

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 17 (1915)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** COURBES ET FONCTIONS PANALGÉBRIQUES  
INTERSCENDANTES  
**Autor:** Turrière, E.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-16310>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# COURBES ET FONCTIONS PANALGÉBRIQUES INTERSCENDANTES

PAR

É. TURRIÈRE (Montpellier).

---

Ainsi que ce titre l'indique, je me propose d'apporter ici des contributions nouvelles à la Géométrie des transcendentes, en faisant concourir en quelque sorte la théorie, si brillamment développée par M. GINO LORIA, des courbes panalgébriques et celle, à laquelle je viens de consacrer récemment toute une série de recherches<sup>1</sup>, des courbes algébrico-interscendantes. En raison de la généralité des résultats, je présenterai ces questions sous une forme moins géométrique que celle qu'affectaient mes autres recherches ; je m'attacherai principalement à élucider quelques points assez intéressants touchant diverses fonctions transcendentes et diverses équations différentielles du premier ordre.

1. — *Les origines de la notion d'interscendance.* — Je désire en premier lieu faire connaître quelques résultats concernant des recherches historiques sur l'origine des fonctions interscendantes, en Angleterre notamment. Au moment où la *Royal Society of Edinburgh* s'apprête à célébrer le tricentenaire de la découverte de *John Napier*, il n'est peut-être point sans intérêt de rappeler que la formule

$$\log x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} (x^n - 1)$$

entrevue par les fondateurs de la théorie des logarithmes, *Napier* et *Briggs*, est un exemple bien simple de fonction transcendante proprement dite associée au titre de limite à une fonction algébrico-interscendante.

C'est dans l'œuvre de *Wallis* qu'il convient de chercher les premières fonctions interscendantes, ainsi qu'il affirme lui-même sa

---

<sup>1</sup> *L'Enseignement mathématique*, 1912, 1913, 1914 (passim) — *Annaes da Academia Polytechnica do Porto* 1913, 1914 (passim).

propre priorité, tout en reconnaissant n'avoir pas utilisé de dénomination spéciale, dans sa lettre du 30 juillet 1697, adressée à *Leibniz* : « Quippe ego, praeter potestates olim receptas, puta  
« *latus, quadratum, cubum, etc...* potestates intermedias censui  
« considerandas (et, credo, primus) ; et consequenter, inter recep-  
« tas aequationum analyticarum formulas... intelligendas esse,  
« intermedias quotlibet ; quas (credo) nemo prius consideravit ;  
« quales sunt (ni fallor) quas tu *intercendentes* vocas. »

« Aequationum transcendentium et intercendentium appella-  
« tiones mihi non displicent ; (imo ut valde appositae) ; qualibus  
« et ego aliquando utor aequationibus, sed absque nomine. »

Effectivement, on trouve diverses allusions à des quantités de cette nature dans les travaux de *Wallis*. C'est ainsi qu'après avoir écrit les lignes suivantes : « Quod intellectum velim, non tantum  
« de (expositorum arithmetice proportionalium) quadratis, cubis,  
« caeterisque potestatibus ascendentibus ; sed de eorum radicibus  
« quadraticis, cubicis, et item de compositis ex his aut illis aut  
« utrisque ; et horum omnium reciprocis<sup>1</sup> », il cite<sup>2</sup>  $a^{\sqrt{2}}$  comme exemple de puissance. Puis, plus loin<sup>3</sup>, il s'explique avec encore plus de précision : « Si tamen exponens ille, seu numerus dimen-  
« sionum secundum quas proceditur, major fuerit, (puta 7, 8, 9)  
« aut intermedius aliquis (ut  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{4}{3}$ , ...) aut magis adhuc intri-  
« catus (ut  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  ..) ... »

Il faut passer à *Newton* pour trouver, dans son œuvre, une dénomination spéciale pour les quantités intercendantes. L'exemple des quantités appelées « geometrice irrationalia » par *Newton* et qui se trouve dans la célèbre lettre à *Oldenburg*, du 24 octobre 1676, est une fonction intercendante assez compliquée :

« Communicatio resolutionis affectarum aequationum per  
« methodum *Leibnitii*, pergrata erit ; juxta et explicatio quomodo  
« se gerat, ubi indices sunt fractiones ; ut in hac aequatione

$$20 + x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{6}{5}} y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{7}{11}} = 0 ;$$

« aut surdae quantitates, ut in hac,

$$(x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}) \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = y ,$$

<sup>1</sup> JOHANNIS WALLIS, Opera omnia, Oxoniae, 1693, operum mathematicorum volumen alterum, p. 314.

