SUR UNE PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS DÉRIVÉES

PAR

M. Arnaud Denjoy (Montpellier).

Je veux montrer dans cette Note que *si* $\varphi(x)$ *est la dérivée d'une fonction continue, quels que soient les nombres* A *et* B, *l'ensemble* $A < \varphi(x) < B$, *s'il existe, possède une mesure positive* (ou encore : est épais). Plus généralement, j'établirai l'exactitude de la même proposition pour toute fonction $\varphi(x)$ finie, coïncidant en tout point x avec un nombre dérivé médian ou extrême, bilatéral ou unilatéral *pour un côté invariable,* déduit d'une fonction continue $f(x)$, pourvu que $\varphi(x)$ possède les deux propriétés suivantes, appartenant comme on sait à toute fonction dérivée :

Propriété α). $\varphi(x)$ *prend entre* a *et* b *toutes les valeurs comprises entre* $\varphi(a)$ *et* $\varphi(b)$.

Propriété β). $\varphi(x)$ est limite de fonctions continues. On sait, d'après un théorème fondamental de M. Baire, que $\varphi(x)$ est alors ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait. Donc, si $\lambda < \mu$, les deux ensembles $\varphi < \lambda$, $\varphi > \mu$ ne peuvent pas être partout denses sur un même ensemble parfait. Pour la même raison, les points de P au voisinage desquels φ n'est pas borné sur P, cet ensemble est non dense sur P.

Je rappelle encore que, si $\varphi(x)$ est inférieure (supérieure) à un nombre fixe l, la variation relative de f (primitive de φ)

entre deux points quelconques de l'intervalle ab est inférieure (supérieure) à l [1].

Ceci étant admis, supposons l'existence de l'ensemble E ainsi défini $A < \varphi < B$. D'après la propriété (α), tout point de E est limite de E des deux côtés. Donc, E a pour dérivé un ensemble parfait P, et E partout dense sur P, est constitué uniquement par des points de seconde espèce de P. *Je dis que* E *est épais* (propriété que nous désignerons par γ).

Supposons que E soit mince. Soient A' et B' deux nombres satisfaisant aux conditions $A < A' < B' < B$. Soit E' l'ensemble $A' < \varphi < B'$. Si E est mince, E' est mince *a fortiori*. Soit P' le dérivé parfait de E'. P' n'est pas épais en lui-même, sinon, le complémentaire de E, savoir l'ensemble où l'on a soit $\varphi \leqq A$, soit $\varphi \geqq B$, serait partout dense sur P', puisque E est mince. L'ensemble E' étant partout dense sur P', en tout point de P', φ présenterait une discontinuité au moins égale au plus petit des deux nombres $A' - A$ et $B - B'$, ce qui est impossible (prop. β). Donc, P' possède une portion [2] mince P_1. D'ailleurs P_1 contient une portion ϖ sur laquelle φ est borné (prop. β). Soient c et d les extrémités de ϖ. Tout point du segment cd étranger à ϖ est étranger à E'. Donc, d'après la propriété (α), en tous les points d'un même contigu à ϖ, on a simultanément soit

---

[1] Je rappelle les définitions suivantes de termes qualifiant des ensembles : *épais* = possédant une mesure positive, *mince* = de mesure nulle, *épais en lui-même* = épais dans tout intervalle contenant au moins un point de l'ensemble. Une *pleine épaisseur de* P est un ensemble contenu dans P et ayant même mesure que P. Je distingue l'*intervalle ab* ($a < x < b$) et le *segment ab* ($a \leqq x \leqq b$). Enfin, je nomme *variation relative* de f entre x et x', le quotient $\dfrac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \mathrm{VR}\,(f, x, x')$.

Un *nombre dérivé droit* (gauche) de f en x est l'une quelconque des valeurs limites possibles de $\mathrm{VR}\,(f, x, x')$ quand x' tend vers x par une suite de valeurs décroissantes (croissantes). La plus grande et la plus petite de ces limites sont les dérivés *extrêmes* droits (gauches) l'un *supérieur*, l'autre *inférieur*. Les dérivés *médians* droits (gauches) sont les valeurs intermédiaires aux dérivés extrêmes droits (gauches). Un dérivé (médian ou extrême) est *bilatéral* ou *unilatéral* selon qu'il est à la fois droit et gauche, ou seulement l'un des deux.

