Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 17 (1915)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA TRIGONOMÉTRIE DANS SES RAPPORTS AVEC LA GÉOMÉTRIE

Autor: Streit, Arnold

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16317

nos lycées des départements ; ce témoignage n'était pas nécessaire à ceux qui connaissent vos élèves pour les avoir interrogés aux examens d'entrée des écoles, mais, à une époque où les enquêtes et les comparaisons internationales sont à la mode, il n'était pas superflu de rappeler que, par le niveau des études mathématiques, un grand nombre de nos lycées (qui ne sont pas tous dans des villes d'Universités) doivent être mis sur le même plan que bien des Universités étrangères, où les matières que vous enseignez font généralement partie des programmes des premières années. »

A ce juste hommage rendu par M. Borel à des maîtres éminents, il convient d'ajouter que leur tâche serait impossible sans le talent et le dévouement des maîtres qui, prenant pour ainsi dire les élèves par la main lors de leur entrée au lycée, les conduisent, sans jamais se laisser rebuter par leurs défaillances, au seuil de ces classes vers lesquelles se tournaient leurs regards dès leurs jeunes années.

LA TRIGONOMÉTRIE DANS SES RAPPORTS AVEC LA GÉOMÉTRIE

PAR

Arnold Streit (Berne).

I. — Introduction.

Dans la présente étude, nous donnerons d'abord une nouvelle démonstration des formules de $\sin(\alpha \pm \beta)$ et $\cos(\alpha \pm \beta)$ basée sur un théorème de géométrie et son corollaire. Puis nous appliquerons ces formules, celles qui en découlent et d'autres formules de *trigonométrie* à la *géométrie*, ce qui nous permettra de retrouver les relations de théorèmes importants de géométrie, entre autres celles des théorèmes de *Pythagore*, de *Pythagore généralisé*, de *Céva*, de *Ménélaüs*, de *Ptolémée* et d'établir des théorèmes nouveaux.

Notations. — Nous désignerons les sommets d'un triangle par A, B, C; les côtés opposés respectivement par a, b, c; les hauteurs correspondantes par h', h'', h''' et les angles par α, β, γ.

Les segments, déterminés par les hauteurs, qu'il faut suivre pour aller de A vers B, puis de B vers C, et enfin de C vers A seront appelés $c'c''$ (sur c), $a'a''$ (sur a), $b'b''$ (sur b).

II. — Formules de sin $(\alpha \pm \beta)$ et cos $(\alpha \pm \beta)$.

Démonstrations basées sur un théorème de géométrie et son corollaire.

A. — *Formule du sinus de la somme de deux arcs. — La somme de deux angles d'un triangle quelconque et le 3e angle étant supplémentaires,* leurs sinus sont égaux :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma \ . \tag{1}$$

Il est donc tout naturel de partir de cette relation pour chercher à établir une nouvelle démonstration de la formule du sinus de la somme de deux arcs. D'après la fig. 1 :

$$\sin\gamma = \frac{h'}{b} \ .$$

La relation (1) devient :

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{h'}{b} \ .$$

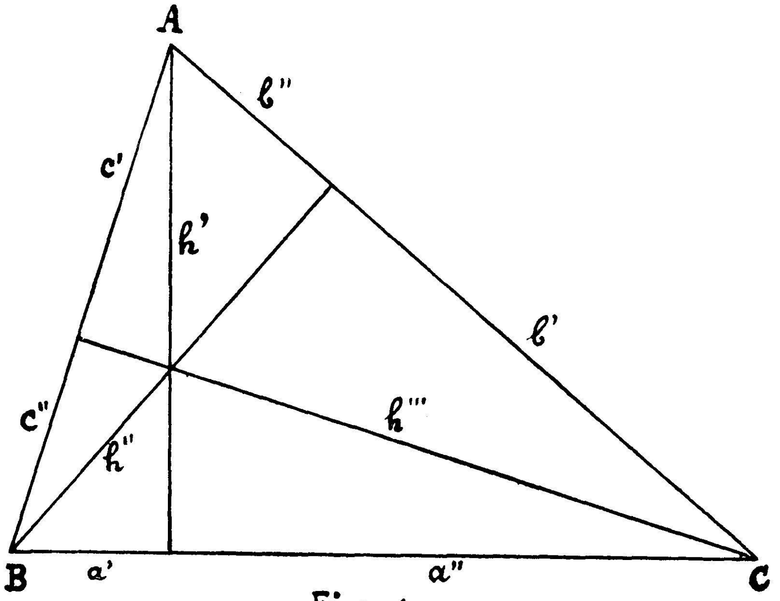

Fig 1.

On a successivement

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{h'.c}{b.c} = \frac{h'(c' + c'')}{b.c} = \frac{h'}{c} \cdot \frac{c' + c''}{b} \ .$$

Mais

$$\frac{h'}{c} = \frac{h'''}{a}.$$

Par suite

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{h'''}{a} \cdot \frac{c' + c''}{b} = \frac{h''' c''}{ab} + \frac{h''' c'}{ab},$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{h'''}{b} \cdot \frac{c''}{a} + \frac{c'}{b} \cdot \frac{h'''}{a}.$$

ou

$$\text{(I)} \qquad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

B. — *Formule du cosinus de la somme de deux arcs.* — α, β et γ étant les angles d'un triangle, nous avons :

$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma.$$

La figure 1 donne

$$\cos\gamma = \frac{a''}{b},$$

d'où, en remplaçant :

$$\cos(\alpha + \beta) = -\frac{a''}{b} = -\frac{aa''}{ab}.$$

Nous établirons plus loin la relation suivante :

$$h'''^2 = c'c'' + aa'',$$

d'où

$$aa'' = h'''^2 - c'c''.$$

Substituons ci-dessus :

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{c'c'' - h'''^2}{ab} = \frac{c'}{b} \cdot \frac{c''}{a} - \frac{h'''}{b} \cdot \frac{h'''}{a},$$

ou

$$\text{(II)} \qquad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

C. — *Formule du sinus de la différence de deux arcs.* — Au lieu de déduire cette formule de la relation (1) en y remplaçant β par $-\beta$, on peut aussi l'obtenir directement de la figure 1 par un procédé peu différent de celui déjà employé.