<sup>2</sup> *Id.* p. 315.

<sup>3</sup> *Id.*, p. 341. — Le second volume contient lui aussi (cf. p. 2 de la Préface) plusieurs lettres « de æquationibus et notationibus intercendentibus et transcendentibus ».

« ubi  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{7}$  non designant coefficientes ipsius  $x$ , sed indicès  
 « potestatum seu dignitatis ejus ; et  $\sqrt{[3]\frac{2}{3}}$  » (c'est-à-dire  $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ )  
 « indicem dignitatis binomii  $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$ . Res, credo, mea me-  
 « thodo patet ; aliter descripsissem. »

Mais, quoique l'exemple qu'il donne, dans cette lettre, soit une courbe interscendante, *Newton* désigne indifféremment sous la dénomination « *geometrice irrationales* » toutes les courbes non-algébriques, les courbes transcendantes proprement dites aussi bien que les courbes interscendantes. C'est, par exemple, ce que prouve le texte suivant : « *Curvas geometrice rationales appello*  
 « *quarum puncta omnia per longitudines aequationibus definitas, id*  
 « *est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt ;*  
 « *caeterasque (ut spirales, quadratrices, trochoides) geometrice*  
 « *irrationales. Nam longitudines quae sunt vel non sunt ut nume-*  
 « *rus ad numerum (quemadmodum in decimo elementorum) sunt*  
 « *arithmetice rationales vel irrationales. Aream igitur ellipseos*  
 « *tempori proportionalem abscindo per curvam geometrice irra-*  
 « *tionalem ut sequitur*<sup>1</sup>. »

Ce fut *Leibniz* qui, le premier (ainsi qu'il l'affirme d'ailleurs, lui-même) distingua les deux sortes de courbes ou fonctions non-algébriques et introduisit les dénominations de *transcendantes*<sup>2</sup> et

<sup>1</sup> I. NEWTON, *Philosophiae Naturalis Principia*, t. I, ed. 1739, p. 268-269. — Les notes au bas de ces pages, sont encore plus précises : « Si in aequatione ad curvam

$$ax^m + by^n + \text{etc.} = 0 ,$$

« numerus terminorum finitus sit et exponentes  $m, n, \dots$  rationales fuerint, curva erit geometrice rationalis ; contra si numerus terminorum infinitus fuerit, et summari nequeant, aut si  
 « exponens aliquis irrationalis fuerit, curva est geometrice irrationalis.

« Hinc patet curvas omnes quarum descriptio pendet a quadratura vel rectificatione circuli et ovalium indefinita quales sunt spirales, quadratrices, trochoides esse geometrice irrationales... »

<sup>2</sup> Quoique je me borne actuellement à l'histoire des origines de la notion d'interscendance, je crois nécessaire, afin d'éviter toute discussion relative à cette affirmation, de reproduire un passage d'un travail (*La notion de transcendance géométrique chez Descartes et Leibniz. L'interscendance leibnizienne et l'hypertranscendance*) qui vient de paraître, sous mon nom, dans *Isis* (t. II, pp. 106-124) : « Sa (il s'agit de *Descartes*) distinction en « courbes géométriques » et en « courbes mécaniques » diffère beaucoup de celle qui est actuellement en usage. *DESCARTES* pouvait-il apercevoir toute l'importance d'une division des courbes, alors qu'il n'avait pas la moindre idée de l'Analyse infinitésimale ? Il ne fait d'ailleurs allusion, sans insister, que deux fois aux courbes de degré infini, *LEIBNIZ* et les *BERNOULLI* devaient, au contraire et de toute nécessité, être amenés, par leurs travaux d'analyse, à découvrir et à préciser la notion de transcendance des fonctions et des courbes correspondantes à ces fonctions.

