

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 18 (1916)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** EXTENSION A L'ESPACE D'UN THÉORÈME SUR LES CUBIQUES PLANES  
**Autor:** Gonseth, F.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-16883>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

sèdent également la propriété ( $\alpha$ ). La définition de cette catégorie de fonctions étant purement descriptive, il est évident qu'en général elles ne vérifient pas la propriété ( $\gamma$ ). En effet, le caractère de ces fonctions ne change pas dans une transformation continue croissante quelconque de  $x$ , tandis que les ensembles ne conservent pas obligatoirement dans cette opération le caractère d'être épais ou minces <sup>1</sup>.

---

## EXTENSION A L'ESPACE D'UN THÉORÈME SUR LES CUBIQUES PLANES

PAR

F. GONSETH (Zurich).

---

1. — Je me propose de démontrer, dans ce qui suit, trois propriétés qu'on peut considérer comme une extension, à l'espace, d'un théorème bien connu sur les cubiques planes, à savoir :

*Par un point M d'une cubique plane  $C_3$  passent 4 droites qui touchent  $C_3$  aux points A, B, C, D différents de M. Si l'on mène de M les tangentes à toutes les coniques passant par A, B, C, D, tous les points de contact sont sur  $C_3$ . ( $C_3$  est supposée sans point double.)*

---

<sup>1</sup> C'est afin d'éviter toute confusion des deux points de vue descriptif et métrique dans la théorie des ensembles et des fonctions (voir C. R., 31 mai 1915 et *Journ. de Math.*, 1915, 2, p. 125, n° 16), que j'ai proposé de désigner par « épaisseur » le nombre appelé antérieurement par M. Lebesgue « densité » d'un ensemble. La propriété d'être dense ou non dense est pour un ensemble l'une des principales, du point de vue descriptif. Les caractères, encore inconnus à l'heure actuelle, des classes de fonctions selon M. Baire, ne font certainement intervenir en aucune façon l'idée de mesure, puisqu'ils doivent demeurer invariables pour toute transformation continue et croissante effectuée sur la variable indépendante (condition des propriétés descriptives ; or, une telle transformation peut changer en un ensemble mince le complémentaire d'un ensemble mince). Pour cette même raison, il est à peu près évident que ces caractères, manifestés par certains ensembles tels que ceux-ci :  $\alpha < f$ ,  $\alpha > f$ , sont fournis par des combinaisons plus ou moins complexes des notions de point limite, d'ensemble fermé, d'ensembles denses ou non denses les uns sur les autres. Aussi me paraît-il utile, pour éviter des équivoques et des intuitions erronées, d'établir une séparation la plus nette possible entre les deux ordres d'idées, et en particulier de s'interdire rigoureusement toute communauté de dénominations entre eux. C'est pourquoi il me semble préférable de laisser le substantif « densité » à l'ordre descriptif exclusivement.

2. — Les 27 droites d'une surface  $F_3$  du 3<sup>me</sup> ordre (sans point double) forment 45 triangles. Soient  $M_1, N_2, N_3$ , les sommets de l'un d'eux et  $d_1, d_2, d_3$ , ses côtés. Le cône tangent mené de  $M_1$  à  $F_3$  passe par les droites  $d_2$  et  $d_3$  et touche encore la surface suivant une biquadratique gauche. La quadrique polaire de  $M_1$  coupe, en effet,  $F_3$  suivant une courbe du 6<sup>me</sup> ordre formée des droites  $d_2$  et  $d_3$  et d'une biquadratique.

Un faisceau de quadriques passent par  $C_4$ ; de  $M_1$  je mène les droites tangentes à chacune d'elles et je m'en vais faire voir que tous les points de contact sont sur  $F_3$ . Il est évident, tout d'abord, que le lieu de ces points est une surface du 3<sup>me</sup> ordre; ce mode de génération est celui de la *pampolaire de Steiner*<sup>1</sup>. La surface engendrée est le lieu des coniques  $\Gamma$ , intersections de chaque quadrique du faisceau et du plan polaire de  $M_1$  suivant cette dernière. Ces plans polaires forment eux aussi un faisceau, projectif à celui des quadriques.

Menons par  $M_1$  un plan quelconque  $\pi$ , et prenons l'intersection de  $\pi$  avec la surface  $F_3$  et le faisceau de quadriques. On se rend compte ainsi que la propriété indiquée se démontre par simple application du théorème de géométrie plane cité, pour un nombre suffisant de positions de  $\pi$ .

Remarquons — cette remarque nous sera utile par la suite — que les plans des coniques  $\Gamma$  passent tous par la droite  $d_1$ , du triangle  $d_1, d_2, d_3$ , et que par cette même droite passent, en plus du plan du triangle précité, quatre plans qui contiennent un nouveau triangle tracé sur  $F_3$ . Les quatre sommets  $M_2, M_3, M_4, M_5$ , non situés sur  $d_1$ , sont les sommets des quatre cônes passant par  $C_4$ , c'est-à-dire les sommets du tétraèdre conjugué à toutes les quadriques contenant cette même courbe. De ce fait résulte enfin que chaque conique  $\Gamma$  est l'intersection d'un plan  $\mu$  et d'une quadrique dont  $M_2, M_3, M_4, M_5$  est un tétraèdre conjugué; suivant laquelle  $M_1$  et  $\mu$  sont pôle et plan polaire, et qui est d'ailleurs déterminée par ces conditions.

