représentées au moyen de nomogrammes à entre-croisements fixes sont celles qui peuvent être déduites d'une équa-

tion à trois variables par une série de substitutions remplaçant une variable par une fonction de deux autres variables.

Des équations de ce type se rencontrent fréquemment en pratique, mais il s'en trouve aussi d'autres. Il apparaît donc qu'en vue d'obtenir des modes plus généraux de représentation nomographique on devra nécessairement recourir à des éléments mobiles les uns par rapport aux autres [1].

Le déplacement d'un plan mobile sur un plan fixe comportant trois degrés de liberté, on reconnaît immédiatement la possibilité de créer des systèmes ∞^1, ∞^2, ∞^3 par le déplacement d'un seul élément mobile, et des systèmes ∞^2, ∞^3, ∞^4 par le déplacement d'un système ∞^1 mobile. Nous n'insisterons pas ici sur ce point que nous avons développé ailleurs [2] et nous bornerons à faire remarquer que, par les simples déplacements d'une droite on peut engendrer les systèmes ∞^2 de droites les plus généraux.

Un tel système est, en fait, défini par une équation de la forme

$$xf_{12} + yg_{12} + h_{12} = 0 \ .$$

Si, dans cette équation, on fixe l'un des paramètres, soit z_1, et que l'on fasse varier l'autre z_2, toutes les positions correspondantes de la droite sont tangentes à une courbe dont l'équation s'obtient par l'élimination de z_2 entre l'équation ci-dessus et sa dérivée prise par rapport à z_2. Les courbes ainsi obtenues pour diverses valeurs de z_1 peuvent être cotées au moyen de ces valeurs. De même pour z_2. Ce double système des enveloppes (z_1) et (z_2) suffit à déterminer toutes

---

[1] Une remarque est ici nécessaire. En vue d'une plus grande commodité, on peut rendre mobiles certains éléments d'un nomogramme à entre-croisement sans qu'il en résulte un plus haut degré de généralité nomographique. Si, par exemple, toutes les courbes d'un système ∞^1 intervenant sur un nomogramme sont géométriquement identiques, ce système peut être engendré au moyen des déplacements d'une seule courbe tracée, au besoin, sur un transparent, et qui, en variant de position, peut venir successivement coïncider avec toutes les courbes du système en question. Tel est notamment le cas pour les systèmes de droites parallèles se rencontrant dans les abaques hexagonaux de M. Lallemand (T. N., p. 70 et C. G. N., p. 216). Pour que l'introduction d'éléments mobiles puisse conférer effectivement à un nomogramme un plus haut degré de généralité, il est nécessaire que le système ainsi engendré soit géométriquement de la classe ∞^2 ou ∞^3.

[2] Sur la théorie générale des nomogrammes à éléments mobiles, voir T. N., p. 390 et C. G. N., p. 368. L'auteur a pu établir en ces endroits une classification rationnelle des différents types de nomogramme, morphologiquement distincts, qui peuvent être regardés comme *canoniques*.

les positions de la droite correspondant aux divers couples de valeurs de z_1 et z_2, *la droite* (z_1, z_2) *étant une tangente commune aux courbes portant les cotes correspondantes dans les systèmes* (z_1) *et* (z_2). Le cas le plus simple est celui où les enveloppes (z_1) et (z_2) se réduisent à des points.

Nous allons retrouver ces systèmes de droites par une autre voie.

Représentations nomographiques fondées sur l'alignement.

5. — Nous avons vu que la grande majorité des équations qui se rencontrent dans les problèmes de la pratique rentrent dans le type (1) du n° 3 et même, en général, dans le type (2). Cela suggère immédiatement la possibilité de recourir à de simples points cotés pour la représentation de ces équations. En plus de la grande simplicité de sa construction, un tel système a l'avantage de se prêter à une lecture plus précise lorsqu'il est nécessaire de recourir à une interpolation à vue, ainsi que la remarque en a été faite à la fin du n° 1.

Nous pouvons, en effet, appliquer le principe de dualité et obtenir des nomogrammes dont les éléments sont des points tels que les cotes de trois d'entre eux situés sur une même droite[1] satisfassent simultanément à l'équation donnée, au lieu des nomogrammes dont les éléments sont des droites telles que les cotes de trois d'entre elles passant par un même point satisfassent à cette équation.

