Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1916)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ESQUISSE D'UNE INTRODUCTION A LA THÉORIE DES PROBABILITÉS
Autor: Guillaume, Edouard
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16881

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ESQUISSE D'UNE INTRODUCTION A LA THÉORIE DES PROBABILITÉS

PAR

Edouard GUILLAUME (Berne).

Les considérations qui suivent sont empruntées, partiellement, au travail intitulé La Théorie des Probabilités et la Physique, *que j'ai publié dans les* ARCHIVES DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES (Genève), *en 1914 et 1915. Je les ai réunies ici pour en former un tout qui, développé dans les détails, peut servir d'introduction à la Théorie des Probabilités.*

I. — INTRODUCTION.

LES NOTIONS DE LOI, DE HASARD SUBJECTIF ET DE HASARD OBJECTIF.

1. — Dans certaines conditions, étant donné certains événements, notre esprit jouit de la faculté de pouvoir en « prévoir » d'autres. Lorsque cela a lieu, nous disons que les événements satisfont à une certaine « loi ».

La faculté de concevoir des lois est fondamentale ; c'est par elle que l'on peut passer du particulier au général, du fini à l'infini, en un mot, que la science même est possible ; elle nous permet de « comprendre », car comprendre, c'est enchaîner des événements les uns aux autres, c'est-à-dire établir les relations, les lois qui les unissent.

2. — Le travail de compréhension de l'esprit ne s'exerce pas directement sur les choses, mais sur les « symboles », lettres, signes, mots, etc., qui les représentent.

Formuler une loi, c'est exprimer par un nombre fini de symboles une infinité d'événements. Plus le nombre de ces symboles sera restreint, plus la loi sera dite générale ; plus le travail de l'esprit sera aisé, et plus celui-ci prendra conscience de sa « puissance » à prévoir.

Au rebours, plus une loi exigera de symboles pour être formulée, plus notre esprit sentira sa puissance de prévision diminuée : — plus la loi, si l'on ose dire, perdra son caractère même de loi ; les liens apparaîtront plus lâches, les événements moins dépendants les uns des autres. Citons l'exemple classique de la table de logarithmes. Nous savons parfaitement que la table est établie suivant des règles rigides, et cependant, perdu dans la foule des chiffres, notre esprit aura la tendance à envisager les décimales des logarithmes des divers nombres comme plus ou moins indépendantes les unes des autres.

3. — A la limite, si les événements considérés ne peuvent être reliés entre eux que par une loi dont l'expression exigerait une infinité de symboles, nous pourrons dire, comme nous le verrons en détails plus loin, que les événements sont rigoureusement « indépendants » les uns des autres. Dans ce cas, l'impuissance de l'esprit à prévoir un événement futur est totale.

Cela nous amène à distinguer deux cas principaux d'impossibilité de prévision :

1° Impossibilité de prévoir par simple « ignorance » de la loi. Nous savons bien que celle-ci existe, et même qu'elle est simple ; mais elle nous échappe momentanément, en tout ou en partie.

2° Impossibilité de prévoir par « impuissance », parce que la loi est extrêmement compliquée, c'est-à-dire ne pourrait être exprimée que par un nombre énorme ou même infini de symboles.

Dans le premier cas, nous dirons que les événements ont lieu suivant le « hasard subjectif », et dans le second, suivant le « hasard objectif ».

4. — Toutes les propositions que nous pourrons formuler sur ces événements considérés *individuellement*, auront un

caractère commun : elles ne seront pas certaines, elles ne seront que « probables ». Par contre, la succession de ces événements forme des *suites* présentant certains caractères de symétrie, disons mieux, de « pseudo-symétrie ». Leur étude constitue la *Théorie des Probabilités*.

Nous nous proposons dans ce qui suit d'exposer rapidement ces caractères fondamentaux.

5. — Les deux sortes de hasard ci-dessus spécifiées suffisent à caractériser complètement l'emploi du hasard dans les sciences.

Les théories statistiques ordinaires, les théories cinétiques de Maxwell-Boltzmann appartiennent au hasard objectif.

Par contre, la Mécanique statistique de Gibbs repose uniquement sur le hasard subjectif ; ce dernier a reçu en outre des applications importantes dans la théorie des équations différentielles, le problème des n corps (Poincaré), etc., et la théorie des nombres (Borel).

II. — Le hasard objectif. — Les notions de complication, de brassage parfait et d'indépendance. Les notions de relativité et d'approximation appliquées au hasard objectif.

6. — Imaginons, alignées les unes à côté des autres, k cases numérotées de 1 à k et, sur chaque case, une carte d'un jeu de k cartes également numérotées de 1 à k.

Nous allons supposer que ces cartes sont permutées sur les cases par une *machine,* suivant une certaine loi.

Nous ferons le relevé périodique aux temps t_0, $t_0 + \tau$, $t_0 + 2\tau$, ..., $t_0 + (n - 1)\tau$, des distributions réalisées à ces instants, et nous les noterons pour obtenir un diagramme de la marche du phénomène.

Les cartes sur les cases peuvent former $k!$ distributions différentes :

$$D_1 , D_2 , D_3 , D_4 , \ldots , D_i , \ldots , D_{k!} .$$

Selon la loi, un plus ou moins grand nombre de ces distri-

butions seront réalisées successivement aux époques considérées.

Cela posé, supposons d'abord que la loi est simple, c'est-à-dire exprimable par une relation analytique simple ou par un petit nombre de mots. Il sera possible dans ce cas de trouver une carte portant le numéro j, et h cases de rangs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$, telles que ladite carte ne se trouve pas du tout, en moyenne, à peu près h fois sur k sur l'une des cases choisies. Mais à mesure que la loi deviendra de plus en plus compliquée, il sera de plus en plus difficile de trouver la carte et la ou les cases qui réalisent ces conditions. Le rapport observé tendra vers $\frac{h}{k}$.

Or, si compliquée que nous imaginions une machine, elle ne pourra pas être infiniment compliquée, autrement dit, il arrivera un moment $t_0 + (N - 1)$ où la distribution initiale se reproduira et où toutes les distributions suivantes se succéderont toujours dans un même ordre : le phénomène sera périodique

Sur les N distributions que comporte la période, la distribution D_i apparaîtra un certain nombre de fois N_i; en appelant n_i le nombre de fois que cette distribution apparaîtra pendant les n observations, on aura évidemment :

$$\frac{n_i}{n} = \frac{N_i}{N} = \text{constante} = r_i \ , \qquad (1)$$

d'où :

$$\Delta_i = n_i - nr_i = 0 \ . \qquad (2)$$

Si tous les rapports r_i étaient nuls à l'exception d'un seul nous dirions que la machine est *au repos*. C'est le cas le plus simple.