Plusieurs auteurs ont attribué à juste titre l'introduction de cette notion de courbe transcendante à *LEIBNIZ*, tout en laissant à Jean *BERNOULLI* l'honneur de la création du terme « transcends », pour désigner certaines fonctions non-algébriques simples. Il est probable que cette dernière assertion a son origine dans le texte suivant, qui est de mars 1697. « *Exponentialem igitur quantitatem concipiebam ut medium quid inter algebraicam et transcendentem : accedit enim ad algebraicam, eo quod terminis finitis, ut indeterminatis, constet ; ad transcendentem vero, quod nulla constructione algebraica exhiberi potest.* » [*Principia calculi exponentialium seu percurrentium, Acta eruditorum, ad annum 1697 ; Opera Johannis Bernoullii, t. I, pp. 180 et Sq.* Le terme « transcends » reparait aussi chez le même auteur dans une pièce de 1724 (*Acta Eruditorum ad annum 1724, p. 365 ; Opera, t. 2, Lausanne et*



d'*interscendantes*, dans une lettre à Wallis, du 28 mai 1697, dont voici le passage important :

Caeterum *Transcendentium* appellationem, nequid a me praeter rationem in phrasi Geometrica novari putes, sic accipio ut transcendentes quantitates opponam ordinariis et algebraicis : et algebraicas quidem vel ordinarias voco quantitates, quarum relatio ad datas exprimi potest algebraice, id est, per aequationes certi gradus, primi, secundi, et tertii, etc., quales quantitates *Cartesius* solas in suam Geometriam recipiebat ; sed *transcendentes* voco, quae omnem gradum algebraicum transcendunt.

Has autem exprimimus, vel per valores infinitos, et in specie per series, vel., per aequationes finitas ; easque vel differentiales vel exponentiales (ut cum incognita quaedam  $x$  exprimitur per hanc aequationem

$$x^x + x = 1 .$$

Et quidem transcendentium exponentialem, pro perfectissima habeo ; quippe, qua obtenta, nihil ultra quaerendum restare arbitror ; quod secus est in ceteris.

Primus autem, ni fallor, etiam *exponentiales* aequationes introduxi, cum ignota ingreditur exponentem. Et jam anno primo <sup>1</sup>

Genève, 1742, p. 591 ; t. III, p. 74.)] Mais le mot « *transcendens* » fut employé par LEIBNIZ lui-même dans des textes antérieurs de plusieurs années et qui sont mentionnés dans la suite.

C'est vers 1677, date de la création du Calcul différentiel de LEIBNIZ, qu'apparaissent des courbes à équations compliquées d'irrationalités. Tandis que BARROW n'étendit point, en effet, sa méthode des tangentes à de telles courbes, LEIBNIZ, dans sa lettre à OLDENBURG du 21 juin 1677, expose précisément les règles de son nouveau calcul en les appliquant à des exemples de cette nature. Le terme « *transcendens* » apparaît sous sa plume dans une pièce de 1679, où il distingue les « *curvae transcendentes* » des « *curvae transcendentes altiores* », et, plus loin à propos des quantités incommensurables : « *caequae sunt vel algebraicae vel transcendentes* » [Cfr. COUTURAT, Opuscules et fragments inédits de LEIBNIZ, Paris, 1903, p. 164.] Dans un texte ultérieur, de janvier 1682, LEIBNIZ précise la notion de transcendance, en distinguant formellement trois sortes de transcendances, « *Quadratura analytica... iterum in tres potest dispesci ; in Analyticam transcendentem, Algebraicam et Arithmeticam* », et en faisant observer que personne avant lui n'avait considéré des fonctions de degré infini, c'est-à-dire des fonctions transcendentes : « *Analytica transcendens inter alia habetur per aequationes gradus indefiniti, hactenus à nemine consideratas, ut si sit*

$$x^x + x \text{ aequal. } 30 ;$$

« et quaeratur  $x$ , reperietur esse 3, quia  $3^3 + 3$  est  $27 + 3$  sive 30, quales aequationes dabitur suo loco. » Un texte de mai 1684 est encore plus important : LEIBNIZ y donne une liste étendue de courbes, en insistant sur leur algèbricité ou leur transcendance : « *Verum sciendum est istas ipsas (curvas) que ut Cycloidem, Logarithmici aliasque id genus, quae maximos habent usus, posse calculo et aequationibus etiam finitis exprimi, at non Algebraicis seu certi gradus, sed gradus indefiniti, sive transcendentis... ac proinde quadratrix non erit algebraica seu certi gradus, sed transcendens...* »

<sup>1</sup> C'est-à-dire en 1682. Mais déjà, dans sa lettre à OLDENBURG, du 21 juin 1677, Leibniz avait considéré des expressions de cette nature : « *Sunt et alia problematum genera, écrit-il, quae hactenus in potestate non habeo, quorum ecce exempla : sint duae aequationes*

$$x^y + y^x = xy$$

« et

$$x^x + y^y = x + y ;$$

*Actorum Eruditorum Lipsiensium*, specimen dedi in exemplo quantitatis ordinariæ, transcendentaliter expressæ; ut res fieret intelligibilior; nempe, si quaeratur

$$x^x + x = 30$$

patet  $x = 3$  satisfacere; cum sit  $3^3 + 3 = 27 + 3 = 30$ .