Cette application du principe de dualité peut revêtir une forme plus précise. Il suffit de regarder les coordonnées qui figurent dans les équations des systèmes de droites du nomogramme primitif comme des coordonnées tangentielles et, plus particulièrement, comme des *coordonnées parallèles*[2] ainsi définies :

---

[1] En pratique les alignements peuvent être pris soit au moyen d'un trait rectiligne tracé sur un transparent ou — ce qui est peut-être plus commode — au moyen d'un fil fin tendu.

[2] Une étude systématique de ce système spécial de coordonnées se trouve dans un mémoire publié en 1884 par l'auteur dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* et tiré ensuite à part en une brochure intitulée *Coordonnées parallèles et axiales* (Paris, Gauthier-Villars, 1885). Cette recherche avait été entreprise en vue de l'usage qui pouvait être fait de ces coordonnées dans la construction des nouveaux nomogrammes dont le principe avait été indiqué pour la première fois par l'auteur dans un mémoire intitulé *Procédé nouveau de calcul graphique* publié en 1884 dans les *Annales des Ponts et Chaussées*.

Si Au *et* Bv *(fig. 5) sont deux axes parallèles, pourvus de sens positif et négatif, les segments* AM = u *et* BN = v, *pris avec leur signe, sont les coordonnées de la droite* MN.

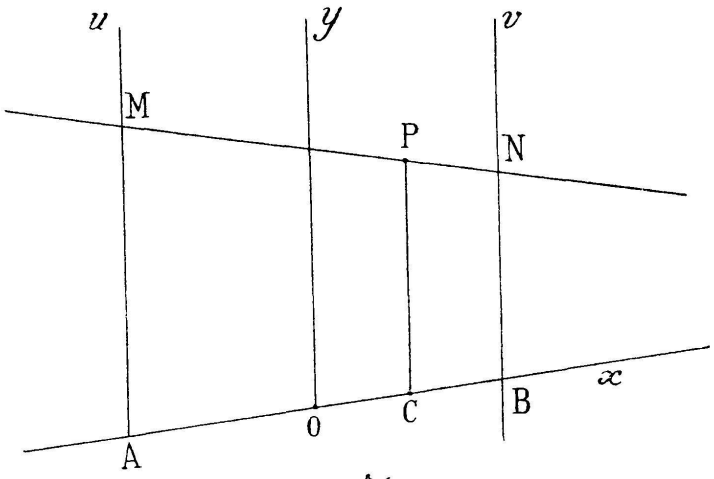

Fig. 5

Avec ces coordonnées tangentielles, comme avec les coordonnées plückériennes, le point est représenté par une équation du premier degré. Au point de vue graphique ces nouvelles coordonnées offrent l'avantage de représenter directement des longueurs de segments de droite, au lieu des inverses de tels segments.

La relation entre les coordonnées parallèles et les coordonnées cartésiennes est renfermée dans les formules suivantes qu'il est bien facile de démontrer. Prenant comme origine des coordonnées cartésiennes le milieu O du segment AB de la droite joignant les origines des axes parallèles Au et Bv, puis comme axe Ox la droite AB, avec sens positif de O vers B, et comme axe Oy la parallèle à Au et Bv avec le même sens positif que ces axes, on trouve que le point dont l'équation, en coordonnées parallèles, est

$$au + bv + c = 0 ,$$

a pour coordonnées cartésiennes

$$x = \delta \frac{b - a}{a + b} , \qquad y = \frac{-c}{a + b} , \tag{4}$$

δ étant la longueur du segment OB.

Si donc l'équation $F_{123} = 0$ peut être mise sous la forme[1]

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

[1] Le théorème permettant de reconnaître *a priori* si une équation donnée peut prendre

on peut la représenter au moyen de l'alignement des points pris dans les trois systèmes que définissent les équations