Supposons que α soit un angle aigu du triangle et désignons par α' l'angle extérieur correspondant à α. *Il vaut la somme des angles intérieurs non adjacents :*

$$\alpha' = \beta + \gamma$$

d'où

$$\gamma = \alpha' - \beta, \qquad \sin\gamma = \sin(\alpha' - \beta).$$

Mais

$$\sin\gamma = \frac{h'}{b} .$$

Par suite

$$\sin(\alpha' - \beta) = \frac{h'}{b} = \frac{h'(c' + c'')}{b \cdot c} = \frac{h'}{c} \cdot \frac{c' + c''}{b} .$$

$$\sin(\alpha' - \beta) = \frac{h'''}{a} \cdot \frac{c' + c''}{b} = \frac{h'''}{b} \cdot \frac{c''}{a} + \frac{c'}{b} \cdot \frac{h'''}{a} ,$$

$$= \frac{h'''}{b} \cdot \frac{c''}{a} - \left[-\frac{c'}{b}\right] \cdot \frac{h'''}{a} .$$

Or

$$\cos\alpha' = -\frac{c'}{b}$$

puisque α' est obtus ; donc

$$\text{(III)} \qquad \sin(\alpha' - \beta) = \sin\alpha' . \cos\beta - \cos\alpha' . \sin\beta .$$

D. — *Formule du cosinus de la différence de deux arcs.* — Au lieu de tirer cette formule de la relation (II) en y remplaçant β par $-\beta$, on peut aussi l'établir en se basant sur la figure 1.

Choisissons un angle aigu α du triangle et soit α' l'angle extérieur correspondant. Nous pouvons écrire successivement :

$$\alpha' = \beta + \gamma , \qquad \gamma = \alpha' - \beta ;$$

$$\cos\gamma = \cos(\alpha' - \beta) , \qquad \cos(\alpha' - \beta) = \frac{a''}{b} = \frac{aa''}{ab} ,$$

$$h'''^2 = c'c'' + aa'' ,$$

$$\cos(\alpha' - \beta) = \frac{h'''^2 - c'c''}{ab} = \frac{h'''}{b} \cdot \frac{h'''}{a} - \frac{c'}{b} \cdot \frac{c''}{a} ;$$

α' est obtus :

$$\sin\alpha' = \frac{h'''}{b} ; \qquad \sin\beta = \frac{h'''}{a} ;$$

$$\cos\alpha' = -\frac{c'}{b} ; \qquad \cos\beta = \frac{c''}{a} ;$$

$$\text{(IV)} \qquad \cos(\alpha' - \beta) = \cos\alpha' . \cos\beta + \sin\alpha' . \sin\beta .$$

III. — Conséquences géométriques résultant de l'application des formules de trigonométrie au triangle quelconque.

En appliquant les formules précédentes et celles qui en découlent au triangle quelconque, on retrouve les relations de certains théorèmes importants de géométrie et l'on arrive à établir des théorèmes nouveaux.

A. — *Application de la formule de* $\sin(\alpha+\beta)$. *(Déduction du théorème de Pythagore généralisé.)*

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \sin\beta \;.$$

En nous basant sur la figure 1 nous pouvons écrire :

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{h''}{c}\cdot\frac{a'}{c} + \frac{b''}{c}\cdot\frac{h'}{c} = \frac{a'h'' + b''h'}{c^2} \;,$$

ou, en tenant compte de la relation $bh'' = ah'$,

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{a'.\dfrac{ah'}{b} + b''.\,h'}{c^2} = \frac{h'}{b}\cdot\frac{aa' + bb''}{c^2} \;.$$

Or

$$\frac{h'}{b} = \sin\gamma = \sin(\alpha+\beta) \;.$$

Par suite

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)\,.\,\frac{aa'+bb''}{c^2} \;,$$

d'où il résulte

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} c^2 = aa' + bb'' \\ b^2 = bb' + cc'' \\ a^2 = cc' + aa'' \;. \end{array} \right.$$

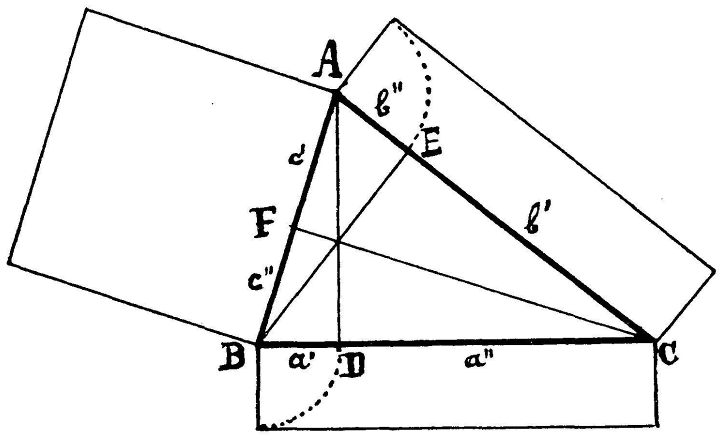

Fig 2.

Les relations (1) s'expriment comme suit :

Théorème (I). *Dans tout triangle acutangle, le carré construit sur l'un quelconque des côtés est égal à la somme des rectangles construits sur chacun des deux autres côtés et la projection du* 1^er^ *sur lui* (fig. 2).

