Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1916)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ESQUISSE D'UNE INTRODUCTION A LA THÉORIE DES PROBABILITÉS

Autor: Guillaume, Edouard

Kapitel: IV. — Définition de la probabilite subjective. Le hasard dans l'observateur ou hasard subjectif.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16881

possibilité de déterminer l'état réel du système à l'instant $t + dt$, lorsque l'état à l'instant t est connu, le mode de représentation défini ci-dessus est, par nature, essentiellement *discontinu,* alors même qu'on se servirait de fonctions continues pour les calculs. L'intervalle de temps τ ne pourra jamais être un infiniment petit au sens mathématique du mot, c'est-à-dire une quantité tendant vers zéro.

22. — En calculant pour le schéma de brassage les probabilités objectives des divers états possibles, on pourra répondre à la question qui résume le problème du présent paragraphe :

« *Quelle est la probabilité pour que le phénomène physique donné se trouve dans tel état déterminé ?* »

On peut dire que le hasard est dans le phénomène : c'est un *hasard objectif.*

23. — Un cas intéressant est celui où certains états voisins sont de beaucoup les plus probables. Les autres seront dits exceptionnels. Dans ce cas, le phénomène nous apparaîtra avec une certaine uniformité : il nous semblera toujours dans un même état moyen.

Ceci a lieu pour les systèmes à un très grand nombre de degrés de liberté, un gaz parfait, par exemple.

24. — C'est à la méthode ci-dessus qu'il convient de ramener, outre la théorie cinétique ordinaire, la théorie des mouvements browniens, la théorie des quanta de Planck, etc., tous les schémas des urnes, faits en Statistique pour les mortalités, les naissances, etc., en biologie, en biométrique, etc.

IV. — Définition de la probabilité subjective. Le hasard dans l'observateur ou hasard subjectif.

25. — Nous allons introduire une nouvelle notion de probabilité, qui joue un grand rôle dans la vie pratique, où l'on a des déterminations à prendre en face d'événements qu'on ne peut prévoir entièrement.

Comme nous le verrons, cette notion occupe une place importante dans les sciences physiques et mathématiques.

26. — Commençons par une définition.

Imaginons de nouveau, alignées les unes à côté des autres, k cases numérotées de 1 à k, et, sur chacune de ces cases, une carte d'un jeu de k cartes, également numérotées de 1 à k.

Un opérateur ramassera les cartes et les reposera sur les cases dans un certain ordre. Nous obtiendrons ainsi une nouvelle distribution. L'opération sera répétée à intervalles fixes, c'est-à-dire à des temps t_0, $t_0 + \tau$, $t_0 + 2\tau$, ..., et les distributions réalisées à ces instants seront notées sur un diagramme, de façon qu'à la fin de l'expérience nous puissions nous rendre compte de la marche du phénomène. Nous supposons l'opérateur complètement libre de choisir, pour la succession des distributions, telle loi qu'il voudra ; en particulier, il pourrait maintenir les cartes toujours dans le même ordre.

Ceci posé, choisissons h cases : pour préciser, celles portant les numéros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h$, où $1 \leqq \alpha_j \leqq k$, $j = 1, 2, \ldots, h \leqq k$, et demandons-nous quelle est la probabilité pour que dans *une* des distributions, considérée isolément, par exemple celle réalisée au temps $t_0 + \tau$, la carte n° i soit sur l'une des h cases choisies.

Ne sachant rien du tout, nous ne pouvons croire favorisée aucune case en particulier. Nous dirons simplement qu'il y a k *cas possibles et* h *cas favorables,* et nous obtiendrons pour cette probabilité la valeur $\frac{h}{k}$.

C'est ce que nous appellerons la *probabilité subjective* de l'événement considéré.

Examinant ensuite le diagramme, nous constaterons qu'en général ladite carte ne se trouve pas du tout, en moyenne, à peu près h fois sur k sur l'une des cases choisies, et qu'il est impossible de satisfaire à la loi des écarts, même d'une façon grossièrement approximative. Il pourrait arriver en particulier que la loi de succession adoptée fût telle que ladite carte ne se trouvât jamais dans l'une des h cases indiquées.

Ce serait par contre le cas si, entre chaque distribution, les cartes étaient soumises à un battage parfait, ou bien si l'opérateur adoptait volontairement une loi de succession qui, continuée indéfiniment, serait infiniment compliquée.

27. — La définition ci-dessus peut s'appliquer au continu en faisant tendre h et k vers l'infini, de façon que le rapport $\frac{h}{k}$ reste fini.

On le rencontre sous cette forme dans la Mécanique statistique de Gibbs.

C'est, en général, dans les cas extrêmes, c'est-à-dire lorsque

$$\lim_{\substack{h=\infty \\ k=\infty}} \frac{h}{k} = 1 \quad \text{ou} \quad 0$$

que la probabilité subjective rend des services en Mathématique et en Physique. Citons, par exemple, la probabilité subjective pour qu'un nombre soit rationnel ; elle est infiniment petite.