Il est essentiel de remarquer que le nombre N de distributions dont se compose la période, peut être aussi grand que l'on veut, et cela quel que soit k, pourvu que $k \geqq 2$; nous pouvons, autrement dit, imaginer des périodes aussi longues que nous voulons. Pour un N et un k donnés, leur nombre sera k^N.

7. — Dans le cas limite où N est infini, la période comprendra une infinité d'éléments ; nous dirons que la loi est *infiniment compliquée.*

8. — Ainsi, nous sommes en état de créer des lois infiniment compliquées. La question intéressante qui se pose maintenant est la suivante : comment peut-on imaginer un système évoluant suivant une telle loi ?

Une idée se présente immédiatement à l'esprit : rassembler les cartes en paquet, les battre par un certain nombre de coups m, puis les replacer sur les cases dans l'ordre obtenu, l'opération étant recommencée n fois de suite.

Nous avons en effet la conviction que le système *opérateur-cartes* considéré n'est pas périodique. Les mouvements qui président à la formation des distributions sont si compliqués que nous devons complètement renoncer à en découvrir les lois. Mais, si notre pouvoir discriminatif trop faible ne nous permet pas d'apercevoir ces lois, il permet toutefois de distinguer quelque chose d'approchant. En effet, les mouvements de l'opérateur ne sont pas complètement *décoordonnés,* et c'est ce que nous exprimons en disant que l'opérateur a certaines *habitudes.* Comment ces habitudes se manifestent-t-elles ? Par le fait que certaines distributions se présenteront plus fréquemment que d'autres. Ainsi, nous aurons des degrés de fréquence différents dans l'apparition des diverses distributions, et, semble-t-il, nous revenons aux périodes. Mais, est ceci est l'essentiel, ce ne seront plus de vraies périodes, ce seront des pseudo-périodes, plus ou moins bien marquées ; les fréquences sont *relatives,* comme nous le verrons dans un instant.

Auparavant, nous devons écarter une difficulté. Nous savons que le système opérateur-cartes à un instant donné n'est jamais identique à ce qu'il était un instant auparavant ; autrement dit, ce système se transforme constamment, et, remarquons-le, c'est peut-être pour cette raison qu'il n'est pas périodique. Il en résultera que, si n est très grand, nous risquons de voir les habitudes du joueur se modifier sensiblement. Pour établir la théorie, nous nous trouverons ainsi tout naturellement conduit à schématiser le système en ima-

ginant un opérateur fictif capable de garder indéfiniment des habitudes invariables. Dans ce cas, il sera possible de définir les pseudo-fréquences par des nombres ϖ_i invariables pour chaque distribution D_i. Nous ne pourrons plus, bien entendu, définir les nombres N et N_i, mais nous pourrons considérer des nombres :

$$n \ , \qquad n' \ , \qquad n'' \ , \ \ldots$$

$$n_i \ , \qquad n_i' \ , \qquad n_i'' \ , \ \ldots$$

tels que les rapports

$$\frac{n_i}{n} \ , \qquad \frac{n_i'}{n} \ , \qquad \frac{n_i''}{n} \ , \ \ldots$$

tendent vers une limite bien déterminée lorsque n, n', n'', ... augmentent indéfiniment ; c'est ce que nous résumerons par l'expression :

$$\lim_{n=\infty} \frac{n_i}{n} = \varpi_i \ . \qquad (1')$$

Nous dirons que ϖ_i est la *probabilité objective* pour qu'une des distributions soit la distribution D_i ; c'est la *fréquence relative* d'apparition de cette distribution.

Comme on le voit, la relation (1') est l'analogue de la relation (1) ; mais la relation (1') n'est valable rigoureusement qu'à la limite. Cela concorde avec le fait que la période, dans ce cas, est infinie [1].

De même, la relation (2) ne sera plus valable. Les différences :

$$\Delta_i = n_i - n\varpi_i$$

$$\Delta_i' = n_i' - n'\varpi_i$$

$$\Delta_i'' = n_i'' - n''\varpi_i$$

que nous appellerons *écarts absolus,* augmentent au delà de

[1] M. L. BACHELIER a montré aussi d'une autre façon qu'une suite d'événements fortuits a une période infinie (*L'Enseign. math.*, 1915, p. 5).

toute limite. Par contre, en vertu de (1'), les *écarts relatifs bruts* :

$$x_i = \frac{\Delta_i}{n} , \qquad x'_i = \frac{\Delta'_i}{n'} , \qquad x''_i = \frac{\Delta''_i}{n''} , \ \ldots$$

tendront vers 0. En introduisant l'*écart étalon* e_i par l'expression :

$$e_i = \sqrt{\frac{2\varpi_i(1 - \varpi_i)}{n}} ,$$

et l'*écart relatif* λ par la relation

$$\lambda = \frac{x}{e} ,$$

l'Analyse combinatoire permet de montrer que les fréquences relatives, ou probabilités objectives des écarts relatifs λ, obéissent à la loi suivante, lorsque n est très grand :

$$\Theta(\lambda) = \int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{-\lambda^2} d\lambda .$$

C'est la *loi fondamentale des écarts*. En remontant, elle permet de calculer les fréquences relatives des écarts x et Δ.

9. — En résumé, *une loi infiniment compliquée ne peut être contenue dans une expression analytique nous permettant d'en déterminer une partie quelconque. Par contre,* ses propriétés d'ensemble *sont complètement caractérisées par les quantités que nous avons appelées* écarts *et qui satisfont à un critère analytique simple.*

10. — La question fondamentale qui se pose à nous maintenant est celle de savoir comment varient les quantités ϖ_i avec le nombre de battements m et les habitudes de l'opérateur. Nous poserons le problème de la façon suivante :

« Si, avant de battre le jeu, les cartes sont dans un certain ordre que nous prendrons comme initial, que peut-on dire de l'ordre final des cartes après m battements ? »

Ce problème a été étudié par Poincaré. Nous ne suivrons pas ce savant dans les développements mathématiques diffi-

ciles qu'il donne dans son *Calcul des Probabilités*. Nous nous contenterons d'indiquer brièvement la position de la question en nous basant sur l'exposé élémentaire de la préface de cet ouvrage.

Considérons un opérateur qui bat un jeu de cartes. A chaque battement, l'ordre des cartes est interverti, et il peut l'être de plusieurs manières. Supposons trois cartes seulement pour simplifier l'exposition. Les cartes qui, avant le premier battement, occupaient respectivement les rangs 123, pourront, après le premier battement, occuper les rangs

$$123\ ,\quad 231\ ,\quad 312\ ,\quad 321\ ,\quad 132\ ,\quad 213\ .$$

Chacune de ces permutations est possible, mais elles ont des fréquences relatives d'apparition qui dépendront et caractériseront les habitudes de l'opérateur, supposées invariables. Nous les désignerons respectivement par :

$$p_1\ ,\quad p_2\ ,\quad p_3\ ,\quad p_4\ ,\quad p_5\ ,\quad p_6\ ;$$

la somme de ces six quantités est égale à 1.