Si un triangle renferme un angle obtus, le carré construit sur l'un des côtés adjacents est égal au rectangle construit sur le plus grand côté et la projection du 1er sur lui diminué du rectangle construit sur le 3e côté et la projection du 1er sur lui.

Remarque. — En prenant

$$\sin \alpha = \frac{h'''}{b} \qquad \text{et} \qquad \cos \alpha = \frac{c'}{b} \ ,$$

la formule de $\sin(\alpha + \beta)$ conduirait aussi à la 1re des relations (1); dans le cours des opérations il y aurait lieu toutefois de remplacer cc' par bb''.

Cas particuliers. — 1. $C = 90°$. — Alors h' est confondu avec b et h'' avec a.

Par suite

$$a' = a \ , \qquad b'' = b \ ,$$

et la première des relations (1) devient :

$$c^2 = a^2 + b^2 \ . \qquad \textit{(théorème de Pythagore)}$$

2. — $A = 90°$. h'' est confondu avec c, donc $b'' = 0$.

La formule

$$c^2 = aa' + bb'' \ ,$$

devient

$$c^2 = aa' \ ,$$

ou : *Dans un triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière et sa projection sur l'hypoténuse.*

Les relations (1) peuvent être mises sous une autre forme. En effet :

$$c^2 = aa' + bb'' = a(a - a'') + b(b - b') \ ,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - aa'' - bb' \ .$$

Mais

$$bb' = aa'' \ .$$

Par suite

(2) $$c^2 = a^2 + b^2 - 2aa'' \ . \qquad \text{(C aigu)}$$

On retrouve ainsi le *théorème de Pythagore généralisé.*

B. — *Application de la formule de* $\cos(\alpha + \beta)$. *(Déduction du théorème de Pythagore.).* — Soient α, β, γ les angles d'un triangle quelconque. Nous avons alors (fig. 1) :

$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma = -\frac{a''}{b} = -\frac{a - a'}{b} = \frac{a'}{b} - \frac{a}{b} \ .$$

Mais

$$\frac{a'}{b} = \frac{a'c}{bc} = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c' + c''}{b} = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c'}{b} + \frac{a'c''}{bc} .$$

En remplaçant on a

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c'}{b} - \left[\frac{a}{b} - \frac{a'c''}{bc}\right] ,$$

ou

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \, . \cos\beta - \left[\frac{a}{b} - \frac{a'c''}{bc}\right] .$$

Or

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \, . \cos\beta - \sin\alpha \, . \sin\beta ,$$

d'où

$$(a) \qquad \sin\alpha \, . \sin . \beta = \frac{a}{b} - \frac{a'c''}{bc} .$$

Mais

$$\left\{\begin{aligned} &\sin\alpha = \frac{h'''}{b} = \frac{h''}{c} , \\ \text{et} \quad &\sin\beta = \frac{h'}{c} = \frac{h'''}{a} . \end{aligned}\right.$$

Prenons d'abord :

$$\sin\alpha \, . \sin\beta = \frac{h'''}{b} \cdot \frac{h'}{c} .$$

Par suite

$$\frac{h'h'''}{bc} = \frac{a}{b} - \frac{a'c''}{bc} = \frac{ac - a'c''}{bc} ,$$

ou

$$h'h''' = ac - a'c'' .$$

Par permutation cyclique on obtient deux nouvelles formules formant avec la précédente le groupe suivant :

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} h'h''' &= ac - a'c'' \\ h''h' &= ba - b'a'' \\ h'''h'' &= cb - c'b'' . \end{aligned}\right.$$

Les relations du groupe (3) donnent lieu au théorème suivant :

Théorème II. — *Le rectangle construit sur deux hauteurs d'un triangle quelconque est égal au rectangle construit sur les deux côtés correspondants diminué du rectangle construit sur les projections de ces côtés l'un sur l'autre.*

Revenons à la relation (a) ci-dessus :

$$\sin\alpha \, . \sin\beta = \frac{a}{b} - \frac{a'c''}{bc} ,$$

et combinons d'autres valeurs de $\sin\alpha$ et $\sin\beta$ pour former le produit $\sin\alpha \,.\, \sin\beta$ (fig. 1) :

$$\sin\alpha \,.\, \sin\beta = \frac{h'''}{b} \,.\, \frac{h'''}{a} \;,$$

d'où

$$\frac{h'''^2}{ab} = \frac{a}{b} - \frac{a'c''}{bc} \;,$$

$$h'''^2 = a^2 - \frac{aa'c''}{c} \;.$$

Mais

$$aa' = cc'' \;,$$

car

$$\cos\beta = \frac{a'}{c} = \frac{c''}{a} \;.$$

Il en résulte

$$h'''^2 = a^2 - c''^2 \;,$$

ou

(4)
$$a^2 = c''^2 + h'''^2 \;.$$

La formule de $\cos(\alpha + \beta)$ nous a donc permis de retrouver le THÉORÈME DE PYTHAGORE (triangle rectangle BCF).

En troisième lieu nous pouvons aussi écrire :

$$\sin\alpha \,.\, \sin\beta = \frac{h''}{c} \,.\, \frac{h'}{c} \;,$$

d'où, si l'on compare avec l'égalité (a) :

$$\frac{h'h''}{c^2} = \frac{a}{b} - \frac{a'c''}{bc} \;,$$

$$h'h'' = \frac{ac^2}{b} - \frac{a'c''c}{b} = \frac{c(ac - a'c'')}{b} \;.$$

Nous avons trouvé (formule 3) :

$$h'h''' = ac - a'c'' \;.$$

Substituons

$$h'h'' = \frac{c \,.\, h' \,.\, h'''}{b} \;,$$

d'où

(5)
$$\frac{h''}{h'''} = \frac{c}{b} \;.$$

Nous retrouvons une propriété connue: *Le rapport de deux hauteurs est égal au rapport inverse des côtés correspondants.*

Enfin, si l'on choisissait les valeurs encore disponibles de $\sin\alpha$ et $\sin\beta$ pour obtenir le produit $\sin\alpha \, . \, \sin\beta$, on arriverait aussi à la propriété précédente.