P.-S. Unum addo: placuisse mihi phrasin acutissimi *Newtoni*, qui *Geometrice-Irrationalia* vocat, quæ *Cartesius* in Geometriam suam non recipit. Sed hæc à *Transcendentibus* distinguo, tanquam genus à specie. Nam illa *geometrice-irrationalia* duùm generum facio. Alia enim sunt gradûs certi, sed irrationalis; quorum exponens est numerus surdus, ut

$$\sqrt[2]{2}$$

seu potestas de 2 cujus exponens sit  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ; et hæc voco *Interscendentia*; quia gradus eorum cadit inter gradus rationales: possent etiam, strictiore sensu, geometrice (vel, si mavis algebraice) irrationalia appellari. Alia vero sunt gradus indefiniti, ut  $x^y$ ; et hæc magis proprie *Transcendentia* appello. Et tale problema est, *Rationalem vel Angulum in data ratione secare*.

2. — *Position de la constante arbitraire d'intégration dans l'intégrale générale d'une équation différentielle, rationnelle, du premier ordre qui admet une intégrale interscendente.* — Soit

$$(1) \quad E(x, y, y') = 0$$

une équation différentielle du premier ordre, supposée algébrique par rapport aux trois variables  $x$ ,  $y$  et  $y' = \frac{dy}{dx}$ . Les coefficients numériques qui figurent dans son premier membre sont absolument quelconques; le paramètre  $m$  peut, par exemple, figurer explicitement dans cette équation différentielle *au titre de coefficient*. Je suppose, en outre, que cette équation différentielle (1) admet une intégrale *particulière* interscendente, définie par une équation

$$(2) \quad f(x, y, x^m) = 0$$

algébrique par rapport aux variables  $x$ ,  $y$  et  $x^m$ ; les coefficients sont absolument quelconques;  $m$  est un paramètre *irrationnel*

---

« duæ sunt incognitæ  $x$ ,  $y$ , duæque ad eas inveniendas æquationes. Quæritur valor tam unius quam alterius litteræ. Talia problemata vel in numeris vel in lineis solvere difficillimum arbitror. Si tamen de appropinquationibus agatur, puto posse iis satisfieri. Si quam huic difficultati lucem affere potest *NEWTONUS*, pro ea qua pollet ingenii vi, multum analysim promovebit... »

déterminé. Dans ces conditions, j'affirme que l'intégrale *générale* de l'équation différentielle (1) est définie par l'équation

$$f(x, y, Cx^m) = 0,$$

dans laquelle  $C$  est la constante arbitraire d'intégration.

De (2), en effet, on déduit par dérivation :

$$(3) \quad f_1 + f_2 y' + f_3 \cdot \frac{mx^m}{x} = 0,$$

en posant :

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_3 = \frac{\partial f}{\partial (x^m)};$$

d'où, en substituant, dans l'équation différentielle (1), l'expression de  $y'$  déduite de (3) et en vertu de l'hypothèse faite sur  $f$ :

$$(4) \quad E\left(x, y, -\frac{f_1}{f_2} - \frac{f_3}{f_2} \cdot \frac{mx^m}{x}\right) = 0;$$

en éliminant alors  $y$  entre (2) et (4), on doit obtenir un résultant  $R(x, x^m)$  identiquement nul. Comme, *a priori*, il ne peut y avoir aucune relation *algébrique* de cette nature entre  $x$  et  $x^m$  (puisque  $m$  est irrationnel), il est certain que cette identité  $R = 0$  subsistera si l'on substitue à  $x^m$ , dans tous les calculs qui précèdent, l'expression  $Cx^m$  (avec une constante arbitraire  $C$ ).