Au second battement et aux suivants, cela recommencera et dans les mêmes conditions ; p_4, par exemple, représente toujours la fréquence relative de la permutation qui fait passer les cartes des rangs 1, 2, 3 aux rangs 321.

Cela posé, on peut démontrer que si le nombre m de battements est très grand, les cartes qui, avant le premier battement, occupaient les rangs 1, 2, 3, pourront, après le dernier battement, occuper *à peu près indifféremment* les rangs

$$123\ ,\quad 231\ ,\quad 312\ ,\quad 321\ ,\quad 132\ ,\quad 213\ ;$$

autrement dit, les fréquences relatives de ces six ordres sont sensiblement les mêmes et égales approximativement à $\frac{1}{6}$; nous dirons que l'ordre final des cartes est à peu près *indépendant* de l'ordre initial. Cela sera vrai quels que soient les nombres $p_1, \ldots, p_6$, c'est-à-dire les habitudes du joueur. Le grand nombre de battements, c'est-à-dire la *complexité* des causes, a produit l'*indépendance*.

Il y aurait une exception toutefois si l'un des nombres p était égal à 1 et les autres nuls. Les conditions seraient trop simples.

Enfin, si tous les nombres p étaient égaux entre eux, n'importe lequel des six ordres possibles apparaîtrait au premier battement : l'indépendance serait réalisée au premier coup.

11. — Voyons maintenant les conséquences que nous pourrons tirer de l'analyse sommaire qui précède.

Pratiquement, on peut distinguer deux cas principaux :

1° L'opérateur a de fortes habitudes, l'un des p est voisin de 1, les autres voisins de 0. Dans ce cas, m devra être très grand, c'est-à-dire l'opérateur devra battre le jeu un très grand nombre de fois pour que l'ordre final soit à peu près indépendant de l'ordre initial.

2° L'opérateur n'a presque pas d'habitudes, les différents p sont tous à peu près égaux entre eux. Dans ce cas m pourra être relativement petit.

12. — Introduisons maintenant les *limites* des deux cas précédents. Pour cela, nous imaginerons des opérateurs fictifs :

1° ou bien qui n'ont aucune habitude ;

2° ou bien qui ont certaines habitudes, mais peuvent effectuer un nombre infini de battements en un temps fini, très court, τ.

Pour abréger, nous pourrons appeler *démons*[1] ces opérateurs fictifs.

Nous conviendrons de dire que l'ordre final des cartes d'un jeu ainsi battu a été obtenu par le *brassage parfait*, et nous aurons immédiatement cette proposition :

L'ordre final des cartes, obtenu par le brassage parfait, ne dépend pas de l'ordre initial.

De plus, nous dirons que la succession des cartes dans l'ordre final forme une *loi infiniment compliquée parfaite.*

13. — Le passage à la limite que nous venons d'effectuer

[1] Ces démons s'opposent à ceux de Maxwell, qui sont des démons d'ordre, chargés du triage des molécules. On voit que s'il faut un démon, c'est-à-dire une impossibilité, pour mettre de l'ordre dans un système moléculaire, il en faut un également pour créer le désordre *parfait.*

permet de bien préciser les notions d'*indépendance* et de *complication infinie parfaites*.

Il faut remarquer, en effet, que pour la compréhension et l'emploi d'un concept, il est toujours avantageux d'abstraire de l'expérience une notion pure, par un passage à la limite convenable qui en donne la genèse, comme on le fait, par exemple, pour acquérir les notions de ligne droite, de corps solide, de mouvement rectiligne et uniforme, etc., autour desquelles viennent se grouper les lignes à peu près droites, les corps à peu près solides, etc., que nous voyons autour de nous[1]. Il est évident que le concept d'*indépendance parfaite* ne peut être qu'un concept limite, qui exige un « passage » pour devenir complètement intelligible. Ici, nous avons vu qu'on peut l'acquérir de deux façons distinctes, soit en imaginant des êtres capables de n'avoir aucune habitude, dont les mouvements, autrement dit, sont parfaitement décoordonnés, soit en imaginant des êtres comme nous, dans le mouvement desquels on peut apercevoir une certaine coordination ; mais alors, dans ce cas, l'indépendance ne pourra être parfaite que si le nombre de battements devient infini. Il y a là une discontinuité remarquable qui jette un jour précieux sur toute la question : lorsqu'on passe du premier cas au second, c'est-à-dire de celui où les p sont tous égaux à celui où les p diffèrent les uns des autres, le nombre de battements passe brusquement de la valeur 1 à une valeur infinie. Or, adopter le premier cas revient purement et simplement à postuler d'emblée l'indépendance parfaite. Le second cas nous montre que *sitôt que l'on introduit une* coordination, *si faible soit-elle, il faut une infinité de coups pour faire disparaître toute trace de l'ordre initial.*

Cela ne peut trop nous surprendre : si l'on veut que l'ordre final ne conserve « rien » de l'ordre initial, il nous paraîtra naturel de faire appel à l'idée d' « infini », seule l'idée d'infini étant compatible avec l'idée de « rien » pour notre esprit habitué à la détermination.

---

[1] La genèse et le rôle des passages à la limite ont été analysés avec une grande pénétration par M. J.-H. Boex-Borel (J.-H. Rosny aîné) dans l'ouvrage intitulé *Le Pluralisme*, Paris, F. Alcan, 1909.

14. — En ramenant la notion de hasard à la notion de loi, c'est-à-dire de succession, on réduit à néant l'idée mystérieuse qu'on s'en fait ordinairement, en le prenant à tort dans un sens absolu.

Il convient de remarquer d'abord que cette façon de procéder est la plus naturelle à notre esprit. Lorsqu'un astronome veut connaître la trajectoire d'une planète, il commence par en déterminer un grand nombre de points ; puis, les joignant par un trait continu, il peut constater que la trajectoire est une ellipse. Jamais il ne lui viendrait à l'esprit d'essayer de trouver la trajectoire en partant d'un point unique ; ici, du reste, l'impossibilité saute aux yeux[1]. De même, la question si souvent posée dans les traités de probabilités : *Cet événement a-t-il lieu au hasard ou non ?* n'a pas de sens tant que l'on ne *situe* pas cet événement dans une *chaîne* d'événements.

