Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1916)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ESSAI SUR LA THÉORIE DE LA DÉMONSTRATION DANS LES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Autor: Zaremba, S.

Kapitel: VI. — Compatibilité et indépendance d'un système de postulats. Termes techniques et termes courants. Postulats spécifiques d'une théorie.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16869

Malheureusement, il arrive trop souvent que les abréviations sont poussées beaucoup plus loin et cela donne lieu, non seulement à de grandes difficultés pour le lecteur, mais encore à de graves erreurs, car le souci de la brièveté empêche l'auteur, plus souvent qu'on ne le croit, de s'apercevoir que lui-même ne saurait pas rétablir les chaînons manquant, et c'est ainsi que des propositions fausses sont quelquefois présentées comme des théorèmes démontrés.

VI. — Compatibilité et indépendance d'un système de postulats. Termes techniques et termes courants. Postulats spécifiques d'une théorie.

§ 22. — Il est évident que, pour la correction d'une théorie mathématique (et plus généralement, de n'importe quelle théorie déductive), il est nécessaire que les postulats de celle-ci soient *compatibles;* en d'autres termes, la condition suivante doit être remplie :

I. *Lorsqu'une proposition* (P) *est la négation d'un postulat de la théorie, elle ne doit pas être une conséquence des autres postulats de la théorie considérée.*

En dehors de cette condition, il en est une autre qui, sans être comme la précédente, une condition de validité de la théorie, en est certainement une condition de perfection : les postulats de la théorie doivent être *indépendants ;* en d'autres termes :

II. *Aucun postulat de la théorie ne doit être une conséquence des autres postulats de celle-ci.*

La question de savoir si un système donné de postulats vérifie l'une quelconque des deux conditions qui viennent d'être énoncées se ramène évidemment à la suivante :

III. *Une proposition donnée* (P) *est-elle une conséquence d'un système donné* (S) *d'autres propositions ?*

On pourrait être tenté de regarder cette question comme équivalente à la suivante :

IV. *Le système de propositions* (S) *constitue-t-il un ensemble suffisant de prémisses pour démontrer, d'après les principes exposés aux chapitres III et IV, la proposition* (P) ?

Cette interprétation de la question III offrirait le grand avantage de fournir (au moins théoriquement) un criterium général pour la résoudre ; en effet, il est aisé de voir qu'un nombre fini d'essais (pouvant, il est vrai, être très grand) conduirait nécessairement au but. Mais, en réalité, l'interprétation précédente de la question III ne satisferait pas aux besoins de la science (et elle ne coïncide pas avec celle que l'on adopte dans les travaux modernes). En effet, on peut d'abord se demander s'il n'existe pas quelque procédé de démonstration déductive essentiellement différent de ceux qui ont été considérés aux chapitres IV et V ; en outre, même si l'on admet avec nous qu'un tel procédé n'existe pas, on se heurte à une autre difficulté qu'un exemple particulier fera bien comprendre.

Envisageons les trois propositions suivantes :

(1) A toute suite finie de nombres entiers il correspond, en vertu d'une convention (C), un point parfaitement déterminé.

(2) Lorsqu'une suite finie (s) de nombres entiers est le résultat de la transposition de deux termes consécutifs dans une seconde suite finie (s') de nombres entiers, les points qui correspondent, en vertu de la convention (C), aux suites (s) et (s'), sont confondus.

(P) Lorsque les termes de deux suites finies (σ) et (σ') de nombres entiers sont constitués par les éléments d'un même ensemble de nombres entiers et ne diffèrent par conséquent que par l'ordre dans lequel sont rangés, dans chacune d'elles, les nombres appartenant à l'ensemble considéré, les points qui correspondent aux suites (σ) et (σ'), en vertu de la convention (C), sont confondus.

Cela posé, considérons la question suivante :

(Q) La proposition (P) est-elle une conséquence des propositions (1) et (2) ?

Tout mathématicien répondra à cette question par l'affirmation et, si l'on le prie de justifier sa réponse, il démontrera la proposition (P) en plaçant parmi les prémisses les propositions (1) et (2) mais l'ensemble des prémisses qu'il aura adoptées comprendra, en dehors des propositions (1) et (2), d'autres propositions encore.