C. — *Application des formules de* $\sin(\alpha - \beta)$ et $\cos(\alpha - \beta)$. — La formule de $\sin(\alpha - \beta)$, appliquée au triangle quelconque, conduit aux relations (1) auxquelles a donné lieu celle de $\sin(\alpha + \beta)$ et en appliquant la formule de $\cos(\alpha - \beta)$ on retrouve les relations (3), (4) et (5) fournies par celle de $\cos(\alpha + \beta)$.

D. — *Application de la formule* $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. Appliquée au triangle quelconque, cette formule permet d'établir le théorème suivant :

Théorème III. — *Si d'un sommet* B *d'un triangle quelconque* ABC *on abaisse la perpendiculaire sur la bissectrice de l'angle* A *et de son pied* S *la perpendiculaire sur le côté* AB, *cette dernière perpendiculaire a toujours pour mesure la* MOITIÉ *de la hauteur issue du sommet* B.

En effet, d'après la figure 3, la relation

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2} \, . \cos\frac{\alpha}{2}$$

peut s'écrire

$$\frac{BE}{c} = 2\frac{ST}{AS} \cdot \frac{AS}{c} ,$$

d'où

$$ST = \frac{BE}{2} = \frac{h''}{2} . \qquad (6) \qquad \text{c. q. f. d.}$$

On aurait de même

$$LM = \frac{h'''}{2} .$$

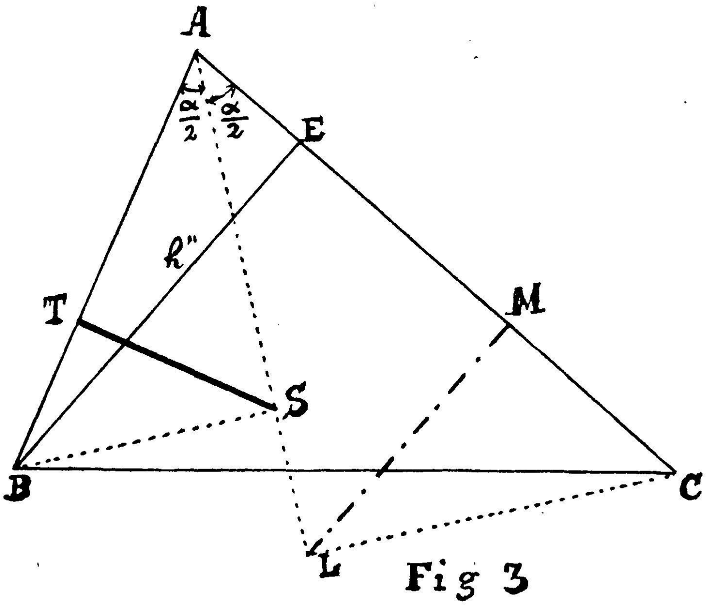

Fig 3

On arriverait au même résultat en prenant

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\mathrm{BS}}{c} \;;$$

il faudrait alors remplacer le produit BS . AS par c . ST.

E. — *Application de la formule* $\cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$. — Complétons la figure 3 pour obtenir la figure 4.

En nous basant sur cette dernière, nous pouvons écrire la relation ci-dessus comme suit :

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}} = 2\left(\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{AB}}\right)^2 - 1 \, .$$

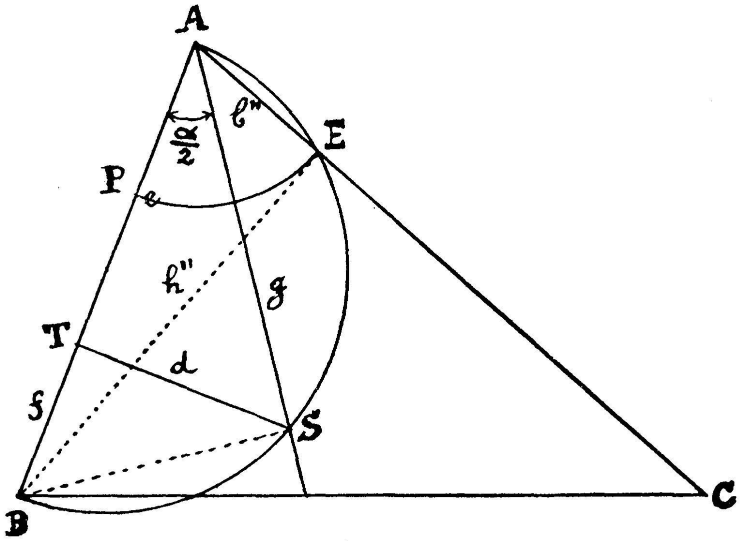

Fig 4.

Posons

$$\mathrm{AE} = b'' \, , \qquad \mathrm{AB} = c \, , \qquad \mathrm{ST} = d \, ,$$
$$\mathrm{AT} = e \, , \qquad \mathrm{BT} = f \, , \qquad \mathrm{AS} = g \, .$$

L'égalité devient :

$$\frac{b''}{c} = 2 \, . \, \frac{g^2}{c^2} - 1 \, ,$$

d'où

$$g^2 = \frac{c(c + b'')}{2} \, .$$

Mais

$$g^2 = ce \, .$$

En remplaçant on trouve

$$ce = \frac{c(c + b'')}{2} \, ,$$

d'où

(7)
$$\begin{cases} e = \dfrac{c + b''}{2} , \\ f = \dfrac{c - b''}{2} , \end{cases} \qquad \text{car} \quad f = c - e$$

En outre...