$$uf_1 + vg_1 + h_1 = 0 \ ,$$

$$uf_2 + vg_2 + h_2 = 0 \ ,$$

$$uf_3 + vg_3 + h_3 = 0 \ .$$

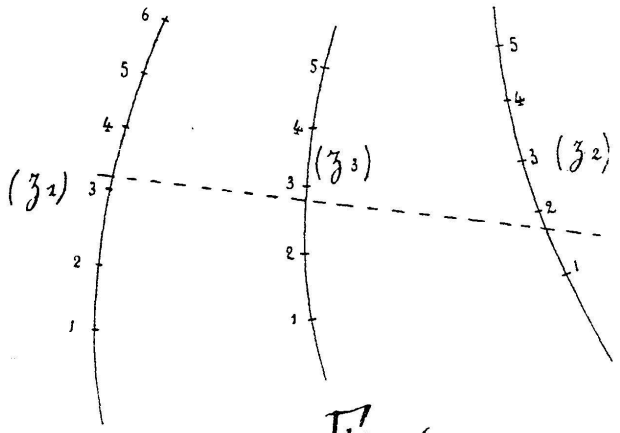

Fig. 6

Ces points peuvent être construits directement d'après leurs équations[1] ou au moyen de leurs coordonnées cartésiennes données par les formules (4). Le type de nomogramme à alignement ainsi obtenu est celui que représente la fig. 6.

En pratique, le cas de beaucoup le plus fréquent est celui d'une équation rentrant dans le type (2) ci-dessus, c'est-à-dire

$$f_1 g_3 + f_2 h_3 + f_3 = 0 \ , \qquad (2)$$

pour lequel on prend

$$u = f_1 \ , \qquad v = f_2 \ ,$$

équations qui définissent deux échelles rectilignes portées respectivement sur Au et Bv.

6. — Pour les équations à trois variables, les nomogrammes à alignement ont un avantage marqué sous le rapport tant de la facilité de la construction que de la précision de la lecture ; mais leur supériorité s'affirme surtout avec évidence lorsqu'on les applique à des équations à plus de trois va-

---

cette forme a été découvert par M. Gronwall (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 6e série, T. 8, 1912, p. 59). La solution de cette équation d'analyse est d'un grand intérêt théorique mais généralement non nécessaire en pratique. Les équations qui sont susceptibles de cette transformation se présentent le plus souvent sous des formes déjà particularisées pour lesquelles le problème peut être résolu algébriquement. Voir T. N., p. 436 et C. G. N., pp. 230 et 255.

[1] Pour la construction de tels systèmes de points dans le cas où leur équation est algébrique par rapport au paramètre correspondant, voir T. N., p. 141 et C. G. N., p. 234.

riables non susceptibles d'être représentées au moyen de nomogrammes à entre-croisement.

Supposons que, dans le cas du type (1) ci-dessus, on remplace les fonctions d'une seule variable par des fonctions de deux variables, en écrivant

$$\begin{vmatrix} f_{14} & g_{14} & h_{14} \\ f_{25} & g_{25} & h_{25} \\ f_{36} & g_{36} & h_{36} \end{vmatrix} = 0 . \tag{5}$$

Si nous opérons la disjonction en coordonnées cartésiennes, sous la forme

$$\begin{aligned} xf_{14} + yg_{14} + h_{14} &= 0 , \\ xf_{25} + yg_{25} + h_{25} &= 0 , \\ xf_{36} + yg_{36} + h_{36} &= 0 , \end{aligned}$$

nous définissons ainsi trois systèmes ∞^2 de droites. Ces systèmes ne peuvent pas être tracés de façon permanente sur la figure, mais, ainsi que nous l'avons remarqué à la fin du n° 4, chacun d'eux peut être engendré au moyen d'une droite mobile grâce aux doubles enveloppes qui lui correspondent. La relation de position par laquelle l'équation donnée se trouve résolue réside dans le concours des trois droites tangentes respectivement aux courbes (z_1) et (z_4), (z_2) et (z_5), (z_3) et (z_6). Le mode opératoire qui en résulte n'est guère commode et peu approprié aux besoins de la pratique.

Ayons maintenant recours aux équations de disjonction en coordonnées parallèles, savoir

$$\left\{ \begin{aligned} uf_{14} + vg_{14} + h_{14} &= 0 , \\ uf_{25} + vg_{25} + h_{25} &= 0 , \\ uf_{36} + vg_{36} + h_{36} &= 0 . \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Chacune d'elles définit un système ∞^2 de points; mais, à l'encontre d'un système de ∞^2 de droites, un tel système peut être marqué de façon permanente sur la figure sous forme d'un réseau composé de deux familles de lignes (systèmes ∞^1).

En fait, voyons comment est déterminé chacun de ces systèmes, le premier par exemple.

