**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 17 (1915)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Kapitel:** Société mathématique suisse, réunion annuelle. Centenaire de la

Société helvétique des Sciences naturelles.

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

- I. « Exposer, au moyen d'une méthode de critique historique, le développement organique de la théorie des fonctions elliptiques ainsi que les différents points de vue sous lesquels cette théorie a été considérée depuis la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle jusqu'à nos jours. Indiquer l'influence qu'ont eue, sur d'autres branches de l'Analyse, les vues qui se sont présentées successivement dans la dite théorie » <sup>1</sup>.
- II. « Dès les premières années du XX<sup>e</sup> siècle, il a été proposé, de différents côtés, de substituer, à la définition classique de l'intégration définie, d'autres définitions, à l'effet de généraliser la notion d'intégrale et de l'appliquer à des classes de fonctions aussi étendues que possible. »

« On propose de soumettre ces définitions à un examen historique et critique précis et de faire connaître celle des définitions étudiées que l'on adopterait soi-même, en exposant d'une façon approfondie les raisons de sa préférence. »

À celui qui, au jugement de l'Académie, aura présenté le meilleur travail sur l'un ou l'autre de ces sujets, le Chevalier Adolphe Merlani fera remettre la somme de 500 lires à titre de contribution aux frais d'exécution du travail.

La fermeture du concours aura lieu le 31 décembre 1916. Les mémoires devront être adressés, avant cette date, au Secrétaire de la Classe des Sciences physiques de l'Académie royale des Sciences de Bologne, Via Zamboni, 33. Ils devront être rédigés en italien et être inédits. Les auteurs ne mettront point leur nom au mémoire; ils indiqueront seulement une devise qu'ils reproduiront sur un pli cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

# Société mathématique suisse, réunion annuelle. Centenaire de la Société helvétique des Sciences naturelles.

Genève, septembre 1915.

La Société helvétique des Sciences naturelles a célébré le centenaire de sa fondation en une série de séances qui ont eu lieu à Genève du 12 au 15 septembre 1915. Fondée dans cette ville le 6 octobre 1815, elle groupa tout d'abord les naturalistes suisses, mais elle ne tarda pas à élargir son cadre et à faire une place de plus en plus large aux sciences physiques et mathématiques. Aujourd'hui, le Sénat de la Société helvétique comprend les représentants des grandes commissions permanentes de géologie, de géodésie, des glaciers, de la publication des Œuvres d'Euler,

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Ce même sujet a déjà été mis au concours deux autres fois, mais aucun concurrent ne s'est présenté.

etc., ainsi que les présidents des Sociétés cantonales de Sciences naturelles et des Sociétés suisses scientifiques s'occupant d'une branche spéciale. C'est à ce dernier titre que la Société mathématique suisse se trouve rattachée à la Société helvétique depuis 1910. Le Sénat joue en quelque sorte le rôle d'une académie des sciences, tout au moins pour les relations à l'étranger; il a d'ailleurs des représentants dans l'Association internationale des Académies.

La Société helvétique des Sciences naturelles est la première institution académique nomade dont le siège se déplace chaque année. Depuis sa fondation, elle tient ses réunions annuelles successivement dans les différentes parties du pays et devient ainsi toujours plus un facteur d'union nationale. Ce type de société nomade fut imité plus tard à l'étranger (Société des médecins et naturalistes allemands, Munich, 1822; Association britan-

nique pour l'avancement des sciences, York, 1831, etc.).

L'œuvre scientifique de la Société helvétique est considérable. Il suffit pour s'en rendre compte de parcourir le beau volume contenant les « Notices historiques et les documents réunis par la Commission historique instituée à l'occasion du Centenaire<sup>1</sup>. » Pour ce qui concerne plus particulièrement les mathématiques, nous avons à mentionner ici la commission nommée en 1909 avec la mission de publier les Œuvres complètes d'Euler. En coordonnant ainsi les efforts des savants suisses, la Société helvétique des Sciences naturelles a produit des travaux utiles à la fois à la science et au pays.

H.F.

Les séances de la Section des sciences mathématiques et astronomiques tenaient en même temps lieu de réunion annuelle de la Société mathématique suisse. Les communications ont été réparties sur deux séances qui ont eu lieu le mardi 14 septembre à l'Université.