Par suite, T est le point milieu de BP et puisque S est situé sur le cercle décrit sur AB comme diamètre, on aboutit à la propriété suivante :

THÉORÈME IV. — *Si avec un sommet* A *d'un triangle quelconque comme centre et sa distance au pied* E *de la hauteur* BE *comme rayon on décrit un arc de cercle coupant le côté* AB *en* P *et qu'on élève au point milieu* T *du segment* BP *une perpendiculaire à* AB *sur laquelle on porte la moitié de la hauteur considérée* BE, *l'extrémité obtenue* S *appartient à la bissectrice de l'angle* A *et au cercle décrit sur le côté* AB *comme diamètre.*

Remarque. — Dans le cas où l'angle A que traverse la bissectrice est obtus, la propriété reste la même, mais le point P tel que AP = AE doit être pris sur le prolongement du côté AB.

Formons le produit $e \, . f$ (fig. 4) :

$$e \, . \, f = \frac{c^2 - b''^2}{4} .$$

Mais

$$d = e \, . \, \mathrm{tg} \frac{\alpha}{2} \qquad \text{et} \qquad d = f \, . \, \mathrm{tg}\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) ,$$

d'où

$$d^2 = e \, . \, f \, .$$

Remplaçons

$$d^2 = \frac{c^2 - b''^2}{4} .$$

Or

$$d = \frac{h''}{2} ,$$

donc

$$\frac{h''^2}{4} = \frac{c^2 - b''^2}{4} ,$$

d'où

$$c^2 = h''^2 + b''^2 \qquad \textit{théorème de Pythagore} .$$

F. — *Application des relations entre les éléments d'un triangle rectangle. (Déduction des théorèmes du triangle rectangle.)* — Soit ABC un triangle rectangle en A, p la projection de b sur l'hypoténuse a et q celle de c, h la hauteur.

Ces relations sont les suivantes :

1. *Chaque côté de l'angle droit est égal à l'hypoténuse multi-*

pliée par le sinus de l'angle opposé ou par le cosinus de l'angle compris.

2. *Chaque côté de l'angle droit est égal à l'autre multiplié par la tangente de l'angle opposé au premier.*

D'après la première relation, on a :

$$b = a \cdot \cos C \,, \qquad \text{et} \qquad b = \frac{p}{\cos C} \,,$$

d'où

$$b^2 = a \cdot p \,, \tag{8}$$

c'est-à-dire :

I. *Chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse et sa projection sur l'hypoténuse.*

D'après la seconde relation :

$$h = p \cdot \operatorname{tg} C \qquad \text{et} \qquad h = q \cdot \operatorname{tg} B$$

d'où

$$h^2 = p \cdot q \cdot (\operatorname{tg} C \cdot \operatorname{tg} B) \,,$$

mais

$$\operatorname{tg} C \cdot \operatorname{tg} . B = 1 \,,$$

par suite

$$h^2 = p \cdot q \,, \tag{9}$$

ou

II. *La hauteur est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.*

G. — *Application du théorème du sinus. (Déduction des théorèmes de Céva et de Ménélaüs.)*

1. Appliquons le théorème du sinus aux six triangles :

PA'B , PB'C , PC'A ; PA'C , PB'A , PC'B (fig. 5) :

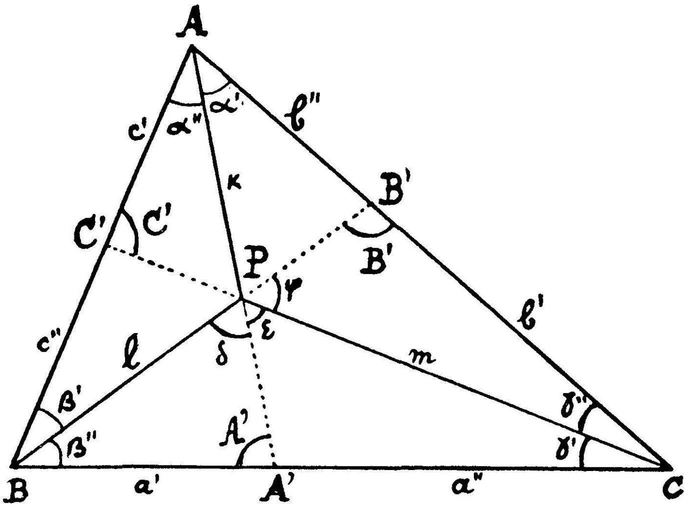

Fig 5.

$$\frac{a'}{l} = \frac{\sin \delta}{\sin A'} \,, \qquad \frac{b'}{m} = \frac{\sin \varphi}{\sin B'} \,, \qquad \frac{c'}{k} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin C'} \,;$$

d'où

$$1) \qquad \frac{a' \cdot b' \cdot c'}{k \cdot l \cdot m} = \frac{\sin \delta \cdot \sin \varepsilon \cdot \sin \varphi}{\sin A' \cdot \sin B' \cdot \sin C'} \, ;$$

et

$$\frac{m}{a''} = \frac{\sin A'}{\sin \varepsilon} \, , \qquad \frac{k}{b''} = \frac{\sin B'}{\sin \delta} \, , \qquad \frac{l}{c''} = \frac{\sin C'}{\sin \varphi} \, ;$$

d'où

$$2) \qquad \frac{k \cdot l \cdot m}{a'' \cdot b'' \cdot c''} = \frac{\sin A' \cdot \sin B' \cdot \sin C'}{\sin \delta \cdot \sin \varepsilon \cdot \sin \varphi} \, .$$