Si l'on objectait à notre mathématicien que les propositions (1) et (2) ne constituent pas *tout* l'ensemble des prémisses sur lesquelles repose sa démonstration, il ne nierait pas ce fait, mais il ajouterait qu'il a rigoureusement établi que les propositions (1) et (2) ne peuvent être vraies sans que la proposition (P) ne le soit aussi et que, dès lors, il a justifié sa réponse d'une façon complète.

En résumé, la question III est loin d'être simple et claire par elle-même ; pour l'interpréter d'une façon satisfaisante, il est nécessaire d'étudier d'abord une propriété remarquable des théories mathématiques.

§ 23. — Pour mettre cette propriété en évidence, adressons-nous à un exemple particulier en reprenant celui qui, dans un tout autre but, a été déjà présenté au § 15. Dans cet exemple, nous avons adopté pour unique prémisse la proposition suivante :

(1) Lorsque les symboles a, b, c représentent des entiers vérifiant les relations

$$a = b \quad \text{et} \quad b = c \ ,$$

on a

$$a = c \ .$$

Cela posé, nous avons démontré le théorème suivant :

(T) Lorsque les symboles p, q, r, s représentent des entiers vérifiant les relations :

$$p = q \ , \quad q = r \quad \text{et} \quad r = s \ ,$$

on a

$$p = s \ .$$

Pour peu que l'on prenne la peine de repasser attentivement toute la petite théorie ainsi constituée, on constatera que, pour la complète validité de celle-ci, il n'est pas nécessaire que le symbole

$$=$$

(ou l'expression équivalente « est égal ») ait, dans son application aux nombres entiers, la signification habituelle ; en réalité, il est nécessaire et suffisant que ce symbole ait le sens voulu pour que la proposition (1) soit vraie. Ainsi par exemple, si l'on attribuait au symbole considéré le sens que l'on donne habituellement au symbole

$$<.$$

le théorème (T) et sa démonstration subsisteraient sans aucune modification. J'ajoute que l'expression

« un entier »

donne lieu à une remarque du même genre : on pourrait attribuer à cette expression le sens de

« un élement d'un certain ensemble (E) »

sans avoir à apporter la moindre modification à la théorie considérée.

En réalité, *toute théorie mathématique dont les théorèmes sont démontrés d'une façon complète contient,* comme celle que nous venons de prendre pour exemple, *un certain nombre de termes* (qui peuvent être des expressions empruntées au langage ordinaire ou n'importe quels autres symboles) *caractérisés par la circonstance suivante : pour la complète validité de la théorie, il n'est pas nécessaire d'attribuer à ces termes,* que nous appellerons *termes techniques* de la théorie, en réservant la dénomination de *termes courants* aux autres termes, *un certain sens parfaitement déterminé à l'exclusion de tout autre, il faut seulement et il suffit que les termes considérés soient interprétés de la façon voulue, pour que les prémisses soient des propositions vraies.*

Telle est la propriété fondamentale des théories mathématiques qui constituera le point de départ des considérations ultérieures.

Il est évident que tout terme, introduit dans une théorie au moyen d'une définition, est un terme technique de celle-ci, mais les termes techniques les plus fondamentaux sont ceux qui sont dépourvus de définitions ; nous les appellerons *termes techniques essentiels* de la théorie correspondante. Les termes techniques essentiels ne peuvent pas être éliminés de la théorie, comme ceux qui ont des définitions par le procédé indiqué au § 2 ; en outre, lorsque, dans les bornes imposées par la condition de respecter l'exactitude des prémisses, on a choisi une signification particulière pour les termes techniques essentiels, les définitions ne laissent plus subsister rien d'arbitraire dans le sens que l'on peut attribuer aux termes techniques qu'elles définissent.

Dans l'exemple considéré au début de ce paragraphe, le symbole

$$=$$

et l'expression

un entier

sont évidemment des termes techniques essentiels.