Le lecteur trouvera des développements étendus sur des questions connexes à l'objet de cette note dans mes articles du *Journal de Mathématiques* pures et appliquées (1915, fasc. 2), du *Bulletin de la Soc. Math.* (1915, fasc. 3 et 4), des *Annales de l'Ecole normale* (à paraître vraisemblablement en 1916), et dans mes notes aux *Comptes Rendus* des 31 mai, 14 juin et 9 août 1915, 13 mars et 5 juin 1916.

[2] Une *portion* d'un ensemble parfait P est un ensemble parfait ϖ contenu dans P et renfermant tous les points de P compris entre les extrémités de ϖ. Une portion de ϖ est encore une portion de P.

$\varphi \leqq A'$, soit $\varphi \geqq B'$. Soient u' les contigus où est vérifiée la première relation, v' les autres. Aux extrémités d'un contigu u', on a nécessairement, d'après la propriété (α), $\varphi \leqq A'$ et de même $\varphi \geqq B'$ aux extrémités d'un contigu v'. Donc (propriété β), les extrémités des u' et celles des v' ne peuvent pas être simultanément partout denses sur une même portion de ϖ. Donc, il existe une portion ϖ_1 de ϖ dont tous les contigus sont soit des u', soit des v'. Plaçons-nous dans le premier cas. Dans les contigus de ϖ_1, la variation relative de f entre deux points quelconques est au plus A' (φ étant un nombre dérivé de f pour un côté invariable). φ étant borné sur ϖ_1, d'après le Second Théorème des nombres dérivés [1], la variation relative de f entre deux points quelconques du segment cd sera au plus A'. Donc, en aucun point de ϖ_1 il ne pourra exister de nombre dérivé supérieur à A'. Donc, l'ensemble E' n'a aucun point sur ϖ_1, contrairement à l'hypothèse que E' est partout dense sur P' dont ϖ_1 est une portion. Nous aboutissons à une impossibilité. Donc, l'ensemble E est épais [2].

Etudions maintenant les classes de nombres dérivés $\varphi(x)$ possédant les propriétés (α) et (β).

La propriété (α) *appartient à toute fonction* $\varphi(x)$ *finie ou non, qui est en tout point un nombre dérivé bilatéral extrême ou médian d'une fonction continue* [3].

---

[1] *Journal de Math. pures et appl.*, 1915, fasc. 2, p. 192. Divers lemmes énoncés par M. Lebesgue (Leçons sur l'Intégration, p. 63 ; voir également Pal, *Rendiconti del Circ. di Palermo*, 1912, t. 33, p. 352) ou par M. et Mme Young (*Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. 9, 1910, p. 329), suffisent d'ailleurs à l'application ci-dessus.

[2] Si $\varphi(x)$ n'est pas un nombre dérivé de f relativement à un côté invariable, les deux hypothèses (α) et (β) ne suffisent pas à entraîner la propriété (γ). En effet, j'ai construit d'une part (*Journal de Math., loc. cit.*, no 65) une fonction continue $f_1(\xi)$ admettant en tout point au moins d'un côté (variable) le dérivé médian ou extrême zéro, et les dérivés bilatéraux $+\infty$ et $-\infty$ sur une épaisseur pleine η (ensemble complémentaire d'un ensemble mince), d'autre part (*Bull. Soc. Math.*, 1915, p. 137-148) une fonction continue $f_2(x)$ constante sur chaque contigu à un certain ensemble parfait P, variante sur toute portion de P, et admettant en tout point une dérivée finie. En tout point de η, f_1 admet tout nombre fini comme nombre dérivé bilatéral. Soit ϖ un ensemble parfait mince agrégé à η. Etablissons entre ξ et x une correspondance croissante échangeant ϖ et P. Aux points ξ et x homologues, posons $\varphi(\xi) = f'_2(x)$. Il est visible que d'une part $\varphi(\xi)$ est en tout point un dérivé au moins unilatéral de $f_1(\xi)$ et que d'autre part $\varphi(\xi)$ jouit comme f'_2 des propriétés (α) et (β). Mais $\varphi(\xi)$ ne possède évidemment pas la propriété (γ) puisqu'il admet comme f'_2 des valeurs non nulles et que l'ensemble $\varphi \neq 0$ est inclus dans ϖ et par suite est mince.

[3] On peut même voir que si A est l'un des dérivés droits de f en a, si B est l'un des dé-

Passons à l'étude de la propriété (β). Cette dernière appartient aux deux classes suivantes de nombres dérivés de fonctions continues: 1° les *dérivées approximatives* $\varphi_1(x)$; 2° *les dérivées* $\varphi_2(x)$ *valant sur une épaisseur minimum supérieure à* 1 : 2 [1].

