Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1916)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EXTENSION A L'ESPACE D'UN THÉORÈME SUR LES CUBIQUES PLANES

Autor: Gonseth, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16883

sèdent également la propriété (α). La définition de cette catégorie de fonctions étant purement descriptive, il est évident qu'en général elles ne vérifient pas la propriété (γ). En effet, le caractère de ces fonctions ne change pas dans une transformation continue croissante quelconque de x, tandis que les ensembles ne conservent pas obligatoirement dans cette opération le caractère d'être épais ou minces [1].

EXTENSION A L'ESPACE D'UN THÉORÈME SUR LES CUBIQUES PLANES

PAR

F. Gonseth (Zurich).

---

1. — Je me propose de démontrer, dans ce qui suit, trois propriétés qu'on peut considérer comme une extension, à l'espace, d'un théorème bien connu sur les cubiques planes, à savoir :

Par un point M *d'une cubique plane* C_3 *passent* 4 *droites qui touchent* C_3 *aux points* A, B, C, D *différents de* M. *Si l'on mène de* M *les tangentes à toutes les coniques passant par* A, B, C, D, *tous les points de contact sont sur* C_3. (C_3 est supposée sans point double.)

---

[1] C'est afin d'éviter toute confusion des deux points de vue descriptif et métrique dans la théorie des ensembles et des fonctions (voir C. R., 31 mai 1915 et *Journ. de Math.*, 1915, 2, p. 125, n° 16), que j'ai proposé de désigner par « épaisseur » le nombre appelé antérieurement par M. Lebesgue « densité » d'un ensemble. La propriété d'être dense ou non dense est pour un ensemble l'une des principales, du point de vue descriptif. Les caractères, encore inconnus à l'heure actuelle, des classes de fonctions selon M. Baire, ne font certainement intervenir en aucune façon l'idée de mesure, puisqu'ils doivent demeurer invariables pour toute transformation continue et croissante effectuée sur la variable indépendante (condition des propriétés descriptives ; or, une telle transformation peut changer en un ensemble mince le complémentaire d'un ensemble mince). Pour cette même raison, il est à peu près évident que ces caractères, manifestés par certains ensembles tels que ceux-ci : $\alpha < f$, $\alpha > f$, sont fournis par des combinaisons plus ou moins complexes des notions de point limite, d'ensemble fermé, d'ensembles denses ou non denses les uns sur les autres. Aussi me paraît-il utile, pour éviter des équivoques et des intuitions erronées, d'établir une séparation la plus nette possible entre les deux ordres d'idées, et en particulier de s'interdire rigoureusement toute communauté de dénominations entre eux. C'est pourquoi il me semble préférable de laisser le substantif « densité » à l'ordre descriptif exclusivement.

2. — Les 27 droites d'une surface F_3 du 3^{me} ordre (sans point double) forment 45 triangles. Soient M_1, N_2, N_3, les sommets de l'un d'eux et d_1, d_2, d_3, ses côtés. Le cône tangent mené de M_1 à F_3 passe par les droites d_2 et d_3 et touche encore la surface suivant une biquadratique gauche. La quadrique polaire de M_1 coupe, en effet, F_3 suivant une courbe du 6^{me} ordre formée des droites d_2 et d_3 et d'une biquadratique.

Un faisceau de quadriques passent par C_4 ; de M_1 je mène les droites tangentes à chacune d'elles et je m'en vais faire voir que tous les points de contact sont sur F_3. Il est évident, tout d'abord, que le lieu de ces points est une surface du 3^{me} ordre ; ce mode de génération est celui de la *pampolaire de Steiner* [1]. La surface engendrée est le lieu des coniques Γ, intersections de chaque quadrique du faisceau et du plan polaire de M_1 suivant cette dernière. Ces plans polaires forment eux aussi un faisceau, projectif à celui des quadriques.

Menons par M_1 un plan quelconque π, et prenons l'intersection de π avec la surface F_3 et le faisceau de quadriques. On se rend compte ainsi que la propriété indiquée se démontre par simple application du théorème de géométrie plane cité, pour un nombre suffisant de positions de π.

Remarquons — cette remarque nous sera utile par la suite — que les plans des coniques Γ passent tous par la droite d_1, du triangle d_1, d_2, d_3, et que par cette même droite passent, en plus du plan du triangle précité, quatre plans qui contiennent un nouveau triangle tracé sur F_3. Les quatre sommets M_2 M_3 M_4 M_5, non situés sur d_1, sont les sommets des quatre cônes passant par C_4, c'est-à-dire les sommets du tétraèdre conjugué à toutes les quadriques contenant cette même courbe. De ce fait résulte enfin que chaque conique Γ est l'intersection d'un plan μ et d'une quadrique dont M_2, M_3, M_4, M_5 est un tétraèdre conjugué ; suivant laquelle M_1 et μ sont pôle et plan polaire, et qui est d'ailleurs déterminée par ces conditions.