<sup>1</sup> STEINER, *Gesammelte Werke* II, p. 652.

Je formule le résultat :

*D'un point  $M_1$ , sommet d'un triangle tracé sur une surface  $F_3$ , du 3<sup>me</sup> ordre, on mène le cône tangent à celle-ci; la courbe de contact est une biquadratique gauche  $C_4$  (lorsqu'on néglige les deux droites passant par  $M_1$ ). Si de  $M_1$  on mène les tangentes à l'une quelconque des quadriques contenant  $C_4$ , tous les points de contact sont sur  $F_3$ .*

3. — Par toute droite  $d_1$ , de  $F_3$ , passent cinq plans qui contiennent un triangle tracé sur  $F_3$ . Soient  $M_1, \dots, M_5$ , les cinq sommets non situés sur  $d_1$ . Une double infinité de cubiques gauches passent par les cinq points (gerbe de cubiques de Reye<sup>1</sup>). Menons par  $d_1$  les quatre plans tangents à chacune d'elles et recherchons le lieu des points de contact.

Soit  $\mu$  un plan arbitraire par  $d_1$ . Les points de contact des cubiques de la gerbe qui le touchent sont sur une conique ( $\Gamma$ ), la *conique conjuguée du pentagone*<sup>2</sup>  $M_1, \dots, M_5$ , qui jouit de la propriété suivante : elle est l'intersection de  $\mu$  et d'une quadrique dont  $M_2, \dots, M_5$  est un tétraèdre conjugué, et suivant laquelle  $M_1$  et  $\mu$  sont pôle et plan polaire. Cette conique coïncide donc avec l'une des coniques  $\Gamma$ , dont il est question au paragraphe précédent, et se trouve sur  $F_3$ . Le résultat est le suivant :

*Par une droite  $d$ , d'une surface (sans point double)  $F_3$ , du 3<sup>me</sup> ordre, passent cinq plans tritangents de cette surface. Si l'on mène par  $d$  les quatre plans tangents à l'une quelconque des cubiques gauches passant par les cinq points de contact non situés sur  $d$ , tous les points de contact sont sur  $F_3$ .*

4. — Supposons qu'on puisse tracer deux droites  $d_1$  et  $d_2$ , sur une surface  $F_4$ , du 4<sup>me</sup> ordre (qui ne sera par conséquent pas générale). Toutes les droites s'appuyant sur  $d_1$  et  $d_2$  coupent en général  $F_4$  en deux autres points distincts. Démontrons tout d'abord que celles qui touchent  $F_4$  le font aux points d'une biquadratique gauche.

Soient  $M$  un point arbitraire de  $d_1$ , et  $\pi$  le plan projetant  $d_2$  depuis  $M$ . Ce plan coupe  $F_4$  suivant  $d_2$  et une courbe  $C_3$  du

<sup>1</sup> Voir REYE, *Geometrie der Lage*, II. Kap. 26.

<sup>2</sup> SERRET, *Géométrie de situation*.

3<sup>me</sup> ordre passant par M. Toutes les droites de  $\pi$  qui passent par M sont des droites de la congruence linéaire dont  $d_1$  et  $d_2$  sont les directrices, et  $\pi$  n'en contient point d'autres. Or il y en a quatre qui touchent  $C_3$  ailleurs qu'en M : les points de contact sont donc sur une courbe gauche du 4<sup>me</sup> ordre,  $C_4$ .

$C_4$  est de *première espèce*. En effet, menons une quadrique Q qui la contienne, ce que nous pouvons faire dans les deux cas possibles, où  $C_4$  est de première ou de seconde espèce. Si nous prouvons que cette quadrique rencontre encore  $F_4$  suivant une biquadratique, nous aurons démontré que  $C_4$  est elle-même une biquadratique. Ceci se base sur le fait que les deux systèmes de génératrices de Q sont des cordes de toutes les biquadratiques tracées sur Q ; si Q et  $F_4$  ont une biquadratique commune, toutes les droites de Q couperont  $F_4$  encore en deux points, et seront par conséquent des cordes de la seconde courbe d'intersection. Celle-ci ne peut être de seconde espèce, car un système réglé de Q devrait être formé de ses trisécantes.

Soit  $C_2$  l'intersection de Q et de  $\pi$  ; les deux tangentes menées de M à  $C_2$  touchent cette dernière en deux points de  $C_3$ , d'après le théorème de géométrie plane déjà cité ; les droites qui s'appuient sur  $d_1$  et  $d_2$  et qui touchent Q, le font donc en des points de  $F_4$ . D'ailleurs la courbe de ces points de contact est une biquadratique (Chasles), et  $C_4$  est par conséquent elle-même de première espèce. Nous *pouvons* en conséquence mener un faisceau de quadriques par  $C_4$ . Nous en prendrons l'intersection avec  $\pi$ , et par une nouvelle application du même théorème de géométrie plane nous arriverons au résultat suivant :

*Si une surface  $F_4$  du 4<sup>me</sup> ordre contient deux droites,  $d_1$  et  $d_2$ , les droites de la congruence, dont  $d_1$  et  $d_2$  sont les directrices, qui touchent  $F_4$  le font aux points d'une biquadratique  $C_4$ . Si l'on mène les droites de la congruence qui touchent l'une quelconque des quadriques passant par  $C_4$ , tous les points de contact sont sur  $F_4$ .*

---