On peut évidemment remplacer, sans augmenter la généralité de la question,  $x^m$  par  $[\varphi(x)]^m$ ,  $\varphi(x)$  étant une fonction algébrique de la variable  $x$ . Le théorème est d'ailleurs presque immédiat lorsqu'on particularise la question, en supposant l'existence d'une intégrale particulière définie par une équation du type

$$[\varphi(x, y)]^m = f(x, y),$$

$\varphi$  et  $f$  étant des fonctions algébriques ; pour éliminer la transcendance, il suffit de dériver logarithmiquement cette relation et l'on obtient ainsi l'équation différentielle rationnelle à laquelle satisfait  $y$  ; l'intégrale générale de celle-ci est évidemment :

$$C \cdot [\varphi(x, y)]^m = f(x, y).$$

Du raisonnement qui précède, il résulte que :

1° Moyennant l'hypothèse de l'existence d'une intégrale particulière interscendante  $f = 0$ , l'équation différentielle (1) admet une intégrale générale interscendante, dont l'interscendance est due à la présence de la même puissance irrationnelle  $x^m$  de  $x$  ;

2° La constante arbitraire  $C$  d'intégration est en facteur devant  $x^m$ ;

3° L'intégrale générale de  $E = 0$  est connue sans aucun calcul, dès que l'on connaît une intégrale interscandante particulière ;

4° Une équation différentielle du premier ordre, de la nature de celle qui vient d'être étudiée, peut admettre des intégrales algébriques particulières. Celles-ci sont de deux espèces distinctes ; provenant de  $C = 0$  et de  $C = \infty$ . Il suffira d'étudier dans chaque cas particulier, deux surfaces algébriques d'équations

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad f\left(x, y, \frac{1}{z}\right) = 0,$$

au voisinage du plan  $Z = 0$ .

3. — *Équations de Riccati à intégrales algébrico-interscandantes.* — Je vais d'abord donner un exemple simple d'équation rationnelle de Riccati dont toutes les intégrales sont interscandantes, à l'exception de deux intégrales particulières qui sont algébriques. Je rappelle que l'étude des équations de Riccati proprement dites

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = K \cdot x^\alpha$$

est particulièrement intéressante lorsque l'exposant  $\alpha$  affecte l'une ou l'autre des formes

$$\alpha = -\frac{4N}{2N \pm 1}$$

$N$  étant un nombre entier ; lorsque ce nombre  $N$  grandit indéfiniment,  $\alpha$  tend vers la limite  $-2$ . Je considère donc cette équation de Riccati :

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{K}{x^2},$$

dans laquelle  $K$  est un nombre algébrique quelconque. Dans le cas particulier pour lequel  $K$  est égal à l'unité, c'est-à-dire dans le cas de l'équation

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{1}{x^2},$$

l'intégrale générale est <sup>1</sup>

$$(2) \quad \frac{2xy - (1 + \sqrt{5})}{2xy - (1 - \sqrt{5})} x^{\sqrt{5}} = \text{const.} ;$$

c'est donc une fonction interscandante, particulière, dont l'interscandance est due à la présence de la quantité irrationnelle  $\sqrt{5}$ .

<sup>1</sup> RAFFY, *Nouvelles Annales* [4], t. II, 1902, p. 545.

Dans le cas général de l'équation (1), il est naturel, en raison de la forme même de cette équation, de rechercher des intégrales particulières de la forme :

$$y = \frac{A}{x} ;$$

on trouve la condition :

$$A^2 - A = K ;$$

c'est une équation de second degré par rapport à la constante A. En général donc, il existe deux intégrales particulières de la forme désirée.

Les deux racines sont réelles lorsque la quantité  $4K + 1$  est positive. Soit  $4K + 1 = m^2$  ; les deux racines sont alors :

$$A_1 = \frac{1 + m}{2} , \quad A_2 = \frac{1 - m}{2} ;$$

pour intégrer l'équation (1), c'est-à-dire l'équation

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{m^2 - 1}{4x^2} ,$$

conformément à la méthode classique d'intégration des équations de Riccati dont deux intégrales particulières sont connues, il faut donc poser

$$\frac{2xy - 1 - m}{2xy - 1 + m} = z ;$$

la nouvelle fonction inconnue  $z$  est alors l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{1}{z} \frac{dz}{dx} + \frac{m}{x} = 0 ,$$

c'est-à-dire la fonction

$$z = x^{-m} \times \text{const} .$$

L'intégrale de l'équation (3) est donc

$$(4) \quad \frac{2xy - 1 - m}{2xy - 1 + m} \cdot x^m = \text{const} ;$$

pour  $K = 1$ , c'est-à-dire pour  $m = \sqrt{5}$ , cette forme générale (4) se réduit bien à celle (2) qui a été trouvée par RAFFY.