15. — En outre, notre façon de procéder permet de bien préciser les différentes formes que revêtent nos relations avec les choses.

Il importe de remarquer, en effet, qu'une même relation est souvent susceptible de bien des formes différentes, que quelques-unes de ces formes peuvent être simples tandis que d'autres sont très ou même infiniment compliquées. Autrement dit, là comme ailleurs, les notions sont *relatives*, et l'on est parfaitement en droit de parler de la *relativité du hasard, de la complication et de l'indépendance*, à la condition, toutefois, d'y ajouter simultanément la *notion d'approximation*[2].

Des exemples remarquables et très simples sont donnés par les rapports mathématiques et leurs divers modes de représentation. Considérons, par exemple, le rapport π de

[1] On ne se rend pas assez compte, en général, de la difficulté que nous avons à prévoir les phénomènes d'apparence les plus simples. Un exemple typique est celui de la planète Neptune. Citons textuellement M. de la Baume Pluvinel : « Les éléments de l'orbite de Neptune sont encore mal connues, car on n'observe régulièrement cette planète que depuis 77 ans, et la durée de sa révolution est de 164 ans ; elle n'a donc encore été observée que pendant une demi-révolution, *ce qui n'est pas suffisant* pour que l'on puisse prévoir, avec précision, les positions futures de la planète. »

[2] Ceci est conforme à la règle générale : on ne peut introduire la notion de relativité dans les sciences physiques qu'en négligeant une foule de phénomènes. Suivant l'heureuse expression de H. POINCARÉ *(Dernières Pensées)*, « l'Univers n'est tiré qu'à un seul exemplaire » ; puisqu'aucune de ses parties n'est identique à une autre, on ne peut parler de relativité qu'avec une certaine *approximation*.

la circonférence au diamètre. Ce rapport, dans le système décimal, peut être relié aux dix chiffres 0, 1, 2, ..., 9 de plusieurs façons différentes.

Ecrivons l'une d'elles :

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots\right). \qquad (1)$$

En l'examinant, nous disons tout de suite que la « loi est évidente ». Si je donne le $n^{\text{ème}}$ terme, je puis écrire immédiatement le $(n+1)^{\text{ème}}$.

Ecrivons-en une autre :

$$\pi = 3{,}14159265358979323846 \ldots \qquad (2)$$

Cette expression m'apparaît infiniment compliquée. J'aurai beau écrire 10, 100, 1000, ... décimales, aucune loi ne sera mise en évidence : les chiffres semblent se succéder au hasard ; ils paraissent absolument indépendants les uns des autres. Si je n'ai que cette expression à ma disposition, je serai dans l'impossibilité de prévoir, étant données les 10, 100, 1000, ... premières décimales, ce que doivent être les $11^{\text{ème}}$, $101^{\text{ème}}$, $1001^{\text{ème}}$, ...

Pourquoi les chiffres, ici, semblent-ils se succéder fortuitement ?

Un postulat intéressant dû à M. P. Ceresole [1] permet de répondre à la question. Nous l'énoncerons brièvement de la façon suivante :

Il est impossible de calculer la $n^{\text{ème}}$ décimale de π sans avoir auparavant calculé les $n - 1$ premières.

Ce postulat étant admis, il en résulte immédiatement que le nombre de symboles nécessaires à la détermination d'une décimale quelconque augmente indéfiniment avec le rang de celle-ci. On tend donc vers une complication infinie. En fait, le nombre de symboles augmente si rapidement que la complication est extrême dès le début.

Mais voici maintenant qui est essentiel : la complication est infinie, mais *non* parfaite ; elle ne peut l'être puisque le

[1] P. Ceresole, L'irréductibilité de l'intuition des probabilités et l'existence de propositions mathématiques indémontrables, *Arch. de Psych.*, t. xv, p. 255, 1915.

nombre d'opérations nécessaires pour passer d'une décimale à la suivante est *fini*. Toutefois, en choisissant des décimales aussi éloignées qu'on veut les unes des autres, on pourra dire, en vertu du postulat de M. Ceresole, que ces décimales sont indépendantes avec une *approximation* qui augmentera au delà de toute limite avec l'éloignement. La suite infiniment compliquée de π est « asymptotique » à une suite parfaite.

Nous avons ici un exemple simple de l'application de la notion de hasard avec une certaine *approximation*. Sous ce point de vue, la série des décimales de π devient « équivalente » à la série des chiffres que l'on obtiendrait en faisant une infinité de tirages dans une urne appropriée. Tout ce que l'on peut dire c'est que les opérations qui président à la formation de π sont beaucoup moins compliquées que les opérations qui président aux tirages successifs dans une urne. Il n'y a donc qu'une différence d'*approximation* et non une différence de *qualité*. C'est là quelque chose qui choquera bien des gens ; on croira volontiers au dieu hasard dans le cas de l'urne et non dans le cas de π. Nous nous heurtons ici à un postulat épistémologique qui joue un très grand rôle dans la science moderne en contenant en puissance les théories dites de *relativité*. Nous essayerons de l'énoncer tant bien que mal de la façon suivante :

Considérons deux choses comparables A et B, dont l'une, A, semble *a priori* jouir d'une « situation privilégiée » par rapport à B. Si, par *aucun moyen*, nous ne pouvons mettre en évidence le « privilège », nous devons en conclure que A et B sont toutes deux parfaitement « équivalentes ».

On comprend maintenant aisément ce qu'il faut entendre par la relativité de nos relations. Selon qu'il est représenté par (1) ou par (2), le rapport π nous apparaît simple ou infiniment compliqué.

Plus généralement, on peut parler de la *relativité* de l'indépendance et de la complication en ce sens que, *selon le point de vue*, des événements nous semblent se succéder au hasard, ou bien comme susceptibles d'être prévus par des lois relativement simples.

16. — Dans toutes les applications, la notion d'*approximation* jouera un rôle important, et il y aura lieu d'envisager une indépendance ou une complication plus ou moins approchées. Comme toute théorie, le hasard ne sera réalisé qu'approximativement. Il sera toujours possible, d'une loi connue, suffisamment compliquée, de déduire des nombres qui concordent à peu près avec ceux du hasard parfait, admis lui-même comme n'étant qu'à peu près réalisé. Les différents états d'un phénomène sembleront d'autant plus indépendants les uns des autres qu'il sera plus difficile de trouver des relations simples entre ces états.