1. — En ouvrant la première séance, M. le professeur H. Fehr, président, a rappelé qu'au moment de la fondation de la Société helvétique, la chaire de mathémathique de l'ancienne Académie était occupée par le géomètre Simon L'Huillier, puis il a indiqué, à grands traits, le rôle joué par les mathématiciens suisses du 19<sup>e</sup> siècle. Les principaux d'entre eux sont: Louis Bertrand (de Genève), 1731-1812; Simon L'Huillier, 1750-1840; Robert Argand, 1768-1822; Jacob Steiner, 1796-1863; Charles Sturm, 1803-1855; Ludwig Schläfli, 1814-1895; Gabriel Oltramare, 1816-1906; Ch.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Centenaire de la Société helvétique des Sciences naturelles, 1 vol. in-4°, 310 p. — Georg et Ci°, Bâle et Genève.

Cellérier, 1818-1889; J. Amsler-Laffon, 1823-1912; Georg Sidler, 1831-1907; Charles Ruchonnet, 1832-1914; Hermann Kinkelin, 1841-1913; Von Der Mühll, 1841-1912; Gustave Cellérier, 1855-1914; Walter Ritz, 1878-1909.

2. — M. le Prof. L.-G. Du Pasquier (Neuchâtel): Sur les systèmes de nombres complexes. — Soit un système de nombres complexes comprenant une infinité de « complexes »  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots$ 

 $+x_r e_r = \sum_{\lambda}^{1...r} x_{\lambda} e_{\lambda}$ , où les  $x_1, x_2, ..., x_r$  sont r nombres réels quel-

conques dits coordonnées du complexe x, et les  $e_1$ ,  $e_2$ , ...  $e_{\lambda}$ , ...,  $e_r$  des symboles dits les unités relatives du système de nombre envisagé. Supposons définies, dans ce système de nombres complexes, les opérations rationnelles de l'addition et de la multiplication, et leurs opérations inverses: la soustraction et la division. On sait qu'alors tout produit  $e_i e_k$  de deux unités relatives quelconques s'exprime en fonction linéaire, à coefficients réels, des mêmes unités relatives  $e_{\lambda}$ .

Appelons complexe rationnel un tel nombre complexe dont toutes les r coordonnées  $x_{\lambda}$  sont des nombres rationnels quelconques, entiers ou fractionnaires. L'ensemble de tous les complexes rationnels forme alors un « domaine de rationalité » ou « corps de nombres complexes », c'est-à-dire que ces complexes rationnels se reproduisent par les 4 opérations de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division; en d'autres termes : la somme, la différence, le produit et le quotient (pour autant que la division est définie et possible) de deux complexes rationnels quelconques est toujours de nouveau un complexe rationnel.

Pour faire l'arithmétique de ce corps de nombres, c'est-à-dire pour ériger une théorie des nombres dans ce domaine de rationalité, il faut tout d'abord le départager en deux, mettant d'une part: les complexes rationnels « entiers », et d'autre part: les complexes rationnels « non entiers ».

La définition suivante se présente le plus naturellement à l'esprit :

Un complexe rationnel  $x = \sum_{\lambda}^{1...r} x_{\lambda} e_{\lambda}$  est dit *entier*, si toutes ses

r coordonnées sont des nombres entiers ordinaires; ce complexe x sera dit non entier, si l'une au moins de ses r coordonnées est un nombre fractionnaire.

Prenant pour base cette définition et envisageant les complexes entiers ainsi définis comme éléments (c'est-à-dire comme l'analogue des nombres entiers dans l'arithmétique classique), on peut

ériger toute une arithmétique du système de nombres complexes considéré. Cette arithmétique généralisée présente beaucoup d'analogies avec l'arithmétique ordinaire dont les éléments sont les nombres rationnels entiers. On retrouve en général, dans cette arithmétique des complexes, l'équivalent du nombre premier, et la possibilité de décomposer un complexe entier quelconque en facteurs premiers; on y retrouve aussi les diviseurs communs de 2 complexes entiers donnés, ou, plus généralement, de n complexes entiers donnés; on y retrouve encore un algorithme analogue à celui d'Euclide, permettant de déterminer, par un nombre fini d'opérations rationnelles, le plus grand commun diviseur de plusieurs complexes entiers donnés; on y retrouve une théorie des congruences, l'analogue du théorème de Wilson, l'analogue du théorème de Fermat, etc.