Par les formules (4) ci-dessus nous obtenons, pour les coordonnées cartésiennes d'un point du réseau, les expressions

$$x = \delta \frac{g_{14} - f_{14}}{f_{14} + g_{14}}, \qquad y = \frac{-h_{14}}{f_{14} + g_{14}}. \tag{7}$$

Si maintenant on élimine entre ces équations soit z_4, soit z_1, on obtient deux équations telles que

$$\varphi_1(x, y, z_1) = 0, \qquad \varphi_4(x, y, z_4) = 0, \tag{8}$$

définissant deux systèmes ∞^1 de courbes, le premier côté au moyen des valeurs de z_1, et le second, de z_4; pour un couple particulier de valeurs de ces paramètres, le point (z_1, z_4) n'est autre que le point d'intersection des courbes cotées (z_1) et (z_4).

Ayant ainsi construit les réseaux (z_1, z_4), (z_2, z_5) et (z_3, z_6) on voit que *la représentation nomographique de l'équation* (5) *consiste en l'alignement de trois points pris respectivement dans ces trois réseaux.*

Cette remarquable simplicité de représentation pour des équations à plus de trois variables est souvent utilisée dans

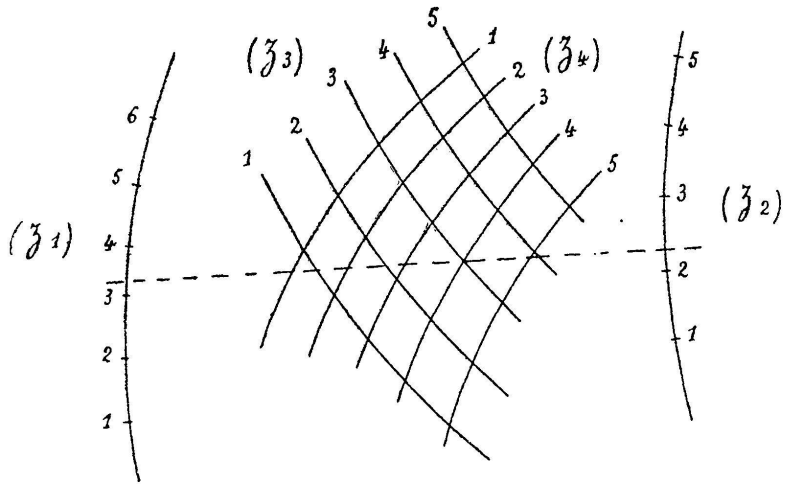

Fig. 7

les applications et constitue un des plus notables avantages de la méthode des points alignés.

La méthode s'applique spécialement au cas des équations

à quatre variables que l'on obtient en remplaçant, dans une seule des lignes du déterminant du type (5), les fonctions de deux variables par des fonctions d'une seule variable. Le type correspondant de nomogramme est celui qui représente la fig. 7.

Comme exemple d'une telle équation on peut citer l'équation complète du troisième degré[1].

D'autres exemples seront complètement traités dans la seconde conférence.

Il peut arriver, en certains cas, que les points du réseau défini par des formules telles que (7) soient tous distribués sur une seule courbe. Dans un tel cas on peut dire que les points sont *condensés* sur cette ligne. Cette circonstance se produit lorsque les formules (7) prennent la forme

$$x = \xi(\varphi_{14}) \ , \qquad y = \eta(\varphi_{14}) \ .$$

On doit alors avoir recours à l'artifice indiqué à la fin du n° 8 pour la définition nomographique de ces points (z_1, z_4).

7. — Le fait que les nomogrammes à alignement sont sujets à toute transformation homographique — puisqu'une telle transformation conserve les alignements — contribue notablement à donner de la souplesse à la méthode.

Le principe de cette transformation peut recevoir la forme analytique très simple que voici.

Soit donnée une équation sous la forme

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Nous pouvons multiplier ce déterminant par

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix}$$

[1] Voir T. N., p. 333 et C. G. N., p. 278. L'auteur a montré comment la résolution de toutes les équations des sept premiers degrés peut se ramener à l'emploi de ce procédé (*C. R. de l'Acad. des Sciences*, T. 131, 1900, p. 522) et développé entièrement la solution dans le cas du quatrième degré (T. N., p. 336).

supposé tel que les valeurs choisies pour ses neuf éléments n'annulent pas sa valeur.