Cette idée d'approximation dans le hasard peut être utilement éclaircie par un parallèle entre le brassage et certains phénomènes physiques qui n'arrivent à leur terme qu'après un temps infini. Tel est, par exemple, l'arrêt d'une pièce mécanique dans un fluide visqueux. On introduit alors un *temps de relaxation*. C'est le temps nécessaire à la pièce pour que sa vitesse tombe à une certaine fraction de sa vitesse initiale. Semblablement, on peut introduire dans l'étude du brassage d'un jeu de cartes, un certain *nombre de relaxation*. C'est la valeur que doit avoir le nombre m pour que l'ordre final soit indépendant de l'ordre initial à une certaine approximation près. Pour une approximation donnée, m devra être d'autant plus grand que les p diffèreront plus les uns des autres.

17. — L'introduction du temps de relaxation, en général du *temps,* dans le hasard est très importante pour l'étude des phénomènes. M. Perrin, par exemple, a été tout naturellement conduit à repérer, à des intervalles réguliers, les positions d'un grain d'émulsion, et à constater ainsi que le grain se déplaçait, avec une très grande approximation, suivant les lois du hasard. Les pointés étaient faits, par exemple, toutes les quinze secondes. S'ils avaient pu être faits à des intervalles de temps inférieurs au $\frac{1}{100\,000}$ de seconde, on aurait mis en évidence la loi de mouvement, et l'on ne pourrait plus, même approximativement, parler de hasard.

Si, en général, on n'introduit pas explicitement le temps

dans les probabilités, c'est que celles-ci s'appliquent surtout à des *jeux* de hasard où la succession des événements (parties) a lieu beaucoup moins rapidement que la succession des battements dans le battage d'un jeu de cartes. Examinons, par exemple, le jeu de pile ou face. Entre chaque partie il s'écoule un temps tel que le système joueur-pièce a complètement « oublié » les états précédents. La relaxation est quasi complète. Peut-être qu'en jouant suffisamment vite on ne parviendrait pas à éliminer un certain automatisme. Il semble même qu'on ne pourrait parvenir à ramasser et jeter très rapidement une pièce de monnaie qu'en faisant des mouvements bien coordonnés, comme il arrive dans le battage des cartes par un joueur.

18. — L'étude que nous venons de faire pourrait s'appliquer à tout autre système *opérateur-objet,* tels que : boules dans une urne, petits chevaux, roulette, etc. Dans tous, il y a un objet : jeu de cartes, ensemble de boules, machine, etc., qui doit présenter certains caractères de symétrie géométrique, et sur lequel s'exercent un ou plusieurs de nos mouvements répétés, qui, à cause de notre constitution en transformation continuelle, se présentent avec une suite indéfinie de différences. Nous sommes ainsi excellemment constitués pour « faire » du hasard : notre intelligence, d'une part, nous permet de répéter un nombre énorme de fois des mouvements très semblables ; d'autre part, des différences involontaires dans ces mouvements produisent les petites irrégularités nécessaires. Nous sommes, de la sorte, en mesure de créer un hasard qui s'approche indéfiniment du hasard parfait. De temps à autre, les appareils doivent être vérifiés, remplacés à la longue, afin qu'il n'y ait jamais de disymétrie fâcheuse, ce qui serait immanquable avec l' « usure », c'est-à-dire la *transformation* inévitable de l'appareil employé.

Il y a là des circonstances qu'il ne faut pas perdre de vue lorsqu'on veut appliquer les lois du hasard à un système purement physique qui, comme nos machines, finit toujours par se transformer, de sorte qu'à la fin de l'expérience le système ne correspond plus à la définition initiale que nous avions adoptée pour faire les considérations de probabilité.

Aussi est-il vain de croire que le principe de l'augmentation de l'Entropie est complètement épuisé lorsqu'on y a introduit les lois du hasard.

III. — Premier mode d'emploi du hasard pour l'étude des phénomènes : Emploi du hasard objectif.

19. — Au paragraphe précédent, nous avons défini le brassage parfait et la probabilité objective parfaite.

Il convient de voir maintenant comment on peut utiliser ces notions pour l'étude des phénomènes, l'expression « phénomènes » étant prise dans son acception la plus large.

20. — Envisageons un phénomène dont les états aux temps t_0, $t_0 + \tau$, $t_0 + 2\tau$, ..., dépendent des valeurs que prennent, à chacun de ces instants, n paramètres, et supposons que ces n paramètres ne peuvent satisfaire qu'à des relations très compliquées, — soit que ceci résulte de l'observation directe, soit que ceci résulte de considérations purement théoriques.

Dans ce cas, il sera possible, avec une certaine approximation, *d'établir une correspondance entre un brassage parfait et le phénomène étudié.*

A cet effet, on formera un phénomène fictif que nous appellerons « schéma de brassage parfait » ; *il sera caractérisé par* n *paramètres correspondant aux* n *paramètres ci-dessus, et effectué par des démons aux temps* t_0, $t_0 + \tau$, $t_0 + 2\tau$, ..., *dans des conditions choisies de manière que les valeurs successives prises à ces instants par l'un quelconque des paramètres du phénomène, forment, approximativement, une série possible de valeurs pour le paramètre correspondant du schéma. Dans ce cas, les propriétés d'ensemble de ce phénomène fictif correspondront d'une manière approximative aux propriétés d'ensemble du phénomène donné, et permettront de les calculer.*

C'est ce calcul qui seul importe. La difficulté du problème consistera dans le choix convenable des conditions que le schéma devra remplir dans ce but.

21. — Ainsi, tandis que le mode habituel de représentation des phénomènes par les équations différentielles donne la

possibilité de déterminer l'état réel du système à l'instant $t + dt$, lorsque l'état à l'instant t est connu, le mode de représentation défini ci-dessus est, par nature, essentiellement *discontinu,* alors même qu'on se servirait de fonctions continues pour les calculs. L'intervalle de temps τ ne pourra jamais être un infiniment petit au sens mathématique du mot, c'est-à-dire une quantité tendant vers zéro.

22. — En calculant pour le schéma de brassage les probabilités objectives des divers états possibles, on pourra répondre à la question qui résume le problème du présent paragraphe :

« *Quelle est la probabilité pour que le phénomène physique donné se trouve dans tel état déterminé ?* »

On peut dire que le hasard est dans le phénomène : c'est un *hasard objectif.*

23. — Un cas intéressant est celui où certains états voisins sont de beaucoup les plus probables. Les autres seront dits exceptionnels. Dans ce cas, le phénomène nous apparaîtra avec une certaine uniformité : il nous semblera toujours dans un même état moyen.

Ceci a lieu pour les systèmes à un très grand nombre de degrés de liberté, un gaz parfait, par exemple.

24. — C'est à la méthode ci-dessus qu'il convient de ramener, outre la théorie cinétique ordinaire, la théorie des mouvements browniens, la théorie des quanta de Planck, etc., tous les schémas des urnes, faits en Statistique pour les mortalités, les naissances, etc., en biologie, en biométrique, etc.