---

[1] STEINER, *Gesammelte Werke* II, p. 652.

Je formule le résultat :

D'un point M_1, *sommet d'un triangle tracé sur une surface* F_3, *du* 3^{me} *ordre, on mène le cône tangent à celle-ci; la courbe de contact est une biquadratique gauche* C_4 *(lorsqu'on néglige les deux droites passant par* M_1*). Si de* M_1 *on mène les tangentes à l'une quelconque des quadriques contenant* C_4, *tous les points de contact sont sur* F_3.

3. — Par toute droite d_1, de F_3, passent cinq plans qui contiennent un triangle tracé sur F_3. Soient $M_1, \ldots, M_5$, les cinq sommets non situés sur d_1. Une double infinité de cubiques gauches passent par les cinq points (gerbe de cubiques de Reye[1]). Menons par d_1 les quatre plans tangents à chacune d'elles et recherchons le lieu des points de contact.

Soit μ un plan arbitraire par d_1. Les points de contact des cubiques de la gerbe qui le touchent sont sur une conique (Γ), la *conique conjuguée du pentagone*[2] $M_1, \ldots, M_5$, qui jouit de la propriété suivante : elle est l'intersection de μ et d'une quadrique dont $M_2, \ldots, M_5$ est un tétraèdre conjugué, et suivant laquelle M_1 et μ sont pôle et plan polaire. Cette conique coïncide donc avec l'une des coniques Γ, dont il est question au paragraphe précédent, et se trouve sur F_3. Le résultat est le suivant :

Par une droite d, *d'une surface (sans point double)* F_3, *du* 3^{me} *ordre, passent cinq plans tritangents de cette surface. Si l'on mène par* d *les quatre plans tangents à l'une quelconque des cubiques gauches passant par les cinq points de contact non situés sur* d, *tous les points de contact sont sur* F_3.

4. — Supposons qu'on puisse tracer deux droites d_1 et d_2, sur une surface F_4, du 4^{me} ordre (qui ne sera par conséquent pas générale). Toutes les droites s'appuyant sur d_1 et d_2 coupent en général F_4 en deux autres points distincts. Démontrons tout d'abord que celles qui touchent F_4 le font aux points d'une biquadratique gauche.

Soient M un point arbitraire de d_1, et π le plan projetant d_2 depuis M. Ce plan coupe F_4 suivant d_2 et une courbe C_3 du

---

[1] Voir Reye, *Geometrie der Lage*, II. Kap. 26.

[2] Serret, *Géométrie de situation*.

3^{me} ordre passant par M. Toutes les droites de π qui passent par M sont des droites de la congruence linéaire dont d_1 et d_2 sont les directrices, et π n'en contient point d'autres. Or il y en a quatre qui touchent C_3 ailleurs qu'en M : les points de contact sont donc sur une courbe gauche du 4^{me} ordre, C_4.

C_4 est de *première espèce.* En effet, menons une quadrique Q qui la contienne, ce que nous pouvons faire dans les deux cas possibles, où C_4 est de première ou de seconde espèce. Si nous prouvons que cette quadrique rencontre encore F_4 suivant une biquadratique, nous aurons démontré que C_4 est elle-même une biquadratique. Ceci se base sur le fait que les deux systèmes de génératrices de Q sont des cordes de toutes les biquadratiques tracées sur Q ; si Q et F_4 ont une biquadratique commune, toutes les droites de Q couperont F_4 encore en deux points, et seront par conséquent des cordes de la seconde courbe d'intersection. Celle-ci ne peut être de seconde espèce, car un système réglé de Q devrait être formé de ses trisécantes.

Soit C_2 l'intersection de Q et de π ; les deux tangentes menées de M à C_2 touchent cette dernière en deux points de C_3, d'après le théorème de géométrie plane déjà cité ; les droites qui s'appuient sur d_1 et d_2 et qui touchent Q, le font donc en des points de F_4. D'ailleurs la courbe de ces points de contact est une biquadratique (Chasles), et C_4 est par conséquent elle-même de première espèce. Nous *pouvons* en conséquence mener un faisceau de quadriques par C_4. Nous en prendrons l'intersection avec π, et par une nouvelle application du même théorème de géométrie plane nous arriverons au résultat suivant :

Si une surface F_4 *du* 4^{me} *ordre contient deux droites,* d_1 *et* d_2, *les droites de la congruence, dont* d_1 *et* d_2 *sont les directrices, qui touchent* F_4 *le font aux points d'une biquadratique* C_4. *Si l'on mène les droites de la congruence qui touchent l'une quelconque des quadriques passant par* C_4, *tous les points de contact sont sur* F_4.