Il est aisé de s'expliquer *a priori* la possibilité de l'existence, dans les théories mathématiques, de termes techniques, c'est-à-dire de termes dont le sens n'intervient pas dans les démonstrations, et de comprendre, en outre, pourquoi toute théorie mathématique doit nécessairement contenir, en dehors des termes techniques, des termes courants : en effet, il résulte des développements présentés dans les chapitres III et IV que la démonstration d'un théorème n'exige que l'effectuation, dans un certain ordre, d'opérations dont chacune est de l'un des genres suivants :

1° Reconnaître qu'une proposition exprime une partie de ce qu'exprime une autre proposition.

2° Reconnaître que le sens d'une proposition est identique à celui d'un certain ensemble d'autres propositions.

3° Constater qu'une proposition est la négation d'une certaine autre proposition.

4° Constater l'identité du sens de deux propositions.

5° Constater qu'une proposition est une proposition conditionnelle, distinguer l'hypothèse et la conclusion d'une telle proposition et reconnaître les indéterminées qu'elle peut contenir.

6° Apprécier le résultat d'une substitution effectuée sur les indéterminées d'une proposition conditionnelle.

Il est évident qu'aucune de ces opérations ne serait possible sans la connaissance du sens précis de certains termes, d'où l'existence nécessaire des termes courants.

D'autre part, il suffit de se reporter aux exemples qui ont été donnés plus haut à diverses occasions pour reconnaître qu'il peut y avoir des termes dont on n'a pas besoin de connaître la signification précise pour être à même d'effectuer chacune des opérations susdites, d'où la possibilité de l'existence des termes techniques.

§ 24. — Les faits mis en évidence au paragraphe précédent nous induisent à adopter la convention suivante :

Lorsque tous les termes qui entrent dans une proposition (P) ainsi que dans les propositions formant un certain système (S) ont, exception faite de ceux qui appartiennent à un certain ensemble ($\mathfrak{T}$), un sens bien déterminé et lorsqu'en outre il est impossible d'interpréter les termes ($\mathfrak{T}$) de façon que les propositions (S) soient vraies sans qu'il en soit de même pour la proposition (P), nous dirons que, *par rapport aux termes* ($\mathfrak{T}$), *pris pour termes techniques, la proposition* (P) *est une conséquence de l'ensemble des propositions* (S).

Cette convention admise, nous devons examiner par quels moyens on pourrait résoudre la question suivante :

V. — Une proposition donnée (P) est-elle, par rapport à un système donné de termes ($\mathfrak{T}$), pris pour termes techniques, une conséquence d'un système donné de propositions (S) ?

S'il arrive qu'en adoptant pour postulats d'une théorie, admettant pour termes techniques les termes ($\mathfrak{T}$), le système de propositions (S) ou celui que l'on obtient en adjoignant aux propositions (S) un nombre quelconque d'autres propositions, *sûrement vraies quelle que soit l'interprétation adoptée pour les termes* ($\mathfrak{T}$), on réussisse à construire, conformément aux principes exposés aux chapitres III et IV, une démonstration de la proposition (P), on aura évidemment établi que la question V comporte une réponse affirmative. Si au contraire on avait trouvé une interprétation telle des termes ($\mathfrak{T}$) que, avec cette interprétation de ces termes, les propositions (S) soient des propositions vraies, mais la proposition (P), une proposition fausse, on aurait constaté par cela même que la question V comporte, dans le cas considéré, une réponse négative.

Dans l'exemple considéré au début du paragraphe précédent, la proposition (T) est une conséquence de la proposition (1) par rapport au symbole

$$=$$

et à l'expression

un entier

pris pour termes techniques. Cet exemple est un exemple du cas où le système (S) (qui se réduit ici à la seule proposition (1)) constitue un système suffisant de prémisses pour démontrer la proposition (P).

Un exemple d'une autre nature est celui que nous avons envisagé au § 22. Le lecteur s'assurera que, dans ce cas, la proposition (P) est une conséquence des propositions (1) et (2) par rapport au terme

« la convention (C) » ,

pris pour terme technique ; mais il constatera que les propositions (1) et (2) *ne constituent pas* un système suffisant de prémisses pour établir la proposition (P) ; pour obtenir un tel système de prémisses, il faut adjoindre aux propositions (1) et (2) certaines propositions empruntées à la théorie des permutations, propositions qui restent vraies quel que soit le sens du terme

« la convention (C) » .