Multiplions 1) et 2) membre à membre :

$$\frac{a' \cdot b' \cdot c'}{a'' \cdot b'' \cdot c''} = 1$$

d'où résulte

$$(10) \qquad a' \cdot b' \cdot c' = a'' \cdot b'' \cdot c'' \, .$$

C'est la relation du

THÉORÈME DE CÉVA. — *Trois transversales issues des trois sommets d'un triangle quelconque et se coupant en un même point déterminent sur les côtés six segments tels que les produits de trois segments non consécutifs sont égaux.*

Remarque. — En appliquant le théorème du sinus aux six triangles :

$$ABA' \, , \quad BCB' \, , \quad CAC' \, ; \qquad ACA' \, , \quad BAB' \, , \quad CBC' \, ,$$

on aboutirait aussi à la relation du théorème de Céva. On obtiendrait :

$$\frac{a' \cdot b' \cdot c'}{a'' \cdot b'' \cdot c''} = \frac{\sin \alpha''}{\sin \beta'} \cdot \frac{\sin \beta''}{\sin \gamma'} \cdot \frac{\sin \gamma''}{\sin \alpha'} = \frac{l}{k} \cdot \frac{m}{l} \cdot \frac{k}{m}$$

d'où

$$a' \cdot b' \cdot c' = a'' \cdot b'' \cdot c'' \, .$$

Cas particulier. — En exprimant, dans un triangle quelconque, l'un quelconque des produits

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \, , \qquad \sec \alpha \cdot \sec \beta \cdot \sec \gamma \, ,$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma \, , \qquad \operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \beta \cdot \operatorname{cotg} \gamma \, ,$$

de deux manières différentes et en égalant les deux expressions, on arrive à la relation du *théorème de Céva* pour le cas particulier où les transversales issues des sommets se coupent à l'orthocentre du triangle.

En effet (fig. 1) :

$$\cos \alpha = \frac{c'}{b} = \frac{b''}{c} \; ; \qquad \cos \beta = \frac{a'}{c} = \frac{c''}{a} \; ; \qquad \cos \gamma = \frac{b'}{a} = \frac{a''}{b} \; .$$

Par suite

$$\cos \alpha \cos \beta \, . \cos \gamma = \frac{c'}{b} \cdot \frac{a'}{c} \cdot \frac{b'}{a} = \frac{b''}{c} \cdot \frac{c''}{a} \cdot \frac{a''}{b}$$

d'où

$$a' . b' . c' = a'' . b'' . c'' \; .$$

2. Considérons un triangle ABC et une transversale coupant les côtés a, b, c respectivement aux points X, Y, Z et formant avec eux les angles δ, ε, φ (fig. 6).

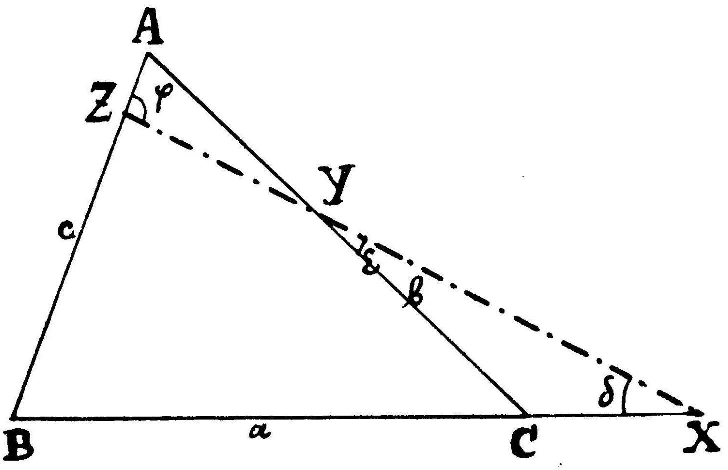

Fig 6.

D'après le théorème du sinus appliqué aux triangles AYZ, BZX, CXY, nous avons successivement (fig. 6) :

$$\frac{AY}{AZ} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varepsilon} \; ; \qquad \frac{BZ}{BX} = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \; ; \qquad \frac{CX}{CY} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \delta} \; .$$

Multiplions ces trois relations membre à membre :

$$\frac{AY \, . \, BZ \, . \, CX}{AZ \, . \, BX \, . \, CY} = 1 \; ,$$

d'où

$$AZ \, . \, BX \, . \, CY = AY \, . \, CX \, . \, BZ \tag{11}$$

c'est-à-dire

Théorème de Ménélaüs. — *Toute transversale située dans le plan d'un triangle détermine sur les côtés six segments tels que les produits de trois segments non consécutifs sont égaux.*

H. — *Application du théorème du cosinus. (Déduction des théorèmes de Ptolémée.)* — La figure 7 donne :

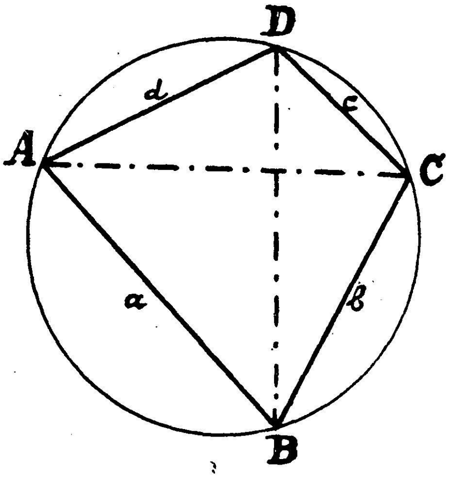

Fig 7.