L'équation du second degré qui détermine les deux intégrales particulières admet une racine double lorsque  $K$  est égal à  $-\frac{1}{4}$ ,

c'est-à-dire lorsque  $m = 0$  ; l'équation correspondante

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} + y^2 = -\frac{1}{4x^2}$$

admet une seule intégrale particulière connue *a priori* :

$$y = \frac{1}{2x} .$$

En posant  $y = \frac{1}{2x} + z$  et intégrant l'équation de Bernoulli qui définit la fonction auxiliaire  $z$ , on trouve pour intégrale générale

$$(6) \quad y = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x \log(Ax)} ;$$

$A$  est la constante arbitraire d'intégration.

Reste le cas des racines imaginaires ; on a alors :  $K < -\frac{1}{4}$ . L'intégrale générale est encore fournie par l'équation (4), dans laquelle  $m$  est une quantité imaginaire pure. L'imaginaire ne s'introduit qu'en apparence dans cette équation (4) et il y a lieu de la faire disparaître. A cet effet, il suffit de poser

$$m = 2i\mu ,$$

$\mu$  étant un nombre réel, et de mettre (4) sous la forme

$$\frac{2xy - 1 - 2i\mu}{2xy - 1 + 2i\mu} = (Ax)^{-2i\mu} ; \quad (A \text{ const. réelle})$$

en résolvant par rapport à l'expression  $2xy - 1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} 2xy - 1 &= 2i\mu \cdot \frac{1 + (Ax)^{-2i\mu}}{1 - (Ax)^{-2i\mu}} = 2i\mu \cdot \frac{(Ax)^{i\mu} + (Ax)^{-i\mu}}{(Ax)^{i\mu} - (Ax)^{-i\mu}} \\ &= 2\mu \cdot \frac{(Ax)^{i\mu} + (Ax)^{-i\mu}}{2} : \frac{(Ax)^{i\mu} - (Ax)^{-i\mu}}{2i} \\ &= 2\mu \cdot \cos(\log Ax) : \sin(\log Ax) . \end{aligned}$$

Finalement, l'équation de Riccati admet alors l'intégrale générale représentée par l'équation

$$(7) \quad 2xy - 1 = 2\mu \cotang(\log Ax) .$$

Éclairons ces divers résultats à l'aide de la théorie de l'inter-scendance. Imposons à la constante arbitraire d'intégration une valeur particulière, l'unité par exemple, ce qui n'altère en rien la

généralité des courbes intégrales qui sont affines à celles que nous allons envisager : suivant que le nombre  $m = \sqrt{1 + 4K}$  est rationnel ou irrationnel, l'intégrale correspondante est la courbe algébrique ou interscendante que représente l'équation :

$$(8) \quad \frac{2xy - 1 - m}{2xy - 1 + m} \cdot x^m = 1.$$

Lorsque  $m$  tend vers zéro, d'une manière quelconque, cette courbe algébrique-interscendante (8) tend vers une limite ; son équation, mise sous la forme

$$2xy - 1 = m \cdot \frac{1 + x^{-m}}{1 - x^{-m}} = (1 + x^{-m}) \cdot \frac{m}{1 - x^{-m}},$$

tend vers la limite

$$(9) \quad 2xy - 1 = \frac{2}{\log x},$$

puisque les deux facteurs mis en évidence ont respectivement pour limites l'unité et l'inverse du logarithme de  $x$ .

La courbe transcendante d'équation (9), à laquelle sont affines les diverses courbes (6), est donc la *courbe singulière limite* du faisceau algébrique-interscendant envisagé.

D'après la formation même de l'équation (7), la courbe d'équation

$$2xy - 1 = 2\mu \cotang (\log x)$$

est susceptible d'être associée au même faisceau au moyen de la considération de la notion d'interscendance complexe.

4. — Une autre classe d'équations de Riccati, douées de deux intégrales particulières algébriques, et dont l'intégrale générale est algébrique-interscendante est celle

$$y' + y^2 = \frac{A}{(a + 2bx + cx^2)^2}, \quad (A \neq ac - b^2)$$

$A, a, b, c$  étant des constantes. Elle fut étudiée primitivement par EULER<sup>1</sup>, puis par J. LIOUVILLE, sous le pseudonyme de M. BESGE<sup>2</sup>. Plus récemment, elle a été rencontrée, indépendamment et dans un cas particulier, dans des recherches de Géométrie infinitésimale, par M. G. DEMARTRES<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> L. EULER, Mémoires de Saint-Petersbourg, t. III, 1809 et 1810.

<sup>2</sup> M. BESGE, Sur l'équation  $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{Au}{(a + 2bx + cx^2)^2}$  (Journal de Mathématiques pures et appliquées de Liouville, 1844, 1<sup>re</sup> série, t. 9, p. 336.)