IV. — Définition de la probabilité subjective. Le hasard dans l'observateur ou hasard subjectif.

25. — Nous allons introduire une nouvelle notion de probabilité, qui joue un grand rôle dans la vie pratique, où l'on a des déterminations à prendre en face d'événements qu'on ne peut prévoir entièrement.

Comme nous le verrons, cette notion occupe une place importante dans les sciences physiques et mathématiques.

26. — Commençons par une définition.

Imaginons de nouveau, alignées les unes à côté des autres, k cases numérotées de 1 à k, et, sur chacune de ces cases, une carte d'un jeu de k cartes, également numérotées de 1 à k.

Un opérateur ramassera les cartes et les reposera sur les cases dans un certain ordre. Nous obtiendrons ainsi une nouvelle distribution. L'opération sera répétée à intervalles fixes, c'est-à-dire à des temps t_0, $t_0 + \tau$, $t_0 + 2\tau$, ..., et les distributions réalisées à ces instants seront notées sur un diagramme, de façon qu'à la fin de l'expérience nous puissions nous rendre compte de la marche du phénomène. Nous supposons l'opérateur complètement libre de choisir, pour la succession des distributions, telle loi qu'il voudra ; en particulier, il pourrait maintenir les cartes toujours dans le même ordre.

Ceci posé, choisissons h cases : pour préciser, celles portant les numéros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h$, où $1 \leqq \alpha_j \leqq k$, $j = 1, 2, \ldots$, $h \leqq k$, et demandons-nous quelle est la probabilité pour que dans *une* des distributions, considérée isolément, par exemple celle réalisée au temps $t_0 + \tau$, la carte n° i soit sur l'une des h cases choisies.

Ne sachant rien du tout, nous ne pouvons croire favorisée aucune case en particulier. Nous dirons simplement qu'il y a k *cas possibles et* h *cas favorables,* et nous obtiendrons pour cette probabilité la valeur $\frac{h}{k}$.

C'est ce que nous appellerons la *probabilité subjective* de l'événement considéré.

Examinant ensuite le diagramme, nous constaterons qu'en général ladite carte ne se trouve pas du tout, en moyenne, à peu près h fois sur k sur l'une des cases choisies, et qu'il est impossible de satisfaire à la loi des écarts, même d'une façon grossièrement approximative. Il pourrait arriver en particulier que la loi de succession adoptée fût telle que ladite carte ne se trouvât jamais dans l'une des h cases indiquées.

Ce serait par contre le cas si, entre chaque distribution,

les cartes étaient soumises à un battage parfait, ou bien si l'opérateur adoptait volontairement une loi de succession qui, continuée indéfiniment, serait infiniment compliquée.

27. — La définition ci-dessus peut s'appliquer au continu en faisant tendre h et k vers l'infini, de façon que le rapport $\frac{h}{k}$ reste fini.

On le rencontre sous cette forme dans la Mécanique statistique de Gibbs.

C'est, en général, dans les cas extrêmes, c'est-à-dire lorsque

$$\lim_{\substack{h=\infty \\ k=\infty}} \frac{h}{k} = 1 \quad \text{ou} \quad 0$$

que la probabilité subjective rend des services en Mathématique et en Physique. Citons, par exemple, la probabilité subjective pour qu'un nombre soit rationnel ; elle est infiniment petite.

28. — La question fondamentale qui se pose maintenant est celle de savoir si la probabilité subjective est d'une nature autre que la probabilité objective.

A cet effet, nous nous souviendrons que nous avons précisé la notion de hasard objectif en la ramenant à une loi infiniment compliquée, et cette loi elle-même à la *loi des écarts*. Nous devons donc nous efforcer à retrouver une loi infiniment compliquée. Pour y arriver, il suffit d'introduire un grand nombre d'événements qui puissent être considérés comme *indépendants* les uns des autres.

Dans ce but, nous formerons un *ensemble* comprenant un nombre énorme d'observateurs fictifs que nous supposerons absolument isolés les uns des autres, c'est-à-dire sans communication aucune, et ne connaissant pas les intentions de l'opérateur. Dans ces conditions, leurs décisions seront parfaitement *indépendantes*.

Cela posé, il pourra se présenter deux cas :

1° étant donné la carte n° i, les observateurs fixeront les h cases. Si, lorsque chacun d'eux aura fait son choix, on établit une statistique, on verra que ladite carte, dans la

distribution considérée, se trouve bien en moyenne à peu près h fois sur k dans les cases indiquées ;

2° étant donné les h cases, les observateurs fixeront chacun une carte. En faisant une statistique comme ci-dessus, on verra alors que les cartes choisies sont à peu près h fois sur k dans une des cases données.

Ainsi, en définitive, la probabilité subjective peut conduire à une loi infiniment compliquée ; il suffit de postuler l'*indépendance* des décisions des observateurs. Celles-ci dépendront, pour chacun d'eux, des circonstances qui les entourent, et on admettra que ces circonstances varient infiniment d'un observateur à un autre.

Nous sommes de nouveau dans un cas limite. Dans la pratique, l'indépendance peut être réalisée avec une très grande approximation.

29. — Nous voyons maintenant clairement la différence qui sépare les deux probabilités : dans la probabilité objective, c'est pour le phénomène étudié qu'a lieu la loi des écarts ; dans la probabilité subjective, cette loi s'applique aux observateurs mêmes : le hasard n'est plus dans le phénomène qui peut obéir à une loi quelconque, mais dans l'observateur (sujet). Nous dirons qu'il est *subjectif*.

Ainsi, *la loi des écarts nous donne un critère simple pour distinguer les deux sortes de probabilités*.

30. — Si les cartes sur les cases sont soumises au brassage parfait, ou, plus généralement, si un système évolue suivant le hasard objectif, les probabilités objectives auront mêmes valeurs numériques que les probabilités subjectives correspondantes, celles-ci se rapportant évidemment à chaque état, considéré isolément, par lequel passe le système.

C'est cette identité des valeurs numériques qui masque la distinction que permet de faire la loi des écarts.

Il en résulte qu'à toute probabilité objective correspond une probabilité subjective de même valeur numérique. Mais l'inverse n'a pas lieu nécessairement.

31. — Nous citerons, pour terminer, un paradoxe fameux dû à d'Alembert, et qui trouve une solution satisfaisante dans la probabilité objective. D'Alembert affirmait obstiné-

ment que toute probabilité devait être égale à $1/2$, car, disait-il, pour tout événement il n'y a que deux alternatives possibles : il arrive ou n'arrive pas. On peut donner une interprétation de la pensée de d'Alembert en se plaçant au point de vue suivant : il s'agit d'une probabilité subjective et l'ignorance de l'observateur est totale. Si l'on imagine, en effet, un grand nombre d'observateurs indépendants qui engagent des paris sur l'arrivée ou la non-arrivée d'un certain événement, la moitié d'entre eux à peu près pariera pour l'arrivée et l'autre moitié pour la non-arrivée.