Appliquant la règle bien connue pour la multiplication des déterminants, et posant pour $i = 1, 2, 3$,

$$f'_i = \lambda f_i + \mu g_i + \nu h_i ,$$
$$g'_i = \lambda' f_i + \mu' g_i + \nu' h_i ,$$
$$h'_i = \lambda'' f_i + \mu'' g_i + \nu'' h_i ,$$

nous obtenons la nouvelle équation

$$\begin{vmatrix} f'_1 & g'_1 & h'_1 \\ f'_2 & g'_2 & h'_2 \\ f'_3 & g'_3 & h'_3 \end{vmatrix} = 0 ,$$

et l'on conçoit que les systèmes cotés répondant à cette dernière équation, qui est équivalente à l'équation primitive, puissent offrir certains avantages par rapport aux systèmes obtenus directement.

D'ailleurs, puisque le déterminant de la transformation contient neuf paramètres sous forme homogène, la transformation dépend réellement de huit paramètres, ce qui lui confère une grande latitude. En particulier, cela permet de fixer *ad libitum* la position de chacun des quatre points du nomogramme qui marquent les extrémités des deux échelles correspondant aux variables prises pour données, ce qui, dans la majorité des cas, suffit à assurer au nomogramme une disposition commode [1].

Il est souvent avantageux de faire usage du cas particulier de l'homographie qui est constitué par l'*homologie*. Supposons, par exemple, ce qui est fréquemment le cas, que la partie utile d'un nomogramme recouvre toute la bande d'étendue infinie comprise entre Au, Bv et la transversale Δ à ces axes. Nous pouvons réduire ce nomogramme à des dimensions finies par une transformation homologique admettant Δ pour axe et un point quelconque pour pôle, tel

[1] Un exemple particulièrement typique d'un tel emploi de la transformation homographique générale se rencontre dans T. N., p 199.

notamment que l'origine O des axes cartésiens liés à Au et Bv, à la condition de nous donner, sur la parallèle à Au et Bv menée par le pôle — c'est-à-dire sur Oy si ce pôle coïncide avec l'origine O — le point I correspondant au point à l'infini dans la direction de Oy. Dans ces conditions, la partie utile du nomogramme est condensée à l'intérieur du triangle formé par le point I et les points où l'axe Δ rencontre Au et Bv.

Presque toujours les valeurs des variables à associer sur le nomogramme sont contenues dans une seule région. Il peut toutefois se faire, en de rares occasions, que l'on ait à associer des points appartenant à diverses portions du nomogramme qui proviennent d'homologies différentes appliquées à plusieurs parties d'un même nomogramme ayant, de l'une à l'autre, des limites communes. Dans ces conditions, lorsque l'on passe d'une portion à l'autre du nomogramme, le simple alignement qui serait à considérer sur un nomogramme construit d'un seul tenant, doit être remplacé par une suite d'alignements se recoupant deux à deux sur les limites des portions distinctes du nomogramme et formant ce qu'on peut appeler un *alignement brisé*. Pour tracer un tel alignement brisé, on peut avoir recours à certaines constructions qui se déduisent des propriétés connues de l'homologie[1]. Nous indiquerons dans une note additionnelle quelques exemples où de telles constructions seront effectuées.

8. — Pour compléter l'examen des procédés usuels de la Nomographie, il nous reste à indiquer d'un mot comment on peut combiner la méthode des points alignés avec l'enchaînement des nomogrammes tel qu'il s'est offert à nous au n° 4. Si, en fait, les équations de disjonction obtenues par l'introduction des variables auxiliaires t, t', t'', ... sont toutes du type auquel s'applique la méthode des points alignés, on peut faire usage de ce mode de représentation en adoptant les mêmes échelles (t), ou (t'), ou (t''), ... pour les

[1] Si de telles constructions étaient nécessaires en pratique, le meilleur moyen, pour les effectuer, consisterait évidemment à avoir recours temporairement à un transparent en vue d'éviter le tracé sur le nomogramme d'un nombre excessif de droites auxiliaires qu'il pourrait être difficile de faire disparaître après usage sans risquer de détruire rapidement le nomogramme.

deux nomogrammes où cette variable auxiliaire figure en commun. La courbe servant de support à une telle échelle n'a d'ailleurs pas besoin d'être munie de graduation. Prenons, par exemple, deux nomogrammes partiels, l'un en z_1 et z_2, l'autre en z_3 et z_4, reliés par une échelle auxiliaire t (fig. 8). Les deux alignements à prendre doivent couper