<sup>3</sup> G. DEMARTRES, Sur certaines familles de courbes orthogonales et isothermes [Travaux et Mémoires de l'Académie de Lille, t. X, Mémoire n° 28, Lille, au siège de l'Université, 1901 (p. 10 de l'extrait).]

On remarque tout d'abord que l'équation proposée admet deux intégrales algébriques

$$y = \frac{b + k + cx}{a + 2bx + cx^2},$$

où  $k$  est l'une ou l'autre des racines  $k_1, k_2$  de la quantité, différente de zéro par hypothèse :  $k^2 = A + b^2 - ac$ .

Il en résulte qu'en appelant  $y_1$  et  $y_2$  les deux intégrales algébriques particulières, correspondant respectivement à  $k_1 < 0$  et à  $k_2 > 0$ , et posant, conformément à la théorie générale,

$$z = \frac{y - y_1}{y - y_2},$$

l'intégration de cette équation de Riccati est réductible à une quadrature :

$$\log z = \int (y_2 - y_1) dx = 2 \sqrt{A + b^2 - ac} \int \frac{dx}{a + 2bx + cx^2}.$$

Suivant donc les signes des quantités

$$b^2 - ac \quad A + b^2 - ac$$

on aura des intégrales véritablement algébrico-interscendantes ou interscendantes généralisées par voie complexe.

C'est à ce dernier type d'équations que se rattache celle qu'avait rencontrée M. G. DEMARTRES ; elle peut être écrite,

$$y' + y^2 = \frac{1 + a^2}{(1 + x^2)^2}$$

$a$  désignant une constante non-nulle ; elle a deux intégrales particulières

$$y_1 = \frac{x - a}{1 + x^2}, \quad y_2 = \frac{x + a}{1 + x^2},$$

d'où son intégrale générale donnée par l'équation

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = z = e^{2a \cdot \arctan x};$$

c'est bien une interscendante généralisée. Elle dépend d'une fonction remarquable sur laquelle je vais revenir dans un instant.

5. — Après avoir signalé ces exemples divers d'équations de Riccati admettant des intégrales algébrico-interscendantes, je ferai connaître une propriété générale caractéristique des équations de Riccati douées d'intégrales de cette espèce. Je considé-



rerai à cet effet une fonction interscendante définie par une équation

$$(1) \quad C \cdot [f(x)]^m = \frac{Py + Q}{Ry + S} ;$$

$m$  est le paramètre irrationnel auquel est due l'interscendance ;  $C$  est une constante arbitraire ;  $f(x)$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  et  $S$  sont cinq fonctions de la seule variable  $x$ , essentiellement algébriques ;  $PS - QR$  n'est pas identiquement nul ; le paramètre irrationnel  $m$  peut d'ailleurs, sans inconvénient, intervenir comme coefficient dans ces fonctions algébriques.

En dérivant logarithmiquement l'équation, on obtient

$$m \cdot \frac{f'}{f} = \frac{y'(PS - QR) + y^2(P'R - PR') + y(P'S - PS' + Q'R - QR') + Q'S - QS'}{(Py + Q)(Ry + S)} ;$$

Ce résultat de calcul prouve donc que : *Lorsqu'une fonction interscendante  $y$  de  $x$  est une fonction homographique d'une puissance irrationnelle d'une fonction algébrique  $f(x)$  de  $x$ , les coefficients de la fonction homographique étant des fonctions algébriques de  $x$ , cette fonction  $y$  est panalgébrique. L'équation différentielle du premier ordre rationnelle associée est une équation de Riccati.*

L'équation de Riccati précédente admet comme intégrale générale la fonction  $y$  définie par la relation (1), où  $C$  est la constante arbitraire. Parmi cette infinité d'intégrales interscendantes, se trouvent deux (et deux seulement) intégrales algébriques : ce sont les fonctions

$$y = -\frac{Q}{P} \quad \text{et} \quad y = -\frac{S}{R} ;$$

Réciproquement, une équation rationnelle quelconque de Riccati n'admettra pas d'intégrale particulière interscendante. Si elle en admet une, elle en admet une infinité. En vertu du théorème général sur les fonctions panalgébriques interscendantes, et du théorème général concernant la position de la constante dans l'intégrale générale des équations de Riccati, l'équation actuellement envisagée est nécessairement du type qui vient d'être étudié. Elle admettra donc deux intégrales rationnelles particulières. C'est donc parmi les équations de Riccati douées de deux intégrales particulières algébriques qu'il convient de rechercher celles dont l'intégrale générale est interscendante.