V. — Deuxième mode d'emploi du hasard pour l'étude des phénomènes : Emploi du hasard subjectif.

32. — La probabilité subjective va nous fournir une autre manière d'utiliser le hasard, manière plus raffinée et moins immédiate que la première, quoique plus générale et mieux dans la nature des choses. Comme nous le verrons, cette méthode met bien en évidence nos rapports avec le monde extérieur ; elle fournit un instrument précieux non seulement au physicien, mais encore au mathématicien, comme en témoignent les travaux de Poincaré, Borel, etc. C'est elle qui permet d'allier le hasard à la rigueur mathématique, non pas en supposant que le hasard puisse être dans nos créations mathématiques, mais en traitant ces créations comme des objets extérieurs qui nous seraient partiellement étrangers.

33. — Envisageons un système dont l'état est défini à chaque instant par n paramètres :

$$x_1 , \quad x_2 , \ldots , \quad x_n ,$$

et supposons que les lois qui nous font connaître les variations de ces paramètres s'expriment par les équations différentielles :

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i , \qquad (i = 1 , 2 , \ldots , n)$$

où les X sont des fonctions des x et du temps t. Les équations précédentes n'expriment pas autre chose qu'un certain déterminisme : étant donné l'état du système au temps t, l'état de ce système au temps $t + dt$ est complètement déterminé.

Il est commode de représenter l'état du système, à l'instant t, par un point figuratif de l'hyperespace à n dimensions, dont les coordonnées sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$. L'ensemble des états que traverse le système au cours du temps forme une certaine trajectoire dans l'hyperespace ; cette trajectoire est parcourue par le point figuratif avec l'hypervitesse représentée par les équations ci-dessus.

Nous pouvons dire que nous connaissons la *constitution* de notre système. Si nous connaissions, en outre, les conditions initiales, — en supposant toutefois que l'on sache intégrer, — nous pourrions prédire l'état dans lequel sera le système à un instant quelconque.

Par un pareil système, nous pourrons entendre, par exemple, un système mécanique formé d'un certain nombre de points matériels en mouvement les uns par rapport aux autres. Il pourra alors nous importer de savoir quelle chance nous avons de rencontrer le système voisin de tel état (configuration) plutôt que de tel autre.

Nous sommes ainsi amenés à poser un nouveau problème de hasard que l'on pourrait formuler de la façon suivante :

Lorsqu'un observateur est tout à coup en présence d'un système de constitution donnée, quelle est la probabilité subjective pour que cet observateur trouve le système voisin de tel état déterminé ?

Si les conditions initiales étaient connues, l'observateur pourrait prévoir exactement comment le système évolue. On peut donc encore énoncer le problème précédent en disant :

« Lorsqu'un observateur rencontre un système de constitution donnée, quelle est la probabilité subjective pour que cet observateur se trouve en présence d'un système ayant eu telles conditions initiales ? »

34. — On voit maintenant clairement la différence entre la méthode objective et la méthode subjective.

Dans la première, il faut nécessairement que le phénomène étudié offre une complication suffisante ; dans la seconde cette condition n'est pas nécessaire.

Dans la première, on cherche, au moyen du hasard objectif parfait, à établir une image de la constitution même du système, à trouver les états par lesquels il pourrait passer et à indiquer leurs successions possibles, non continues : on met le hasard dans le système. Dans la seconde, il n'y a aucun hasard dans le système ; sa constitution, au sens indiqué plus haut, est parfaitement connue, c'est-à-dire est donnée par des lois connues qui nous indiquent déjà tous les états possibles et leurs lois de succession. Le fortuit provient de l'impuissance de l'observateur à prévoir dans lequel de ces états se trouvera le système à l'instant de l'observation, ou, ce ce qui revient au même, dans lequel de ces états était le système à l'origine du temps. Le hasard est dans l'observateur qui, ignorant les conditions initiales, est lié au système par une loi trop compliquée pour pouvoir faire des prévisions sur ces conditions.

35. — Les considérations ci-dessus trouvent une de leurs plus belles applications dans l'œuvre de J.-W. Gibbs. Dans sa Mécanique statistique, Gibbs « répète » un nombre énorme de fois un même système mécanique, de façon à former un *ensemble* de systèmes obéissant aux mêmes équations différentielles, mais qui, à l'instant $t = 0$, sont tous dans des conditions initiales différant d'un individu à l'autre.

Il est alors commode de supposer l'hyperespace représentatif peuplé de points figuratifs en mouvement sur des trajectoires correspondant chacune à un système de conditions initiales déterminées. Une petite région de l'hyperespace représente une série d'états voisins.

La question de probabilité énoncée plus haut revient alors à celle-ci :

« Lorsqu'un observateur rencontre un système de constitution donnée, quelle est la probabilité subjective pour que le point figuratif de ce système soit dans telle région de l'hyperespace ? »

Cet énoncé spécial de la question du n° 32 résume la mé-

thode de Gibbs. L'analogie avec le schéma des cartes du § III saute aux yeux : chaque groupe de h cases représente un état, et une carte représente un système. La probabilité subjective qui répond à la question est alors :

$$\lim_{\substack{h=\infty \\ k=\infty}} \frac{h}{k} = \text{const.}$$

Il est essentiel de remarquer que la trajectoire du système considéré pourrait ne pas traverser ladite région, de sorte que le point figuratif ne s'y trouverait jamais.

Parmi les systèmes intéressants, il convient de citer ceux qui, grâce à leur constitution, évoluent, en général, dans des états qui diffèrent très peu d'un certain état moyen, autrement dit, qui se comportent généralement à peu près comme un certain *type moyen,* de sorte que la probabilité subjective pour qu'un tel système diffère peu du type moyen lorsque l'observateur le rencontre, ou encore à l'époque que celui-ci a choisie pour origine du temps, est très voisine de l'unité. Les autres états seront dits exceptionnels.

Ce sera le cas, par exemple, si le système est très compliqué, c'est-à-dire présente un nombre énorme de libertés, tels les corps ordinaires dans la théorie moléculaire. Dans ce cas, la probabilité subjective conduit à des résultats ayant certains points communs avec ceux fournis par la probabilité objective (Cf. n° 23).

36. — On peut encore répondre à la question fondamentale du n° 34 d'un point de vue un peu différent, préconisé surtout par Einstein.