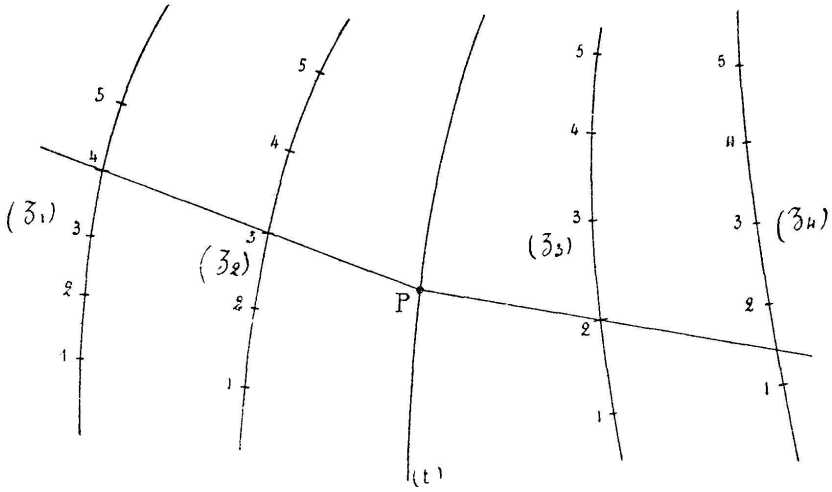

Fig. 8

l'échelle (t) au même point. En d'autres termes, si l'on suppose que le premier alignement coupe l'échelle (t) au point P, on devra faire tourner la droite servant à prendre l'alignement autour de ce point pour obtenir le second alignement. Pour cette raison le point P est dit le *pivot* de la lecture considérée et le lieu de ce point, c'est-à-dire le support de l'échelle (t), la *ligne des pivots* ou la *charnière*[1]. Un exemple d'un tel nomogramme se rencontrera dans la seconde conférence (n° 4).

Enfin, dans certains cas, on peut relier un nomogramme à entre-croisement à un nomogramme à alignement. Supposons, par exemple, que l'équation définissant le réseau (z_3, z_4) qui, combiné avec les échelles (z_1) et (z_2), constitue le nomogramme à alignement d'une certaine équation à quatre variables, soit de la forme

$$uf(\varphi_{34}) + vg(\varphi_{34}) + h(\varphi_{34}) = 0 \ . \qquad (9)$$

[1] Au sujet des nomogrammes à multiple alignement, voir T. N., p. 213 et C. G. N., p. 308.

Posant

$$t = \varphi_{34} \ , \tag{10}$$

nous voyons que les points (z_3, z_4) se confondent avec ceux de l'échelle simple dont l'équation est

$$uf(t) + vg(t) + h(t) = 0 \ ,$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$x = \delta \frac{g(t) - f(t)}{f(t) + g(t)} = \xi(t) \ ,$$

