Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1916)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ESQUISSE D'UNE INTRODUCTION A LA THÉORIE DES PROBABILITÉS

Autor: Guillaume, Edouard

Kapitel: V. — Deuxième mode d'emploi du hasard pour l'étude DES PHÉNOMÈNES : EMPLOI DU HASARD SUBJECTIF.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16881

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ment que toute probabilité devait être égale à $^1/_2$, car, disait-il, pour tout événement il n'y a que deux alternatives possibles : il arrive ou n'arrive pas. On peut donner une interprétation de la pensée de d'Alembert en se plaçant au point de vue suivant : il s'agit d'une probabilité subjective et l'ignorance de l'observateur est totale. Si l'on imagine, en effet, un grand nombre d'observateurs indépendants qui engagent des paris sur l'arrivée ou la non-arrivée d'un certain événement, la moitié d'entre eux à peu près pariera pour l'arrivée et l'autre moitié pour la non-arrivée.

V. — Deuxième mode d'emploi du hasard pour l'étude des phénomènes : Emploi du hasard subjectif.

32. — La probabilité subjective va nous fournir une autre manière d'utiliser le hasard, manière plus raffinée et moins immédiate que la première, quoique plus générale et mieux dans la nature des choses. Comme nous le verrons, cette méthode met bien en évidence nos rapports avec le monde extérieur ; elle fournit un instrument précieux non seulement au physicien, mais encore au mathématicien, comme en témoignent les travaux de Poincaré, Borel, etc. C'est elle qui permet d'allier le hasard à la rigueur mathématique, non pas en supposant que le hasard puisse être dans nos créations mathématiques, mais en traitant ces créations comme des objets extérieurs qui nous seraient partiellement étrangers.

33. — Envisageons un système dont l'état est défini à chaque instant par n paramètres :

$$x_1 , \quad x_2 , \ldots , \quad x_n ,$$

et supposons que les lois qui nous font connaître les variations de ces paramètres s'expriment par les équations différentielles :

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathrm{X}_i , \qquad (i = 1 , 2 , \ldots , n)$$

où les X sont des fonctions des x et du temps t. Les équations précédentes n'expriment pas autre chose qu'un certain déterminisme : étant donné l'état du système au temps t, l'état de ce système au temps $t + dt$ est complètement déterminé.

Il est commode de représenter l'état du système, à l'instant t, par un point figuratif de l'hyperespace à n dimensions, dont les coordonnées sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$. L'ensemble des états que traverse le système au cours du temps forme une certaine trajectoire dans l'hyperespace ; cette trajectoire est parcourue par le point figuratif avec l'hypervitesse représentée par les équations ci-dessus.

Nous pouvons dire que nous connaissons la *constitution* de notre système. Si nous connaissions, en outre, les conditions initiales, — en supposant toutefois que l'on sache intégrer, — nous pourrions prédire l'état dans lequel sera le système à un instant quelconque.

Par un pareil système, nous pourrons entendre, par exemple, un système mécanique formé d'un certain nombre de points matériels en mouvement les uns par rapport aux autres. Il pourra alors nous importer de savoir quelle chance nous avons de rencontrer le système voisin de tel état (configuration) plutôt que de tel autre.

Nous sommes ainsi amenés à poser un nouveau problème de hasard que l'on pourrait formuler de la façon suivante :

Lorsqu'un observateur est tout à coup en présence d'un système de constitution donnée, quelle est la probabilité subjective pour que cet observateur trouve le système voisin de tel état déterminé ?

Si les conditions initiales étaient connues, l'observateur pourrait prévoir exactement comment le système évolue. On peut donc encore énoncer le problème précédent en disant :

« Lorsqu'un observateur rencontre un système de constitution donnée, quelle est la probabilité subjective pour que cet observateur se trouve en présence d'un système ayant eu telles conditions initiales ? »

34. — On voit maintenant clairement la différence entre la méthode objective et la méthode subjective.

