**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 17 (1915)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** DÉMONSTRATION DIRECTE DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

**Autor:** Gonggryp, B.

**Kapitel:** I

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-16319

# DÉMONSTRATION DIRECTE DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

PAR

B. GONGGRYP (Amsterdam).

---

La théorie des équations algébriques présente, à mon avis, une certaine lacune quant à la démonstration du théorème principal : que toute équation d'un degré quelconque (à coefficients réels) possède une racine. En étudiant ce chapitre (c'est-à-dire la théorie des équations algébriques) de l'analyse, il faut d'abord admettre la vérité du théorème, et même, après avoir acquis une notion plus ou moins complète de la nature et des propriétés des équations et de leurs racines, il faut encore recourir à des moyens qui ne touchent la théorie des équations elles-mêmes qu'indirectement, par exemple à la représentation graphique des fonctions de quantités complexes, etc. C'est pour cette raison que les démonstrations données jusqu'à présent ne me semblent pas tout à fait de nature à porter immédiatement la conviction dans l'esprit, et que j'ose demander au lecteur un moment d'attention pour les deux démonstrations suivantes, directes, inductives, toutes deux assez simples, et dont surtout la seconde, par sa simplicité, me semble mériter d'être admise dans un Cours élémentaire d'algèbre supérieure.

## I

En considérant qu'il est d'une extrême facilité de démontrer qu'une équation algébrique d'un degré impair (ayant des coefficients réels) a toujours une racine, laquelle est en outre réelle, il est clair que l'on aura démontré le thèorème dans toute sa généralité du moment où l'on aura su ramener la démonstration pour une équation d'un degré *pair* à celle pour une équation dont le degré est un nombre *impair*. C'est ce que j'ai tâché de faire dans les pages suivantes.

Rien de plus naturel, l'existence des racines de l'équation quadratique étant sûre, que de chercher à comparer aux racines de cette équation paire, fort spéciale, celle de l'équation du $2n^{\text{ième}}$ degré. Or, pour cela on peut se demander s'il est possible de satisfaire à l'équation :

$$x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} + \dots + A_{2n-1} x + A_{2n} = 0 \qquad (1)$$

par les racines de l'équation quadratique

$$x^2 - px - q = 0 ,$$

ou, ce qui revient au même, de démontrer qu'une expression $x^2 - px - q$ peut être un facteur du premier membre de (1).

Posons donc :

$$\begin{aligned} F(x) &\equiv x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} + \dots + A_{2n-1} x + A_{2n} \\ &= (x^2 - px - q)(x^{2n-2} + a_1 x^{2n-3} + a_2 x^{2n-4} + \dots + a_{2n-3} x + a_{2n-2}) . \end{aligned}$$

Au premier coup d'œil, il est évident que cette supposition peut être admise à la condition qu'il soit possible de satisfaire au système d'équations :

$$\left.\begin{aligned}
&a_1 - p = A_1 \\
&a_2 - a_1 p - q = A_2 \\
&a_3 - a_2 p - a_1 q = A_3 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&a_{2n-2} - a_{2n-3} p - a_{2n-4} q = A_{2n-2} \\
&- a_{2n-2} p - a_{2n-3} q = A_{2n-1} \\
&- a_{2n-2} q = A_{2n}
\end{aligned}\right\} \begin{array}{c}\text{ou bien} \\ (A)\dots\end{array} \left\{\begin{aligned}
&a_1 = p + A_1 \\
&a_2 = a_1 p + A_2 + q \\
&a_3 = a_2 p + A_3 + a_1 q \\
&a_4 = a_3 p + A_4 + a_2 q \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&a_{2n-2} = a_{2n-3} p + A_{2n-2} + a_{2n-4} q \\
&a_{2n-2} p + a_{2n-3} q + A_{2n-1} = 0 \\
&a_{2n-2} q + A_{2n} = 0 .
\end{aligned}\right.$$

Or on voit que ce système conduit à exprimer successivement toutes les inconnues $a_1$, $a_2$, etc. en $p$, $q$ et les quantités données $A_1$, $A_2 \ldots A_{2n}$, de telle sorte qu'à la fin on ait deux équations distinctes en $p$ et en $q$ ; et s'il paraît possible de satisfaire à ces deux dernières, tout le système (A) devra être admis, et par conséquent l'existence du facteur $x^2 - px - q$, et enfin celle de *deux racines* de l'équation proposée sera démontrée.