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B ,$$

et

$$\overline{AC}^2 = c^2 + d^2 + 2cd \, . \cos B ,$$

d'où

$$\frac{a^2 + b^2 - \overline{AC}^2}{2ab} = \frac{\overline{AC}^2 - c^2 - d^2}{2cd} .$$

De cette relation on tire :

1) $$AC = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}} .$$

On trouverait de même :

2) $$BD = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}} .$$

En multipliant les relations 1) et 2), puis en les divisant membre à membre, on obtient :

(12) $$\begin{cases} AC \, . \, BD = ac + bd \\ \dfrac{AC}{BD} = \dfrac{ad + bc}{ab + cd} \end{cases}$$

c'est-à-dire

Théorèmes de Ptolémée. — 1. *Dans tout quadrilatère inscriptible, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.*

2. *Dans tout quadrilatère inscriptible, les diagonales sont entre elles dans le même rapport que les sommes des produits des côtés qui concourent avec elles.*

IV. — Application des formules du groupe (3).

1. Soit ABC un triangle quelconque. Construisons le triangle A′B′C′ ayant pour sommets les pieds des hauteurs (fig. 8). Les relations (3) permettent :

1° d'établir le théorème ci-dessous ;

2° d'exprimer les côtés du triangle A′B′C′ en fonction de ceux du triangle ABC.

1° Partons de la seconde des relations (3) :

$$h'h'' = ab - a''b' .$$

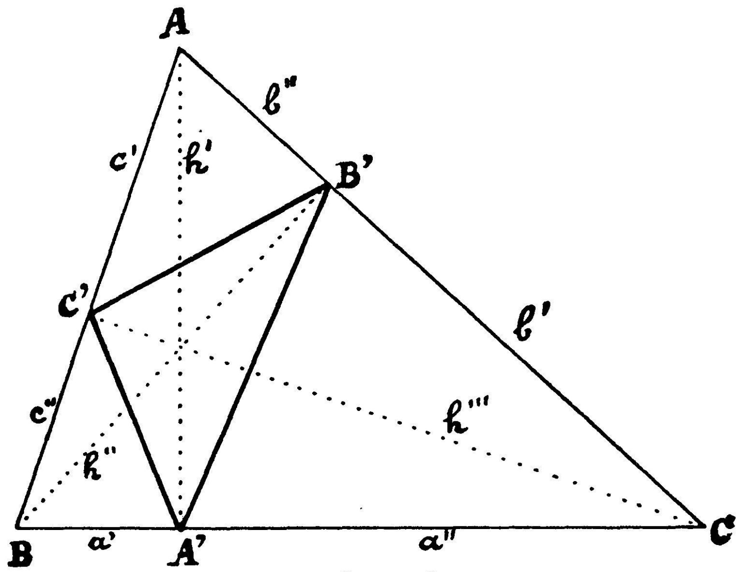

Fig 8.

La figure ABA′B′ est un quadrilatère inscriptible ; d'après le premier *théorème de Ptolémée,* le produit de ses diagonales est égal à la somme des produits de ses côtés opposés :

$$h'h'' = (\mathrm{A'B'}) \,.\, c + a'b'' .$$

Par suite

$$(\mathrm{A'B'}) \,.\, c + a'b'' = ab - a''b' ,$$

d'où

$$\mathrm{A'B'} = \frac{ab - a'b'' - a''b'}{c} .$$

Mais

$$ab = (a' + a'')(b' + b'') = a'b' + a''b'' + a'b'' + a''b'$$

Remplaçons :

De même... et...

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} A'B' &= \frac{a'b' + a''b''}{c}\,, \\ B'C' &= \frac{b'c' + b''c''}{a}\,, \\ C'A' &= \frac{c'a' + c''a''}{b}\,, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(13)'\quad \left\{\begin{aligned} c\,.\,A'B' &= a'b' + a''b''\,, \\ a\,.\,B'C' &= b'c' + b''c''\,, \\ b\,.\,C'A' &= c'a' + c''a''\,. \end{aligned}\right.$$

Nous obtenons donc le théorème suivant (relations 13′) :

Théorème V. — *Le rectangle construit sur un côté d'un triangle quelconque et la distance des pieds des hauteurs abaissées sur les deux autres côtés est équivalent à la somme des rectangles construits sur les segments non consécutifs déterminés par ces hauteurs sur les côtés correspondants.*

2° Exprimons maintenant les côtés du triangle A′B′C′ des pieds des hauteurs en fonction de ceux du triangle ABC (fig. 8). Nous avions (formule 13) :

$$A'B' = \frac{a'b' + a''b''}{c}\,.$$

Or

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bb''\,,$$

et

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2aa''\,,$$

d'où

$$a'' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \quad \text{et} \quad b'' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\,.$$

En outre :

$$a' = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \quad \text{et} \quad b' = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2b}\,,$$

car

$$a' = a - a'' \quad \text{et} \quad b' = b - b''\,.$$

Portons ces valeurs dans l'expression de A′B′ :

$$A'B' = \frac{\dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\cdot\dfrac{b^2 - c^2 + a^2}{2b} + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\cdot\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}}{c}$$

ou

$$A'B' = \frac{[a^2 + (b^2 - c^2)]\,.\,[a^2 - (b^2 - c^2)] + [b^2 + (c^2 - a^2)]\,.\,[b^2 - (c^2 - a^2)]}{4abc}\,,$$

ou, en effectuant les calculs et en simplifiant :

Par permutation... et...

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} A'B' &= \frac{c\,.\,(a^2+b^2-c^2)}{2ab}\,, \\ B'C' &= \frac{a\,.\,(b^2+c^2-a^2)}{2bc}\,, \\ C'A' &= \frac{b\,.\,(c^2+a^2-b^2)}{2ca}\,, \end{aligned}\right.$$

Ce sont les formules exprimant les côtés du triangle des pieds des hauteurs en fonction des côtés du triangle donné.