Considérons un système unique et sa représentation par un point figuratif en mouvement sur la trajectoire de l'hyperespace. Fixons une certaine région de cet espace et supposons-la traversée un grand nombre de fois par la trajectoire. Suivons le point sur celle-ci d'une époque t_0 à une époque $t_0 + \Theta$, Θ étant une très longue durée. A une certaine époque t_1 le point pénétrera dans la région pour en sortir à l'époque $t_1 + \theta_1$; il y rentrera à l'époque t_2 et en ressortira à

l'époque $t_2 + \theta_2$, etc. Posons :

$$\theta_1 + \theta_2 + \ldots = \theta \ ,$$

et fixons un instant t compris entre t_0 et $t_0 + \Theta$.

La réponse à la question posée pourra alors se formuler ainsi :

Lorsqu'un observateur rencontre, à l'instant t, un système de constitution donnée, mais dont les conditions initiales lui sont inconnues, la probabilité subjective pour que le point représentatif de ce système soit, à l'instant t, dans la région choisie de l'hyperespace, est égale à $\frac{\theta}{\Theta}$. Cette définition ne pourra avoir de sens que si ce rapport peut être considéré comme indépendant de t_0 et de Θ, pourvu que Θ soit très grand ; autrement dit, on doit avoir :

$$\lim_{\Theta=\infty} \frac{\theta}{\Theta} = \text{const.} \ .$$

37. — Pour établir le lien entre cette probabilité et la loi des écarts, on peut procéder comme suit : on tracera un axe des temps sur lequel on marquera les points :

$$t_0 \ , \quad t_1 \ , \quad t_1 + \theta_1 \ , \quad t_2 + \theta_2 \ , \ \ldots \ , \quad t_0 + \Theta \ .$$

On demandera à un grand nombre d'observateurs indépendants de nous fixer un instant t. On verra alors que les instants choisis tomberont à peu près θ fois sur Θ dans l'un des segments $\theta_1, \theta_2, \ldots$, c'est-à-dire dans un segment de longueur totale θ intérieur à un segment de longueur Θ.

Il est évident que nous aurions pu procéder autrement et considérer l'instant t comme fixé une fois pour toutes ; c'est alors la région traversée que les observateurs auraient eu à choisir.

38. — Si le mouvement du système est périodique, la définition du n° 35 est évidente. On a alors :

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta' \ .$$

et si l'on appelle T la période, on a :

$$\lim_{\Theta=\infty} \frac{\theta}{\Theta} = \frac{\theta'}{\mathrm{T}} \ .$$

Ce ne sera en général pas le cas ; mais Poincaré a démontré que les mouvements des systèmes mécaniques sont quasi périodiques, de sorte qu'on aura, pour de semblables systèmes, en désignant par $\bar{\theta}$ et $\overline{T}$ des valeurs moyennes :

$$\lim_{\Theta=\infty} \frac{\theta}{\Theta} = \frac{\bar{\theta}}{\overline{T}} .$$

Enfin remarquons que pour cette probabilité subjective, il faut nécessairement que la région envisagée de l'hyperespace soit traversée par la trajectoire.

39. — On comprendra maintenant aisément le sens d'une question comme celle-ci : quelle est la probabilité subjective pour qu'il y ait pleine lune aujourd'hui, 15 juillet 1916 ? Le mouvement est quasi périodique. C'est, répondra-t-on, un peu moins de $\frac{1}{27}$. Le hasard est dans le choix de l'époque. Si nous imaginons un grand nombre d'observateurs indépendants les uns des autres, ils fixeront, chacun selon ses circonstances propres, une date qui, en général, différera d'un observateur à l'autre. En moyenne, il y aura pleine lune à peu près une fois sur vingt-sept dates choisies.

40. — On interpréterait de la même façon des questions comme celles-ci : quelle est la probabilité pour qu'il pleuve demain ? Ou encore : quelle est la probabilité pour qu'il y ait éclipse de lune le mois prochain ? citées par Bertrand comme des non-sens.

VI. — Conclusions générales.

41. — Dans le présent essai, nous avons introduit la *loi* comme notion fondamentale *primitive* et le *hasard* comme notion *dérivée*, prenant naissance lorsque la loi se complique de plus en plus ; à la limite, on obtient la loi *infiniment compliquée*, précisée par la *loi des écarts*.

42. — Une loi infiniment compliquée est formée par une suite d'événements que nous considérons comme plus ou moins *indépendants* les uns des autres. Nous avons acquis

un résultat important en reconnaissant que deux événements ne pouvaient être déclarés *rigoureusement* indépendants que s'il fallait une *infinité* d'opérations pour passer de l'un à l'autre. C'est ainsi que nous avons été conduits à la notion de *brassage parfait* et de *loi infiniment compliquée parfaite*. De notre point de vue, le hasard, la complication, l'indépendance, se présentent donc comme des *cas limites*, irréalisables, mais dont on peut s'approcher autant qu'on veut.

43. — Enfin, nous avons vu qu'il était essentiel de distinguer le *hasard objectif* du *hasard subjectif*. Pour le premier, la loi des écarts s'applique aux événements mêmes, qui doivent, à cet effet, former une suite infiniment compliquée. Pour le second, la loi des écarts s'applique à ceux, supposés en grand nombre, qui observent les événements ; ces derniers peuvent se succéder suivant une loi quelconque, simple ou compliquée.

44. — Par ces considérations, on met bien en relief la très grande importance de la notion d'indépendance dans la genèse de l'idée de hasard. Ici, nous l'avons acquise par la complication ; c'est une notion « subjective » ; nous pouvons imaginer des cerveaux de plus en plus puissants, capables d'embrasser facilement des lois de plus en plus compliquées. Le fortuit diminue donc en raison inverse de la puissance du cerveau. Il est du reste certain que le domaine du hasard a beaucoup décru depuis l'antiquité, grâce surtout à la perfection de notre appareil analytique.

Peut-on concevoir l'indépendance engendrée d'une autre façon ? Nous ne pouvons que mentionner ici, à ce propos, la théorie de la relativité d'Einstein, suivant laquelle il est possible, et cela d'une infinité de manières, de trouver des événements qui ne pourront jamais être en relation de cause à effet. Dans cette théorie, il y aurait des indépendances absolues [1].

---

[1] On sait que cette conséquence de la théorie d'Einstein provient du fait que l'on exclut toute transmission de signaux avec une vitesse *infinie*. Cette théorie est donc incompatible avec la conception d'une intelligence infinie (Poincaré) qui serait capable de classer à la fois l'Univers entier *dans son temps*, comme nous classons, *dans notre temps*, le peu que nous voyons. Il faudrait, en effet, que cette intelligence reçût des impressions *simultanées* de tous les coins de l'Univers, quelque éloignés qu'ils soient.