Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1916)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ESSAI SUR LA THÉORIE DE LA DÉMONSTRATION DANS LES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Autor: Zaremba, S.

Kapitel: V. — Examen critique des vues précédentes.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16869

En rapprochant ces remarques de celles qui ont été faites au § 6, on arrive à la conclusion que les différentes subdivisions des prémisses d'une théorie, si importantes qu'elles soient quant à la façon de concevoir l'ensemble de la théorie, ont un caractère éminemment subjectif. Mais il importe de faire remarquer que cette circonstance n'affaiblit en rien la puissance des démonstrations comme moyen de provoquer la conviction et cela pour la raison suivante : ainsi que nous l'avons annoncé au § 4 et comme cela résulte des développements présentés au chapitre précédent et dans le chapitre actuel, la seule division des propositions formant une théorie mathématique qui soit importante au point de vue de la structure des démonstrations est la division de ces propositions en prémisses et en théorèmes. Or, pour toute théorie déjà constituée, cette division repose sur un caractère qui ne dépend pas du point de vue où l'on se place et elle est d'une parfaite netteté.

V. — Examen critique des vues précédentes.

§ 19. — Il est tout d'abord naturel de se demander si toute démonstration mathématique rentre nécessairement dans les cadres sommairement tracés dans les deux chapitres précédents.

Nous croyons, sans pouvoir appuyer notre opinion d'une démonstration, qu'il en est bien ainsi pour toute démonstration *complète* (c'est-à-dire développée d'une façon tout à fait détaillée) à condition de tenir compte de ce fait que, en dehors des ramifications explicitement considérées au § 13, la démonstration d'un théorème peut en contenir d'autres provenant de la démonstration de propositions conditionnelles qui forment les secondes prémisses de certains chaînons logiques se présentant dans la démonstration du théorème considéré.

§ 20. — Actuellement nous allons examiner une objection grave qu'il est possible de soulever contre les démonstrations mathématiques et que l'on peut présenter de la manière suivante : le but des démonstrations mathématiques est, semble-t-il, de borner le rôle de l'intuition à l'appréciation de la correction des postulats ; or, elles n'atteignent pas ce but. En effet, c'est par l'intuition que l'on est obligé de juger si, au sens du § 10, une proposition fait partie de celles qui, au point considéré de la théorie, forment l'ensemble des propositions reconnues vraies précédemment ; en outre, quand on forme un chaînon logique, c'est par l'intuition que l'on reconnaît les indéterminées qui peuvent figurer dans la proposition conditionnelle que l'on emploie et c'est encore par l'intuition que l'on apprécie le résultat d'une substitution effectuée sur les indéterminées. A la vérité, étant donné la démonstration d'un théorème, on peut la compléter en démontrant la justesse des jugements intuitifs qui s'y rencontrent sans figurer sur la liste des postulats, mais, alors, on introduira de nouveaux chaînons logiques avec leur cortège de nouveaux jugements intuitifs. En résumé, toute théorie mathématique, si détaillées que soient les démonstrations, contiendra des jugements intuitifs, *non prévus sur la liste des prémisses*.

Il est certainement impossible de nier la réalité de ce fait, toutefois nous verrons au § 25, après avoir pris connaissance d'une remarquable propriété des théories mathématiques, que, dans chacune d'elles, il existe un ensemble de choses que l'on peut indiquer avec sûreté et qui est tel que tout jugement intuitif relatif à l'une quelconque de ces choses est, s'il se présente dans la théorie, explicitement énoncé dans les postulats. D'ailleurs il importe de noter le fait capital suivant : en étudiant les théories mathématiques, on constate, *a posteriori*, que les démonstrations mathématiques complètes (§ 19) ne laissent subsister aucun doute dans l'esprit.

§ 21. — Dans la pratique, on ne développe presque jamais complètement les démonstrations dans les théories mathématiques à cause de leur grande longueur. Cette façon de procéder est légitime quand on donne des indications suffisantes pour que le lecteur puisse, sans trop de peine, combler lui-même toutes les lacunes.

Malheureusement, il arrive trop souvent que les abréviations sont poussées beaucoup plus loin et cela donne lieu, non seulement à de grandes difficultés pour le lecteur, mais encore à de graves erreurs, car le souci de la brièveté empêche l'auteur, plus souvent qu'on ne le croit, de s'apercevoir que lui-même ne saurait pas rétablir les chaînons manquant, et c'est ainsi que des propositions fausses sont quelquefois présentées comme des théorèmes démontrés.

VI. — Compatibilité et indépendance d'un système de postulats. Termes techniques et termes courants. Postulats spécifiques d'une théorie.

§ 22. — Il est évident que, pour la correction d'une théorie mathématique (et plus généralement, de n'importe quelle théorie déductive), il est nécessaire que les postulats de celle-ci soient *compatibles;* en d'autres termes, la condition suivante doit être remplie :

I. *Lorsqu'une proposition* (P) *est la négation d'un postulat de la théorie, elle ne doit pas être une conséquence des autres postulats de la théorie considérée.*

En dehors de cette condition, il en est une autre qui, sans être comme la précédente, une condition de validité de la théorie, en est certainement une condition de perfection : les postulats de la théorie doivent être *indépendants ;* en d'autres termes :

II. *Aucun postulat de la théorie ne doit être une conséquence des autres postulats de celle-ci.*

La question de savoir si un système donné de postulats vérifie l'une quelconque des deux conditions qui viennent d'être énoncées se ramène évidemment à la suivante :

III. *Une proposition donnée* (P) *est-elle une conséquence d'un système donné* (S) *d'autres propositions ?*

On pourrait être tenté de regarder cette question comme équivalente à la suivante :

IV. *Le système de propositions* (S) *constitue-t-il un ensemble suffisant de prémisses pour démontrer, d'après les principes exposés aux chapitres III et IV, la proposition* (P) ?