Les définitions de ces fonctions sont les suivantes : f_1 et f_2 étant les primitives de φ_1 et de φ_2, quel que soit ε positif, les ensembles

$$|\mathrm{VR}(f_1, x_0, x) - \varphi_1(x_0)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |\mathrm{VR}(f_2, x_0, x) - \varphi_2(x_0)| < \varepsilon ,$$

ont au point x_0 respectivement, le premier l'épaisseur un, le second une épaisseur minimum supérieure à 1 : 2.

Nous allons plus généralement établir la validité de la propriété (β) pour la classe suivante de nombres dérivés.

Supposons $\varphi_3(x)$ tel que les ensembles

$$\mathrm{VR}(f, x_0, x) < \varphi_3(x_0) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \mathrm{VR}(f, x_0, x) > \varphi_3(x_0) - \varepsilon$$

aient en x_0 l'un et l'autre une *épaisseur inférieure droite plus grande que* 1 : 2, quel que soit ε (ou même simplement, sup-

---

rivés gauches de f en b ($a < b$), $\varphi(x)$ prend entre a et b toute valeur comprise entre A et B. Plus généralement, sans supposer l'existence d'un dérivé bilatéral en tout point, si C est entre A et B, il existera toujours entre a et b un point c où le dérivé inférieur pour un côté vaut au moins C, le dérivé supérieur de f pour l'autre côté valant au plus C. La représentation géométrique des fonctions rend immédiatement compte de ces circonstances. On peut grâce à cette dernière remarque abréger la démonstration que toute fonction $\theta(x)$ à continuité prépondérante (voir plus loin) possède la propriété (α). Car, si par exemple $\theta(a) < \theta(b)$, et si C est compris entre ces deux nombres, si θ ne prenait pas la valeur C entre a et b, l'ensemble $\theta(x) > \mathrm{C}$ aurait en tout point soit une épaisseur maximum inférieure à 1 : 2, soit une épaisseur minimum supérieure à 1 : 2, le premier cas étant vérifié en a, le second en b, ce qui mettrait en défaut le résultat énoncé à l'instant et appliqué à la mesure $m(x)$ de cet ensemble entre a et x.

On trouvera au *Bull. de la Soc. Math.* (1915, p. 184 en note) une démonstration de cette propriété des fonctions $\theta(x)$, plus compliquée. mais utilisable pour toute fonction de classe 1 continue en chaque point bilatéralement sur un ensemble convenablement choisi (voir ci-après, p. 237).

[1] J'appelle *épaisseur* (si elle existe), *épaisseur supérieure* (inférieure) *droite* ou *gauche* de l'ensemble E en x, la dérivée (si elle existe), le nombre dérivé supérieur (inférieur) droit ou gauche de $m(x)$ en x, $m(x)$ étant la mesure de E entre un point fixe a et x, affectée du signe + ou du signe — selon que x surpasse a ou lui est inférieur. J'appelle *épaisseur maximum* (minimum) en un point, la plus grande (plus petite) des deux épaisseurs supérieures (inférieures) droite et gauche en un même point. L'épaisseur de E sur un intervalle i est par définition la variation relative de $m(x)$ entre les extrémités de i.

posons que ces ensembles aient, dans tout intervalle suffisamment petit contenant x_0, une épaisseur supérieure à 1 : 2). Observons que, moyennant notre hypothèse, l'ensemble $|\mathrm{VR}(f, x_0, x) - \varphi_3(x_0)| < \varepsilon$ aura en x_0 une épaisseur inférieure droite positive (sera épais dans notre seconde définition). Donc $\varphi_3(x_0)$ sera un dérivé droit de f. Nous dirons que $\varphi_3(x_0)$ est en x_0 un *dérivé prépondérant droit de f*. Mais nous ne supposons pas que $\varphi_3(x_0)$ soit en x_0 la dérivée de f sur une épaisseur inférieure droite plus grande que 1 : 2, ce qui exigerait au moins que l'ensemble commun aux deux premiers et non point simplement chacun d'eux eût son épaisseur inférieure droite plus grande que 1 : 2. Nous ne supposons pas davantage que $\varphi_3(x)$ est un nombre dérivé bilatéral [1].

Je dis que $\varphi_3(x)$ *est limite de fonctions continues* (propriété β). Nous allons simplement montrer que les deux ensembles $\varphi < \lambda$ et $\varphi > \mu$, ne peuvent, si $\lambda < \mu$, être simultanément partout denses sur un même ensemble parfait P et pour cela que l'un et l'autre contiennent des résiduels de tout ensemble parfait où ils sont partout denses [2].