Dans la première, il faut nécessairement que le phénomène étudié offre une complication suffisante ; dans la seconde cette condition n'est pas nécessaire.

Dans la première, on cherche, au moyen du hasard objectif parfait, à établir une image de la constitution même du système, à trouver les états par lesquels il pourrait passer et à indiquer leurs successions possibles, non continues : on met le hasard dans le système. Dans la seconde, il n'y a aucun hasard dans le système ; sa constitution, au sens indiqué plus haut, est parfaitement connue, c'est-à-dire est donnée par des lois connues qui nous indiquent déjà tous les états possibles et leurs lois de succession. Le fortuit provient de l'impuissance de l'observateur à prévoir dans lequel de ces états se trouvera le système à l'instant de l'observation, ou, ce ce qui revient au même, dans lequel de ces états était le système à l'origine du temps. Le hasard est dans l'observateur qui, ignorant les conditions initiales, est lié au système par une loi trop compliquée pour pouvoir faire des prévisions sur ces conditions.

35. — Les considérations ci-dessus trouvent une de leurs plus belles applications dans l'œuvre de J.-W. Gibbs. Dans sa Mécanique statistique, Gibbs « répète » un nombre énorme de fois un même système mécanique, de façon à former un *ensemble* de systèmes obéissant aux mêmes équations différentielles, mais qui, à l'instant $t = 0$, sont tous dans des conditions initiales différant d'un individu à l'autre.

Il est alors commode de supposer l'hyperespace représentatif peuplé de points figuratifs en mouvement sur des trajectoires correspondant chacune à un système de conditions initiales déterminées. Une petite région de l'hyperespace représente une série d'états voisins.

La question de probabilité énoncée plus haut revient alors à celle-ci :

« Lorsqu'un observateur rencontre un système de constitution donnée, quelle est la probabilité subjective pour que le point figuratif de ce système soit dans telle région de l'hyperespace ? »

Cet énoncé spécial de la question du n° 32 résume la méthode de Gibbs. L'analogie avec le schéma des cartes du § III saute aux yeux : chaque groupe de h cases représente un état, et une carte représente un système. La probabilité subjective qui répond à la question est alors :

$$\lim_{\substack{h=\infty \\ k=\infty}} \frac{h}{k} = \text{const.}$$

Il est essentiel de remarquer que la trajectoire du système considéré pourrait ne pas traverser ladite région, de sorte que le point figuratif ne s'y trouverait jamais.

Parmi les systèmes intéressants, il convient de citer ceux qui, grâce à leur constitution, évoluent, en général, dans des états qui diffèrent très peu d'un certain état moyen, autrement dit, qui se comportent généralement à peu près comme un certain *type moyen,* de sorte que la probabilité subjective pour qu'un tel système diffère peu du type moyen lorsque l'observateur le rencontre, ou encore à l'époque que celui-ci a choisie pour origine du temps, est très voisine de l'unité. Les autres états seront dits exceptionnels.

Ce sera le cas, par exemple, si le système est très compliqué, c'est-à-dire présente un nombre énorme de libertés, tels les corps ordinaires dans la théorie moléculaire. Dans ce cas, la probabilité subjective conduit à des résultats ayant certains points communs avec ceux fournis par la probabilité objective (Cf. n° 23).

36. — On peut encore répondre à la question fondamentale du n° 34 d'un point de vue un peu différent, préconisé surtout par Einstein.

Considérons un système unique et sa représentation par un point figuratif en mouvement sur la trajectoire de l'hyperespace. Fixons une certaine région de cet espace et supposons-la traversée un grand nombre de fois par la trajectoire. Suivons le point sur celle-ci d'une époque t_0 à une époque $t_0 + \Theta$, Θ étant une très longue durée. A une certaine époque t_1 le point pénétrera dans la région pour en sortir à l'époque $t_1 + \theta_1$; il y rentrera à l'époque t_2 et en ressortira à l'époque $t_2 + \theta_2$, etc. Posons :

$$\theta_1 + \theta_2 + \dots = \theta ,$$

et fixons un instant t compris entre t_0 et $t_0 + \Theta$.