Pour donner un exemple du cas où la question V comporte une réponse négative, considérons les deux propositions suivantes :

(A) Lorsque trois nombres entiers, a, b, c, satisfont aux relations

$$a = b \quad \text{et} \quad b = c ,$$

on a

$$a = c .$$

(B) Lorsque deux nombres entiers x et y satisfont à la relation

$$x = y ,$$

on a

$$y = x .$$

Il est aisé de voir que, par rapport au symbole

$$=,$$

pris pour terme technique, la proposition (B) *n'est pas* une conséquence de la proposition (A).

En effet, regardons le symbole

$$=$$

comme ayant la signification attribuée ordinairement au symbole

$$<.$$

Dans ce cas la proposition (A) sera vraie, mais la proposition (B), fausse ; et cela suffit pour justifier ce que nous avons annoncé.

Nous laisserons au lecteur le soin de confirmer par des exemples (qu'il est particulièrement aisé de tirer de l'arithmétique) une prévision qui se présente d'elle-même à l'esprit et que l'on peut énoncer de la façon suivante :

Etant donné une proposition (P) et un système (S) d'autres propositions, il peut être possible de choisir arbitrairement entre certaines limites (que nous ne chercherons d'ailleurs pas à préciser) un certain ensemble $(\mathfrak{T})$ de termes parmi ceux qui servent à exprimer les propositions (P) et (S), pour examiner ensuite si la proposition (P) est une conséquence du système (S) par rapport aux termes $(\mathfrak{T})$, pris pour termes techniques ; dans ces conditions, le résultat de l'examen pourra dépendre du choix des termes $(\mathfrak{T})$.

§ 25. — Les notions acquises dans les deux paragraphes précédents permettent de préciser, plus complètement que nous ne l'avons pu faire jusqu'à présent, la portée des théories mathématiques et de tirer de là une indication importante relative à l'élaboration de ces théories.

Supposons que, dans une théorie (T), un certain ensemble de termes $(\mathfrak{T})$ soit un ensemble de termes techniques essentiels (§ 23) et admettons, en outre, que l'on ait constaté intuitivement ou de quelque autre façon le fait suivant : lorsque les termes $(\mathfrak{T})$ sont regardés comme les noms de certaines choses (C), bien déterminées, tous les postulats de la théorie deviennent des propositions vraies. Dans ces conditions, la théorie (T) pourra être regardée comme une théorie des choses (C) et, au moins en ce qui concerne ces choses-là, elle ne contiendra certainement pas d'autres jugements intuitifs que ceux qui consistent à affirmer l'exactitude des postulats (Π) dont les énoncés contiennent les noms des choses considérées. Nous dirons que l'ensemble des postulats (Π) est l'ensemble des *postulats spécifiques* de la théorie considérée des choses (C). Il est clair que tout théorème de cette théorie des choses (C) sera, par rapport aux termes (𝔗), pris pour termes techniques (§ 24), une conséquence des postulats spécifiques.

Voici l'indication fondamentale que l'on peut tirer de ce qui précède :

Lorsqu'on veut constituer une théorie mathématique d'un ensemble de choses, on doit chercher à la constituer de façon que les noms de ces choses aient le caractère de termes techniques.

Ce résultat étant atteint, les choses dont les noms se trouveront être des termes techniques essentiels, représenteront évidemment les éléments fondamentaux de la théorie et les postulats spécifiques feront connaître la part de l'intuition dans les jugements relatifs à ces éléments fondamentaux.

Si je ne me trompe, les notions présentées jusqu'ici dans ce chapitre n'ont jamais encore été mises en évidence d'une façon explicite, mais l'étude des travaux modernes relatifs aux fondements des branches essentielles des mathématiques amène à la conclusion que, sous une forme plus ou moins nette, ces notions existaient dans l'esprit des auteurs. C'est ainsi que, dans les recherches relatives aux fondements de la Géométrie, les termes tels que :

point; ligne droite; plan et quelques autres, jouent en réalité le rôle des termes techniques essentiels, et ce que l'on donne comme l'ensemble des postulats de la Géométrie ne peut être regardé que comme devant être, dans l'esprit des auteurs, l'ensemble des postulats spécifiques de la théorie qu'ils exposent; ce dernier point apparaît très nettement quand on tient compte de ce fait que, dans les travaux dont il vient d'être question, on n'énonce aucune prémisse de l'Arithmétique et pourtant, dans les démonstrations, on fait un large usage de l'Arithmétique et même de l'Analyse mathématique.