$$y = \frac{-h(t)}{f(t) + g(t)} = \eta(t) \ .$$

Or tout système de courbes d'équation

$$\Psi[x - \xi(t) \ , \ y - \eta(t)] = 0 \tag{11}$$

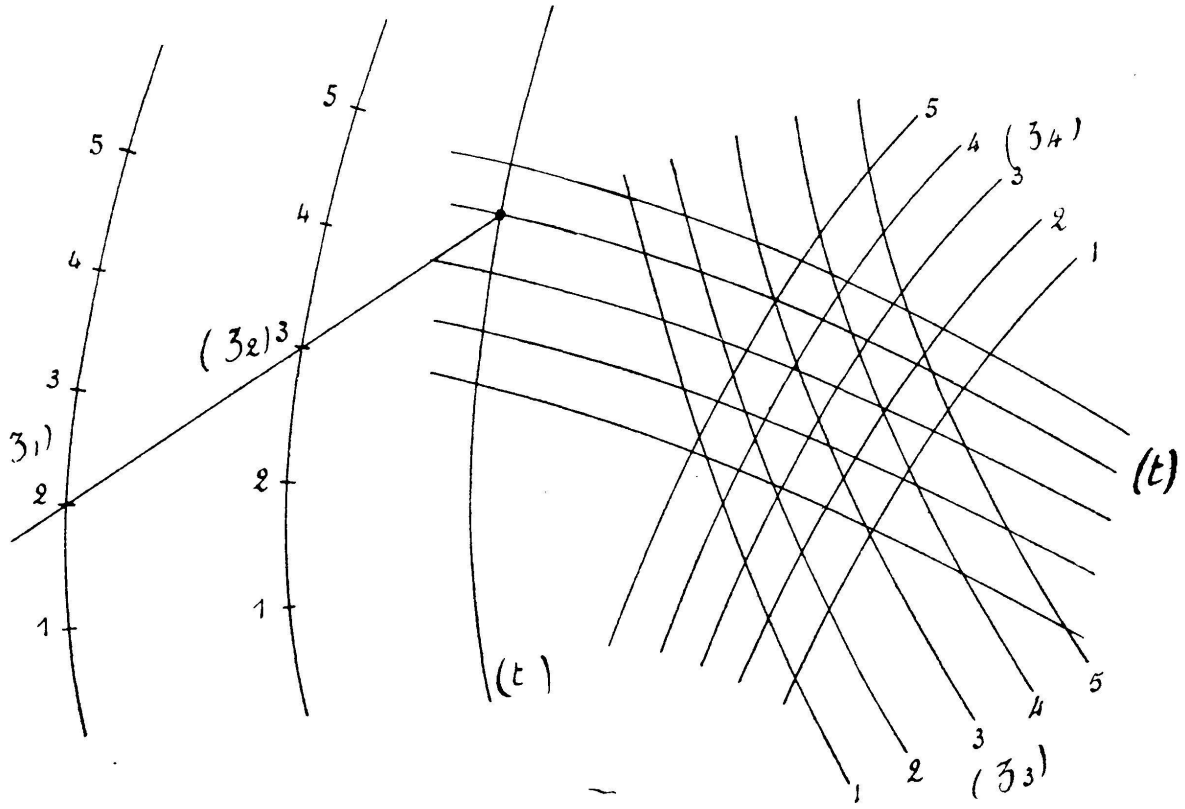

Fig. 9

est tel que la courbe cotée (t) passe par le point de l'échelle ci-dessus de même cote t. Il suffit donc de représenter l'équation (10) par un nomogramme à entre-croisement sur lequel

le système (t) soit défini par l'équation (11) (qui peut, en particulier, se réduire à la forme $x - \xi(t) = 0$, ou $y - \eta(t) = 0$) pour avoir une représentation de l'équation donnée au moyen de la combinaison du nomogramme à alignement (z_1, z_2, t) et du nomogramme à entre-croisement (z_3, z_4, t). Le passage de l'un à l'autre résulte de ce que le point (t) du premier doit se trouver sur le ligne (t) du second. La fig. 9 indique la disposition d'un tel nomogramme.

En multipliant les alignements successifs, en substituant des réseaux de points cotés aux échelles simples, en ayant recours à des courbes moins simples que la ligne droite pour établir la relation de position servant à guider la lecture sur le nomogramme, en introduisant enfin des éléments mobiles tels que ceux qui ont été envisagés à la fin du n° 4, on obtient d'autres modes de représentation nomographique, applicables à des équations renfermant un nombre de plus en plus grand de variables et qui ont été étudiés par l'auteur dans ses ouvrages précédemment cités. Mais les méthodes qui ont été examinées dans cette conférence sont par excellence celles qui servent le plus ordinairement dans les applications.

Note additionnelle sur les alignements brisés.

Considérons un nomogramme dont la partie utile est limitée par les axes Au et Bv, mais qui s'étend entre ces axes depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Divisons ce nomogramme en trois, la partie moyenne étant construite directement au moyen des équations de disjonction et d'ailleurs limitée à deux axes Δ' et Δ'' parallèles à l'axe AB des origines. Conformément à ce qui a été vu au n° 7, nous allons transformer homologiquement la partie située au-dessus de l'axe Δ' et s'étendant jusqu'à l'infini en prenant Δ' comme axe de l'homologie, l'origine O comme pôle et le point I′ de l'axe Oy comme correspondant du point à l'infini sur cet axe.

Pour construire les échelles sur cette partie transformée nous allons chercher les coordonnées (x', y') du point M′ correspondant au point M de coordonnées (x, y) de la figure primitive. Appelant l et h les distances respectives du point I′ à l'origine O et à l'axe Δ', nous trouvons facilement pour ces expressions

$$x' = \frac{lx}{h + y}, \qquad y' = \frac{ly}{h + y}. \tag{12}$$