28. — La question fondamentale qui se pose maintenant est celle de savoir si la probabilité subjective est d'une nature autre que la probabilité objective.

A cet effet, nous nous souviendrons que nous avons précisé la notion de hasard objectif en la ramenant à une loi infiniment compliquée, et cette loi elle-même à la *loi des écarts*. Nous devons donc nous efforcer à retrouver une loi infiniment compliquée. Pour y arriver, il suffit d'introduire un grand nombre d'événements qui puissent être considérés comme *indépendants* les uns des autres.

Dans ce but, nous formerons un *ensemble* comprenant un nombre énorme d'observateurs fictifs que nous supposerons absolument isolés les uns des autres, c'est-à-dire sans communication aucune, et ne connaissant pas les intentions de l'opérateur. Dans ces conditions, leurs décisions seront parfaitement *indépendantes*.

Cela posé, il pourra se présenter deux cas :

1° étant donné la carte n° i, les observateurs fixeront les h cases. Si, lorsque chacun d'eux aura fait son choix, on établit une statistique, on verra que ladite carte, dans la distribution considérée, se trouve bien en moyenne à peu près h fois sur k dans les cases indiquées ;

2° étant donné les h cases, les observateurs fixeront chacun une carte. En faisant une statistique comme ci-dessus, on verra alors que les cartes choisies sont à peu près h fois sur k dans une des cases données.

Ainsi, en définitive, la probabilité subjective peut conduire à une loi infiniment compliquée ; il suffit de postuler l'*indépendance* des décisions des observateurs. Celles-ci dépendront, pour chacun d'eux, des circonstances qui les entourent, et on admettra que ces circonstances varient infiniment d'un observateur à un autre.

Nous sommes de nouveau dans un cas limite. Dans la pratique, l'indépendance peut être réalisée avec une très grande approximation.

29. — Nous voyons maintenant clairement la différence qui sépare les deux probabilités : dans la probabilité objective, c'est pour le phénomène étudié qu'a lieu la loi des écarts ; dans la probabilité subjective, cette loi s'applique aux observateurs mêmes : le hasard n'est plus dans le phénomène qui peut obéir à une loi quelconque, mais dans l'observateur (sujet). Nous dirons qu'il est *subjectif*.

Ainsi, *la loi des écarts nous donne un critère simple pour distinguer les deux sortes de probabilités.*

30. — Si les cartes sur les cases sont soumises au brassage parfait, ou, plus généralement, si un système évolue suivant le hasard objectif, les probabilités objectives auront mêmes valeurs numériques que les probabilités subjectives correspondantes, celles-ci se rapportant évidemment à chaque état, considéré isolément, par lequel passe le système.

C'est cette identité des valeurs numériques qui masque la distinction que permet de faire la loi des écarts.

Il en résulte qu'à toute probabilité objective correspond une probabilité subjective de même valeur numérique. Mais l'inverse n'a pas lieu nécessairement.

31. — Nous citerons, pour terminer, un paradoxe fameux dû à d'Alembert, et qui trouve une solution satisfaisante dans la probabilité objective. D'Alembert affirmait obstiné-

ment que toute probabilité devait être égale à $^1/_2$, car, disait-il, pour tout événement il n'y a que deux alternatives possibles : il arrive ou n'arrive pas. On peut donner une interprétation de la pensée de d'Alembert en se plaçant au point de vue suivant : il s'agit d'une probabilité subjective et l'ignorance de l'observateur est totale. Si l'on imagine, en effet, un grand nombre d'observateurs indépendants qui engagent des paris sur l'arrivée ou la non-arrivée d'un certain événement, la moitié d'entre eux à peu près pariera pour l'arrivée et l'autre moitié pour la non-arrivée.

V. — Deuxième mode d'emploi du hasard pour l'étude des phénomènes : Emploi du hasard subjectif.

32. — La probabilité subjective va nous fournir une autre manière d'utiliser le hasard, manière plus raffinée et moins immédiate que la première, quoique plus générale et mieux dans la nature des choses. Comme nous le verrons, cette méthode met bien en évidence nos rapports avec le monde extérieur ; elle fournit un instrument précieux non seulement au physicien, mais encore au mathématicien, comme en témoignent les travaux de Poincaré, Borel, etc. C'est elle qui permet d'allier le hasard à la rigueur mathématique, non pas en supposant que le hasard puisse être dans nos créations mathématiques, mais en traitant ces créations comme des objets extérieurs qui nous seraient partiellement étrangers.

33. — Envisageons un système dont l'état est défini à chaque instant par n paramètres :

$$x_1 , \quad x_2 , \ldots , \quad x_n ,$$

et supposons que les lois qui nous font connaître les variations de ces paramètres s'expriment par les équations différentielles :

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathrm{X}_i , \qquad (i = 1 , 2 , \ldots , n)$$