La réponse à la question posée pourra alors se formuler ainsi :

Lorsqu'un observateur rencontre, à l'instant t, un système de constitution donnée, mais dont les conditions initiales lui sont inconnues, la probabilité subjective pour que le point représentatif de ce système soit, à l'instant t, dans la région choisie de l'hyperespace, est égale à $\frac{\theta}{\Theta}$. Cette définition ne pourra avoir de sens que si ce rapport peut être considéré comme indépendant de t_0 et de Θ, pourvu que Θ soit très grand ; autrement dit, on doit avoir :

$$\lim_{\Theta=\infty} \frac{\theta}{\Theta} = \text{const.} \; .$$

37. — Pour établir le lien entre cette probabilité et la loi des écarts, on peut procéder comme suit : on tracera un axe des temps sur lequel on marquera les points :

$$t_0 , \quad t_1 , \quad t_1 + \theta_1 , \quad t_2 + \theta_2 , \dots , \quad t_0 + \Theta .$$

On demandera à un grand nombre d'observateurs indépendants de nous fixer un instant t. On verra alors que les instants choisis tomberont à peu près θ fois sur Θ dans l'un des segments $\theta_1, \theta_2, \dots$, c'est-à-dire dans un segment de longueur totale θ intérieur à un segment de longueur Θ.

Il est évident que nous aurions pu procéder autrement et considérer l'instant t comme fixé une fois pour toutes ; c'est alors la région traversée que les observateurs auraient eu à choisir.

38. — Si le mouvement du système est périodique, la définition du n° 35 est évidente. On a alors :

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta' .$$

et si l'on appelle T la période, on a :

$$\lim_{\Theta=\infty} \frac{\theta}{\Theta} = \frac{\theta'}{T} .$$

Ce ne sera en général pas le cas ; mais Poincaré a démontré que les mouvements des systèmes mécaniques sont quasi périodiques, de sorte qu'on aura, pour de semblables systèmes, en désignant par $\bar{\theta}$ et $\overline{\mathrm{T}}$ des valeurs moyennes :

$$\lim_{\Theta=\infty} \frac{\theta}{\Theta} = \frac{\bar{\theta}}{\overline{\mathrm{T}}} .$$

Enfin remarquons que pour cette probabilité subjective, il faut nécessairement que la région envisagée de l'hyperespace soit traversée par la trajectoire.

39. — On comprendra maintenant aisément le sens d'une question comme celle-ci : quelle est la probabilité subjective pour qu'il y ait pleine lune aujourd'hui, 15 juillet 1916 ? Le mouvement est quasi périodique. C'est, répondra-t-on, un peu moins de $\frac{1}{27}$. Le hasard est dans le choix de l'époque. Si nous imaginons un grand nombre d'observateurs indépendants les uns des autres, ils fixeront, chacun selon ses circonstances propres, une date qui, en général, différera d'un observateur à l'autre. En moyenne, il y aura pleine lune à peu près une fois sur vingt-sept dates choisies.

40. — On interpréterait de la même façon des questions comme celles-ci : quelle est la probabilité pour qu'il pleuve demain ? Ou encore : quelle est la probabilité pour qu'il y ait éclipse de lune le mois prochain ? citées par Bertrand comme des non-sens.

VI. — Conclusions générales.

41. — Dans le présent essai, nous avons introduit la *loi* comme notion fondamentale *primitive* et le *hasard* comme notion *dérivée*, prenant naissance lorsque la loi se complique de plus en plus ; à la limite, on obtient la loi *infiniment compliquée*, précisée par la *loi des écarts*.

42. — Une loi infiniment compliquée est formée par une suite d'événements que nous considérons comme plus ou moins *indépendants* les uns des autres. Nous avons acquis