2. Partons de la première des formules du groupe (3) :

$$h'h''' = ac - a'c''\ .$$

D'autre part (fig. 1) :

$$\frac{h'}{h'''} = \frac{a'}{c''}\ .$$

Multiplions membre à membre :

$$h'^2 = \frac{aa'c}{c''} - a'^2\ .$$

Or : *Deux sommets d'un triangle quelconque et les pieds des hauteurs qui en partent sont sur une circonférence ayant pour diamètre la distance de ces deux sommets :*

A, B, D, E	sont sur une	circonférence	de	diamètre	AB	;
B, C, E, F	»	»	»	»	BC	;
C, A, F, D	»	»	»	»	CA	.

Par suite, d'après le théorème des sécantes :

$$aa'' = bb'\ ; \qquad bb'' = cc'\ ; \qquad cc'' = aa'\ .$$

Remplaçons aa' par cc'' dans h'^2 :

$$h'^2 = c^2 - a'^2\ ,$$

ou

$$c^2 = a'^2 + h'^2 \ \ldots \qquad \textit{théorème de Pythagore.}$$

Reprenons l'expression de h'^2 (fig. 1) :

$$h'^2 = \frac{aa'(c'+c'')}{c''} - a'^2\ ,$$

ou

$$h'^2 = a'(a - a') + \frac{aa'c'}{c''} .$$

Mais

$$aa' = cc'' .$$

Donc

$$h'^2 = a'a'' + cc'$$

ou aussi,

$$h'^2 = a'a'' + bb'' \qquad (15)$$

puisque $cc' = bb''$.

Les relations (15) donnent lieu au théorème suivant :

THÉORÈME VI. — *Le carré construit sur une hauteur d'un triangle quelconque est équivalent au rectangle construit sur les segments qu'elle détermine sur le côté correspondant plus le rectangle ayant pour dimensions l'un des deux autres côtés et la projection du second sur lui.*

Cas particulier. — $A = 90°$; $b'' = c' = 0$.

La relation (15) devient :

$$h'^2 = a'a'' ,$$

c'est-à-dire : *La hauteur d'un triangle rectangle est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.*

Le théorème VI peut être envisagé comme étant la généralisation de la propriété ci-dessus.

La seconde des égalités (15) peut s'écrire (fig. 1) :

$$h'^2 = a'a'' + b'b'' + b''^2 .$$

Par permutation...

$$h''^2 = b'b'' + c'c'' + c''^2 .$$

et...

$$h'''^2 = c'c'' + a'a'' + a''^2 .$$

D'où résulte :

$$\text{(I)}' \qquad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a''^2 + b''^2 + c''^2) + 2(a'a'' + b'b'' + c'c'') .$$

En partant de l'autre égalité

$$h'^2 = a'a'' + cc' ,$$

on trouve, après les mêmes transformations :

$$\text{(I)}'' \qquad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2) + 2(a'a'' + b'b'' + c'c'') .$$

De (I)′ et (I)″ résulte :

$$\text{(16)} \qquad a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2$$

c'est-à-dire :

Théorème VII. — *Les sommes des carrés construits sur trois segments non consécutifs déterminés sur les côtés d'un triangle quelconque par les hauteurs correspondantes sont égales.*

La relation (16) a été établie sans l'intermédiaire du théorème de Pythagore.

Conséquence géométrique. — De (16) :

$$b'^2 - b''^2 = (a''^2 - a'^2) + (c''^2 - c'^2)$$

ou

$$(b' + b'')(b' - b'') = (a'' + a')(a'' - a') + (c'' + c')(c'' - c') ,$$

ou (fig. 9) :

$$b \, . \, \mathrm{CL} = a \, . \, \mathrm{CK} + c \, . \, \mathrm{BM}$$

ou enfin

$$\overline{\mathrm{CS}}^2 = \overline{\mathrm{CR}}^2 + \overline{\mathrm{BT}}^2 \, .$$

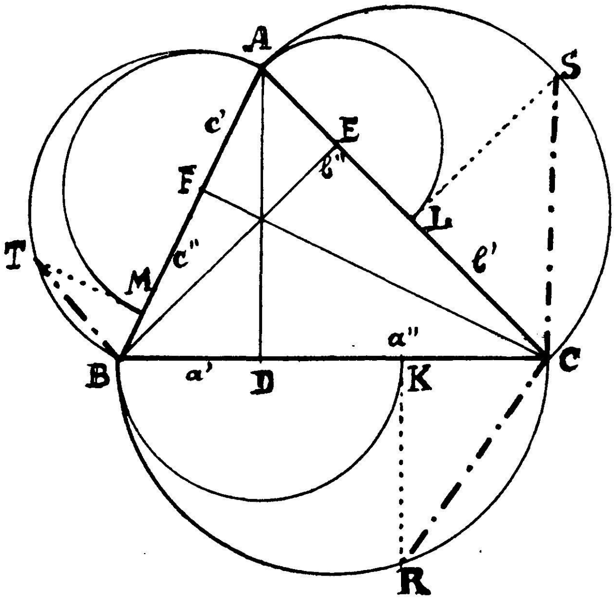

Fig 9.

Par suite, les segments CS, CR et BT sont les côtés d'un triangle rectangle ; d'où le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Si avec les pieds des hauteurs d'un triangle comme centres et les petits segments qu'elles déterminent sur les côtés correspondants comme rayons on décrit des circonférences et qu'aux points où elles coupent les grands segments on élève des perpendiculaires aux côtés jusqu'à leurs points d'intersection avec les circonférences décrites sur ces côtés comme diamètres, les distances de ces points aux extrémités des grands segments sont les côtés d'un triangle rectangle.*

Remarque. — De (I)′ ou (I)″ on peut déduire le théorème de Pythagore en supposant $\mathrm{A} = 90°$.