6. — *Sur certaines fonctions interscendantes généralisées par voie complexe.* J'ajouterai quelques remarques utiles et bibliogra-

phiques concernant l'extension par voie complexe de la notion de courbe interscendante dont je me suis déjà occupé<sup>1</sup>.

Cette classe de fonctions transcendantes comprend celles qui sont de la forme

$$\exp. [F(\varphi)]$$

$F(\varphi)$  étant elle-même une fonction circulaire inverse d'une fonction  $\varphi$ , algébrique en  $x$ . C'est le cas de la fonction  $\exp(\operatorname{arctang} x)$  que j'ai rencontrée plus haut, dans l'étude d'une certaine équation de Riccati.

LAGUERRE<sup>2</sup> a, d'autre part, étudié une fonction analogue,  $F$  étant  $\operatorname{arc tang} \frac{1}{x}$ . Le mémoire de LAGUERRE prend fin sur l'observation que les considérations relatives à la fonction  $\exp\left(\operatorname{arctang} \frac{1}{x}\right)$  s'appliquent sans aucun changement à la fonction (précisément algébrico-interscendante)

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^m,$$

quelles que soient les valeurs attribuées aux quantités  $a$ ,  $b$  et  $m$ ; *Laguerre* fait observer enfin que, pour  $a=i$ ,  $b=-i$ ,  $m=-\frac{i}{2}$ , cette expression donne la fonction qu'il étudie.

EULER<sup>3</sup> a donné le développement en série entière de la fonction

$$y = e^{\operatorname{arc sin} x}.$$

Ces développements en série peuvent être obtenus très simplement en observant que ces diverses fonctions sont des extensions de fonctions interscendantes. La fonction

$$y = e^{\operatorname{arc tang} x}$$

rentre, par exemple, dans la famille algébrico-interscendante

$$y = \left(\frac{1-mx}{1+mx}\right)^{\frac{m}{2}},$$

<sup>1</sup> *Sur la notion de courbe interscendante* (Extrait d'une lettre adressée à M. Gomes Teixeira), *Annaes da Academia Polytechnica do Porto*, publicados sob a direcção de F. GOMES TEIXEIRA, t. VIII, 1913.

<sup>2</sup> E. LAGUERRE, Sur le développement en fraction continue de  $\exp\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)$ , *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. V, 1877, p. 95; *œuvres de Laguerre*, t. 1, 1898, pp. 291-294.

<sup>3</sup> L. EULER. *Institutiones Calculi integralis*, ed. 1748, Liber I, Caput III, p. 118.

pour  $m = i$ . On peut donc déduire son développement en série de celui de la fonction plus simple

$$\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^m.$$

De même, pour la fonction mentionnée par EULER,

$$y = e^{\arcsin x},$$

il résulte de son expression sous forme interscendante

$$y = (\sqrt{1-x^2} - ix)^i$$

qu'elle rentre dans la famille algébrico-interscendante :

$$(x + \sqrt{1+x^2})^n,$$

en changeant  $x$  en  $-ix$  et en posant  $n = i$ . Cette dernière fonction fut elle aussi étudiée par EULER (*loc. cit.*); il a donné sa primitive :

$$\int (x + \sqrt{1+x^2})^n dx = \frac{(x + \sqrt{1+x^2})^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{(x + \sqrt{1+x^2})^{n-1}}{2(n-1)};$$

cette fonction est encore une fonction algébrico-interscendante.

On peut se rendre compte aussi de cette manière de la panalgébricité de ces fonctions (malgré la présence de deux fonctions transcendentes dans leur constitution) et de celle des fonctions primitives de certaines d'entre elles : de celle qui vient d'être citée et des suivantes, par exemple :

$$\frac{e^{a \cdot \arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \frac{xe^{a \cdot \arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dont les primitives respectives sont :

$$\frac{a+x}{(1+a^2)\sqrt{1+x^2}} e^{a \cdot \arctan x}, \quad \frac{ax-1}{(1+a^2)\sqrt{1+x^2}} e^{a \cdot \arctan x}.$$

Ce sont là des fonctions mentionnées, comme exercices, dans des ouvrages d'analyse du milieu du siècle dernier : je suis donc porté à croire qu'elles ont été extraites de travaux antérieurs et qu'elles doivent intervenir dans des applications, mais toutes mes recherches dans ce sens sont restées sans résultat.

Montpellier, le 22 février 1914.