---

[1] Si $\psi(x_0)$ est la dérivée de f en x_0 sur une épaisseur droite plus grande que 1 : 2, $\psi(x_0)$ vérifie *a fortiori* les conditions imposées à $\varphi_3(x_0)$. L'hypothèse faite sur $\psi(x_0)$ signifie qu'il existe un ensemble E d'épaisseur droite définie et valant $\alpha > 1 : 2$, spécialement auquel f a pour dérivée droite $\psi(x_0)$ en x_0. Si x tend vers x_0 sans quitter E, $\mathrm{VR}(f, x_0, x)$ tend vers $\psi(x_0)$. Mais, si $\alpha = 1 : 2$, en général $\psi(x)$ ne remplit pas les conditions de $\varphi_3(x_0)$. Ce qui le rend visible, c'est qu'une fonction f peut avoir deux dérivées distinctes $\psi(x_0)$ pour un même côté en un même point x_0, valables l'une et l'autre sur l'épaisseur exacte 1 : 2, tandis que les conditions posées pour $\varphi_3(x_0)$ ne peuvent être vérifiées par deux nombres différents. D'ailleurs, si $\varphi_3(x)$ existe en tout point, f est une fonction résoluble (voir C. R., 13 mars 1916, et *Ann. de l'Ec. Norm.*, article à paraître). $\varphi_3(x_0)$ est totalisable (au sens adopté dans ces deux exposés) et détermine f, à une constante additive près. Au contraire une fonction peut, sans être résoluble, avoir en tout point une dérivée bilatérale sur une épaisseur supérieure *ou égale* à 1 : 2.

[2] J'entends par *résiduel* de P, un ensemble R agrégé à P et dont le complémentaire C relativement à P est la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses sur P (un ensemble de l'espèce C est appelé par M. Baire *ensemble de première catégorie* sur P ; j'ai proposé de le qualifier d'ensemble *gerbé* sur P). Les propriétés essentielles des résiduels sont les suivantes : 1° un résiduel de P est partout dense sur P ; 2° deux résiduels ou une infinité dénombrable de résiduels de P ont en commun un résiduel de P ; 3° tout résiduel de P contient un ensemble parfait.

La considération des résiduels est le plus souvent amenée par l'application du théorème suivant :

Si les ω_n sont une famille d'intervalles dont chacun contient un point c_n d'un ensemble parfait P, si les c_n sont partout denses sur P, l'ensemble des points de P intérieurs à une infinité d'intervalles ω_n est un résiduel de P. Car l'ensemble C complémentaire de ce der-

Considérons l'ensemble $\varphi_3(x) < \lambda$ et supposons-le dense sur P. Nous pouvons en extraire une suite dénombrable de points x_n partout denses sur P. Soit $\varphi_3(x_n) = \lambda - 2\alpha_n$. α_n est positif. Il existe un intervalle $x_n x'_n$ où l'ensemble $\mathrm{VR}(f, x_n, x) < \lambda - \alpha_n$ a une épaisseur supérieure à $1:2$. Soit $1:2 + 2\eta_n (\eta_n > 0)$ cette épaisseur. Si nous supprimons dans l'intervalle $x_n x'_n$ un intervalle $x_n \xi_n$ de longueur inférieure à $(x'_n - x_n)\eta_n$, l'ensemble précédent H_n a sur l'intervalle restant $\xi_n x'_n$ une mesure totale supérieure à $(1:2 + \eta_n)(x'_n - x_n)$. A cause de la continuité de $\mathrm{VR}(f, x', x)$ relativement à x et x' en tout système (x', x) de nombres x, x' différents, il est possible d'entourer x_n d'un intervalle ω_n, tel que, quel que soit x situé à la fois sur H_n et sur $\xi_n x'_n$, et quel que soit x' dans ω_n on ait $\mathrm{VR}(f, x', x) < \lambda$ [1]. De plus on peut toujours réduire la longueur de ω_n à être inférieure à $1:n$ et à $\eta_n(x'_n - \xi_n)$.