§ 26. — Il résulte de ce qui a été exposé au paragraphe précédent que les conditions I et II, énoncées au § 22, doivent être regardées comme se rapportant au système des postulats spécifiques d'une théorie et que, dès lors, la liste des termes techniques essentiels de cette théorie doit constituer une donnée du problème qui consiste à vérifier si les conditions I et II du § 22 sont remplies. Cela étant, la question III du § 22 doit être regardée comme une forme abrégée de la question V du § 24 et, quand on aura à se la poser à l'effet de s'assurer si l'une des conditions I ou II du § 22 est vérifiée, l'ensemble des termes ($\mathfrak{T}$) devra coïncider avec l'ensemble des termes techniques essentiels de la théorie correspondante.

Les considérations précédentes nous amènent tout naturellement à formuler les règles suivantes :

Pour s'assurer si les postulats spécifiques d'une théorie mathématique satisfont à la condition I du § 22, en d'autres termes, pour reconnaître s'ils sont compatibles, on cherchera à trouver une interprétation telle des termes techniques essentiels que, avec cette interprétation de ces termes, chacun des postulats devienne une proposition vraie ; si l'on y réussit, la compatibilité des postulats considérés sera par cela même établie ; si au contraire on avait constaté que la négation de l'un des postulats est, par rapport aux termes techniques essentiels, une conséquence (§ 24) des autres postulats, on aurait fourni la preuve de l'incompatibilité des postulats considérés.

Quant à la condition II du § 22, celle de l'indépendance des postulats, on ne l'examinera que dans le cas où leur compatibilité aura été préalablement reconnue et l'on pourra alors procéder de la façon suivante : on envisagera successivement chaque postulat et chaque fois on cherchera à interpréter les termes techniques essentiels de façon que le postulat considéré momentanément devienne une proposition fausse et que, en même temps, tous les autres postulats deviennent des propositions vraies ; la réussite de toutes ces opérations constituera la preuve de l'indépendance des postulats considérés ; si au contraire on avait constaté que, par rapport aux termes techniques essentiels, l'un des postulats est une conséquence (§ 24) des autres postulats, on aurait démontré par cela même que les postulats considérés ne sont pas indépendants.

Dans la pratique, la question de savoir si les postulats spécifiques d'une théorie sont compatibles, ne donne pas lieu, ordinairement du moins, à des difficultés, et cela parce que, ordinairement, en constituant la théorie, on connaît d'avance une interprétation des termes techniques essentiels pour laquelle les postulats deviennent des propositions vraies. Au contraire, il est souvent si difficile de résoudre la question de l'indépendance des postulats que l'on est obligé d'y renoncer complètement, ou de se contenter d'une solution partielle qui consiste à prouver que certains des postulats sont indépendants des autres, c'est-à-dire tels qu'aucun d'eux n'est, par rapport aux termes techniques essentiels, une conséquence (§ 24) des autres postulats. J'ajoute que, dans certains cas, l'énoncé II donné au § 22 de la condition de l'indépendance des postulats peut être inadmissible parce que les énoncés de certains postulats peuvent impliquer l'exactitude de certains autres, énoncés antérieurement.

Lorsque cette circonstance se présente, on partage les postulats en un certain nombre de classes et l'on fixe un certain ordre de succession de ces classes de façon à pouvoir procéder (lorsque les difficultés ne sont pas trop grandes) de la façon suivante : on s'assure d'abord, en appliquant la méthode indiquée plus haut, que les postulats de la première classe sont indépendants et, en considérant ensuite, dans l'ordre adopté, les autres classes on opère comme il suit : on envisage successivement chaque postulat de la classe momentanément considérée et, chaque fois, on essaie d'interpréter les termes techniques essentiels de telle façon que le postulat considéré devienne faux et, qu'en même temps, tous les autres postulats de la classe considérée et tous ceux des classes qui la précèdent deviennent des propositions vraies.