Les expressions consécutives, qu'on obtient pour $a_1$, $a_2$, etc., ont un degré, quant à $p$ et $q$, qu'on trouve dans la table suivante :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| degré de | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | . . . | $a_{2n-3}$ | $a_{2n-2}$ , |
| en $p$ | 1 | 2 | 3 | 4 | . . . | $2n-3$ | $2n-2$ , |
| en $q$ | 0 | 1 | 1 | 2 | . . . | $n-1$ | $n-1$ . |

Les deux dernières équations du système (A) seront donc en $q$ du $n-1^{\text{ième}}$ et du $n^{\text{ième}}$ degré respectivement.

On peut les représenter par :

$$P_1 q^{n-1} + P_3 q^{n-2} + \cdots + P_{2n-3} q + P_{2n-1} = 0 , \tag{2}$$

$$P_0 q^n + P_2 q^{n-1} + \cdots + P_{2n-2} q + P_{2n} = 0 . \tag{3}$$

($P_h$ est un polynome en $p$ du $h^{\text{ième}}$ degré.)

Comme on sait, l'élimination de $q$ entre ces équations peut s'effectuer à l'aide d'une simple application de la théorie des déterminants (méthode de Sylvester).

L'équation résultante en $p$ sera :

$$\begin{vmatrix}
P_1 & P_3 & \cdots & P_{2n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & P_1 & P_3 & \cdots & P_{2n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & P_1 & P_3 & \cdots & P_{2n-1} & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & P_{2n-1} \\
P_0 & P_2 & P_4 & \cdots & P_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & P_0 & P_2 & P_4 & \cdots & P_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & P_0 & P_2 & P_4 & \cdots & P_{2n} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & P_{2n}
\end{vmatrix} = 0.$$

Celle-ci représente la condition à laquelle on peut satisfaire aux équations (2) et (3) par la même valeur de $q$, c'est-à-dire précisément la condition de laquelle dépend la vérité du système (A) et par conséquent l'existence de deux racines de l'équation proposée.

Or, quant à cette équation finale en $p$, nous n'avons besoin que du *degré*. Pour déterminer celui-ci il faut seulement considérer que pour l'élimination (2) a donné $n$ équations et que (3) en a procuré $n - 1$, de sorte que la diagonale du déterminant, se composant de $n$ facteurs $P_1$ et de $n - 1$ facteurs $P_{2n}$, sera une expression, fonction de $p$, du degré :

$$2n(n - 1) + n = n(2n - 1) .$$

Aucun autre terme du déterminant ne peut surpasser le degré de cette diagonale, et une simple vérification fera sauter aux yeux qu'ils ont tous le même degré ; par exemple $P_0^{n-1}\ P_{2n-1}^{n}$ a pour degré $n(2n - 1)$.

Or, ce nombre $n(2n - 1)$ est *impair*, si $n$ possède cette propriété, c'est-à-dire si le degré $2n$ de l'équation proposée est un nombre pair, ne possédant qu'*un seul* facteur 2. Alors il est clair qu'il y aura une racine *réelle* de $p$ satisfaisant à la condition représentée par le déterminant ; qu'ensuite les deux équations (2) et (3) donneront une valeur (réelle également) de $q$ ; qu'en allant plus loin le système (A) peut se vérifier, et qu'enfin l'équation proposée possède actuellement les deux racines de l'équation quadratique : $x^2 - px - q = 0$.

Si le degré de l'équation (1) est un nombre pair, se composant de plus d'un facteur 2, l'expression $n(2n - 1)$ sera encore un nombre pair ; *mais cependant ce nombre aura un facteur* 2 *de moins*. Ceci montre que la question de savoir si une équation d'un degré pair se composant de $h$ facteurs 2 a une racine peut se réduire par notre procédé à la même question pour une équation dont le degré ne se compose que de $h - 1$ facteurs 2. Et comme nous avons démontré qu'une équation d'un degré, ayant un seul facteur 2, possède actuellement une racine, le théorème est démontré dans toute sa généralité.