Donc, l'ensemble des x définis par cette dernière relation possède sur $x' x'_n$ une épaisseur au moins égale à $1:2$, quel que soit x' dans ω_n. Les x_n étant partout denses sur P, et x_n situé sur P étant intérieur à ω_n, les points de P intérieurs à une infinité de ω_n forment (voir la note 2 de la page précédente) un résiduel R de P. Soit ξ un point de R. L'ensemble $\mathrm{VR}(f, \xi, x) < \lambda$ possède en ξ une épaisseur supérieure droite au moins égale à $1:2$. Il est donc impossible que $\varphi_3(\xi)$ surpasse λ, puisque si $2\delta = \varphi_3(\xi) - \lambda$ était positif, l'ensemble $\mathrm{VR}(f, x, \xi) > \varphi_3(\xi) - \delta$ ayant une épaisseur inférieure droite

---

nier est formé par la réunion des ensembles C_p, C_p étant l'agrégat des points de P étrangers à tous les intervalles $\omega_p, \omega_{p+1}, \ldots$, C_p est évidemment non dense sur P.

C'est de cette propriété que se déduit en particulier une proposition que j'appelle Premier Théorème des nombres dérivés (voir *Journal de Math. pures et appl.*, 1915, 2, p. 149).

[1] Il est même visible d'après la relation

$$\frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n}\left[1 + \frac{x' - x_n}{x - x'}\right] + \frac{f(x_n - f(x')}{x - x'} \,,$$

que l'inégalité $\frac{f(x) - f(x')}{x - x'} < \lambda$ sera vérifiée *en tous les points* x' *de* P situés dans un intervalle ω_n contenant x_n (ω_n ne dépendant pas de x), quel que soit x supérieur à ξ_n et vérifiant $\mathrm{VR}(f, x_n, x) < \lambda - \alpha_n$, pourvu seulement que f soit continue sur P en x_n. On déduirait de là des extensions des résultats précédents aux fonctions mesurables discontinues quelconques, à rapprocher de ceux de Mme Grace Chisholm Young, C. R., 14 mars 1916).

plus grande que 1 : 2, l'épaisseur supérieure droite de l'ensemble complémentaire $\mathrm{VR}(f, x, \xi) \leqq \varphi(\xi) - \delta$ serait inférieure à 1 : 2, ce qui est impossible si l'ensemble $\mathrm{VR} < \lambda$ contenu dans ce dernier a une épaisseur supérieure droite au moins égale à 1 : 2 (avec la seconde définition plus large du dérivé prépondérant, un raisonnement analogue et évident établit la même impossibilité).

Donc, sur un résiduel de P on a $\varphi_3(x) \leqq \lambda$, dès que l'ensemble $\varphi_3(x) < \lambda$ est partout dense sur P. De même, si l'ensemble $\varphi_3(x) > \mu$ est partout dense sur P', l'ensemble $\varphi_3 \geqq \mu$ est un résiduel de P'. Il est donc impossible, si $\lambda < \mu$, que les deux ensembles $\varphi < \lambda$ et $\varphi > \mu$ soient l'un et l'autre partout denses sur un même ensemble parfait. Donc [1], la fonction φ_3 est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait. Elle est limite de fonctions continues (propriété β). C. q. f. d.

Il résulte *a fortiori* du raisonnement précédent que si $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ sont unilatéralement (pour un côté invariable) des dérivées *approximative* ou simplement *valable sur une épaisseur unilatérale plus grande que* 1 : 2, $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ sont limites de fonctions continues (propriété β).

Montrons encore que *la propriété β appartient à une fonction φ_4 qui est en tout point un nombre dérivé bilatéral unique d'une fonction continue* f.

Je dis que les deux ensembles $\varphi_4 < \lambda$, $\varphi_4 > \mu$ ne peuvent pas être simultanément partout denses sur un même ensemble parfait P. Car, si le premier l'est, les deux dérivés inférieurs gauche et droit de f sont sur un résiduel de P au plus égaux à λ. (*Journal de Math.*, p. 154, n° 32). De même, si l'ensemble $\varphi_4 > \mu$ est partout dense sur P, les deux dérivés supérieurs de f sont au moins égaux à μ sur un résiduel de P. Deux résiduels d'un même ensemble parfait P ont en commun un résiduel de P. Donc, sur un résiduel de P, tous les nombres compris entre λ et μ, seraient des dérivés bilatéraux de f,

[1] Ce point du raisonnement est développé à la page 182 de mon article du *Bull. de la Soc. Math.*

ce qui est contraire à notre hypothèse. On en déduit que φ_4 est ponctuellement discontinu sur tout ensemble parfait[1].