Si l'on réussit à effectuer toutes ces opérations, on dit que, *par rapport au classement adopté, les postulats considérés sont indépendants.*

Pour terminer, nous allons donner un exemple simple du cas où la compatibilité et l'indépendance d'un système de postulats peut être aisément établie. A cet effet, spécifions que le symbole

$$=$$

et l'expression

élément de l'ensemble (E)

seront les termes techniques essentiels de la théorie que nous allons considérer et adoptons pour postulats spécifiques de cette théorie les trois propositions suivantes :

(A). Lorsque le symbole a est un élément de l'ensemble (E) on a

$$a = a \, .$$

(B) Lorsque les symboles a et b représentent deux éléments de l'ensemble (E) tels que l'on ait

$$a = b \, ,$$

on a aussi

$$b = a \, .$$

(C) Lorsque les symboles a, b et c représentent trois éléments de l'ensemble (E), tels que l'on ait

$$a = b \quad \text{et} \quad b = c \, ,$$

on a aussi

$$a = c \, .$$

Pour reconnaître la compatibilité des trois postulats précédents, il suffit de remarquer qu'ils deviennent des propositions vraies dans le cas où l'expression

un élément de l'ensemble (E)

est considérée comme ayant le sens de

un nombre entier ,

le symbole

$$=$$

étant en même temps interprété comme on l'interprète ordinairement en arithmétique.

Pour établir l'indépendance de nos trois postulats, il faut, d'après la règle générale, établir les trois lemmes qui suivent :

Lemme I. Il est possible d'interpréter les termes techniques de façon que la proposition (A) soit fausse et chacune des propositions (B) et (C), une proposition vraie.

En effet, regardons l'expression

un élément de l'ensemble (E)

comme ayant le sens de

un nombre entier

et, en modifiant le sens habituel du symbole

$$=$$

dans une phrase symbolique de la forme

$$x = y\ ,$$

où x et y représentent des nombres entiers, convenons de regarder cette phrase symbolique comme exprimant à la fois les deux choses suivantes :

1° Aucun des symboles x et y ne représente l'unité ;

2° les symboles x et y sont ceux d'un même nombre entier.

Avec cette interprétation des termes techniques, chacune des propositions (B) et (C) sera vraie mais la proposition (A) sera fausse puisque, pour qu'elle fût vraie, il faudrait que l'on eût, pour *tout* nombre entier a,

$$a = a$$

et il n'en est pas ainsi puisque, avec le sens attribué par nous au symbole

$$=$$

on n'a pas

$$1 = 1\ .$$

Lemme II. On peut interpréter les termes techniques de façon que la proposition (B) soit fausse et, qu'en même temps, chacune des propositions (A) et (C) soit vraie.

En effet, il suffit, pour cela, de donner au terme

un élément de l'ensemble (E)

le sens que nous lui avons donné pour établir le Lemme I en convenant, en même temps, de donner au symbole

$$=$$

le sens habituellement attribué en arithmétique au symbole

$$\leqq .$$

Lemme III. On peut interpréter les termes techniques de façon que la proposition (C) soit fausse et, qu'en même temps, chacune des propositions (A) et (B) soit vraie.

En effet, continuons à regarder l'expression

un élément de l'ensemble (E)

comme désignant un nombre entier, mais donnons une nouvelle interprétation au symbole

$$= ,$$

en convenant de regarder la proposition symbolique

$$x = y ,$$

lorsque x et y représentent des nombres entiers, comme exprimant ce qui, dans la terminologie classique, pourrait être exprimé en disant que les nombres x et y sont ou égaux ou tels que le plus grand d'entre eux ne diffère que d'une unité de l'autre. Ces conventions adoptées, les propositions (A) et (B) seront évidemment vraies, mais la proposition (C) ne le sera pas car, bien que, en vertu de nos conventions, l'on ait en particulier

$$1 = 2 \qquad \text{et} \qquad 2 = 3 ,$$

il résulte des mêmes conventions que l'on n'a pas

$$1 = 3 .$$

Nos trois lemmes étant établis, l'indépendance des trois postulats l'est aussi.

En résumé, les postulats (A) (B) et (C) sont compatibles et indépendants.

Genève, décembre 1915.