$\varphi_3(x)$ ne possède pas en général la propriété (α), comme le montre l'exemple d'une fonction représentée par une ligne brisée de deux côtés. Une telle fonction admet en chaque point et de chaque côté une dérivée exacte, laquelle ne prend que deux valeurs distinctes. Mais si $\varphi_3(x)$ remplissant en tout point et pour un côté invariable sa condition caractéristique, si $\varphi_3(x)$ est en outre pour l'autre côté un nombre dérivé médian ou extrême de la même fonction continue f, alors $\varphi_3(x)$ est un nombre dérivé bilatéral f et possède la propriété (α).

Toute fonction $\varphi(x)$ qui est relativement à une fonction continue f soit un nombre dérivé bilatéral unique, soit un dérivé bilatéral prépondérant d'un côté invariable (et *a fortiori*, si φ est de ce même côté une dérivée approximative ou seulement valable sur une épaisseur plus grande que 1 : 2), $\varphi(x)$ possède les propriétés (α) et (β). Donc $\varphi(x)$ possède la propriété (γ).

Je rappelle que les propriétés (α) (β) (γ) appartiennent à toute fonction approximativement continue ou même seulement à continuité prépondérante. Ces deux sortes de fonctions sont telles par définition que pour toute valeur de α, les ensembles $f(x) < \alpha$ et $f(x) > \alpha$ ont en chacun de leurs points une épaisseur égale à un pour la première, une épaisseur minimum supérieure à 1 : 2 pour la seconde. (On peut envisager de tels caractères présentés unilatéralement seulement.)

Enfin, j'ai montré (*Bull. Soc. Math.*, 1915, p. 184 en note; cf. aussi la note de la page précédente) que toute fonction limite de fonctions continues (ou de classe 1, au sens de M. Baire) et telle que les ensembles $f > \alpha$ et $f < \alpha$ ne possèdent que des points de seconde espèce (c'est-à-dire : admettent chacun de leurs points pour point limite bilatéral), ces fonctions douées par hypothèse de la propriété (β) pos-

[1] φ_4 coïncide en tout point avec l'un des quatre dérivés extrêmes de f. φ_4 est totalisable. (Voir C. R., 5 juin 1916.)

sèdent également la propriété (α). La définition de cette catégorie de fonctions étant purement descriptive, il est évident qu'en général elles ne vérifient pas la propriété (γ). En effet, le caractère de ces fonctions ne change pas dans une transformation continue croissante quelconque de x, tandis que les ensembles ne conservent pas obligatoirement dans cette opération le caractère d'être épais ou minces [1].

EXTENSION A L'ESPACE D'UN THÉORÈME SUR LES CUBIQUES PLANES

PAR

F. GONSETH (Zurich).

---

1. — Je me propose de démontrer, dans ce qui suit, trois propriétés qu'on peut considérer comme une extension, à l'espace, d'un théorème bien connu sur les cubiques planes, à savoir :

Par un point M *d'une cubique plane* C_3 *passent* 4 *droites qui touchent* C_3 *aux points* A, B, C, D *différents de* M. *Si l'on mène de* M *les tangentes à toutes les coniques passant par* A, B, C, D, *tous les points de contact sont sur* C_3. (C_3 est supposée sans point double.)

[1] C'est afin d'éviter toute confusion des deux points de vue descriptif et métrique dans la théorie des ensembles et des fonctions (voir C. R., 31 mai 1915 et *Journ. de Math.*, 1915, 2, p. 125, nº 16), que j'ai proposé de désigner par « épaisseur » le nombre appelé antérieurement par M. Lebesgue « densité » d'un ensemble. La propriété d'être dense ou non dense est pour un ensemble l'une des principales, du point de vue descriptif. Les caractères, encore inconnus à l'heure actuelle, des classes de fonctions selon M. Baire, ne font certainement intervenir en aucune façon l'idée de mesure, puisqu'ils doivent demeurer invariables pour toute transformation continue et croissante effectuée sur la variable indépendante (condition des propriétés descriptives ; or, une telle transformation peut changer en un ensemble mince le complémentaire d'un ensemble mince). Pour cette même raison, il est à peu près évident que ces caractères, manifestés par certains ensembles tels que ceux-ci : $\alpha < f$, $\alpha > f$, sont fournis par des combinaisons plus ou moins complexes des notions de point limite, d'ensemble fermé, d'ensembles denses ou non denses les uns sur les autres. Aussi me paraît-il utile, pour éviter des équivoques et des intuitions erronées, d'établir une séparation la plus nette possible entre les deux ordres d'idées, et en particulier de s'interdire rigoureusement toute communauté de dénominations entre eux. C'est pourquoi il me semble préférable de laisser le substantif « densité » à l'ordre descriptif exclusivement.