Mais il y a des cas où cette analogie ne joue pas. Il y a des systèmes de nombres où l'arithmétique généralisée basée sur la définition ci-dessus du nombre complexe entier présente de curieuses exceptions aux règles générales, des anomalies étonnantes et inexplicables. Cela tient à la définition même du complexe entier, comme l'a montré pour la première fois M. A. Hurwitz à Zurich, sur l'exemple des quaternions entiers.

Voici les considérations pouvant conduire à une définition satisfaisante du nombre complexe *entier*:

Les nombres entiers sont caractérisés par les propriétés fondamentales suivantes :

1° Ils doivent former un domaine d'intégrité, c'est-à-dire qu'ils doivent se reproduire par addition, soustraction et multiplication; en d'autres termes: la somme, la différence et le produit de deux nombres entiers doit toujours être de nouveau un nombre entier.

2° Ce domaine d'intégrité doit contenir « le nombre 1 » et « le nombre zéro ».

3° Ce domaine d'intégrité doit posséder une base finie; autrement dit : il doit être possible de choisir, dans ce domaine d'intégrité, un nombre fini de complexes entiers, disons  $t_1, t_2, \ldots t_n$ , jouissant de la propriété suivante :

Si  $m_1, m_2, ..., m_n$  désignent des nombres entiers ordinaires quelconques (positifs, nuls ou négatifs), l'expression

$$(1) m_1 t_1 + m_2 t_2 + \ldots + m_n t_n$$

doit pouvoir reproduire, par un choix convenable des nombres entiers  $m_{\lambda}$ , absolument tous les éléments du domaine envisagé. Réciproquement: le domaine d'intégrité en question doit se composer de tous les complexes, et uniquement des complexes, qu'on obtient en assignant, dans l'expression (1) ci-dessus, aux nombres

ordinaires  $m_1, m_2, \dots m_n$ , de toutes les manières possibles, des valeurs entières positives, nulles ou négatives.

Tout ensemble de complexes jouissant des trois propriétés ci-

dessus est appelé un domaine holoïde.

En vertu de cette définition, tout domaine holoïde contient une infinité d'éléments, parmi lesquels « le nombre 1 » et « le nombre zéro » ; de plus, on peut y effectuer sans restriction l'addition, la soustraction et la multiplication, et cela sans jamais sortir du domaine; enfin, il possède une base finie.

Or, pour caractériser les nombres entiers, il faut une quatrième

propriété:

4º Ils doivent constituer un domaine holoïde qui soit maximal. Définition: un domaine holoïde [H] est dit maximal, lorsqu'il n'existe pas, dans le corps de nombres envisagé, un autre domaine holoïde contenant tous les éléments de [H], plus encore d'autres éléments non contenus dans [H].

La définition du complexe rationnel « entier » est alors la sui-

vante: un complexe rationnel  $x = \sum_{\lambda}^{1...r} x_{\lambda} e_{\lambda}$  est dit *entier*, s'il fait

partie du domaine holoïde maximal en question; le complexe rationnel x sera dit non entier, s'il n'est pas contenu dans ce domaine holoïde maximal.

Adoptant cette définition et envisageant comme éléments les complexes « entiers » définis de cette façon, on peut construire, dans le domaine des nombres complexes entiers ainsi délimité, toute une arithmétique et toute une théorie des nombres, d'une simplicité analogue à celle de l'arithmétique ordinaire et de la théorie des nombres classique.

En prenant, comme exemples particuliers, différents systèmes de nombres complexes, l'orateur montre ce qui suit:

- 1° Cette définition du nombre complexe entier peut avoir comme conséquence qu'on appellera « entiers » même certains complexes rationnels x à coordonnées  $x_{\lambda}$  fractionnaires; il peut arriver aussi que certains complexes rationnels x ne soient pas des complexes « entiers », bien que toutes leurs coordonnées  $x_{\lambda}$  soient des nombres entiers ordinaires.
- 2º L'opération consistant à partager le corps de nombres envisagé en deux domaines, mettant d'un côté: les complexes entiers, de l'autre: les complexes non entiers, cette opération peut ne pas être univoque. Il existe, en effet, des systèmes de nombres complexes tels que le corps constitué par l'ensemble de tous les complexes rationnels contient plusieurs domaines holoïdes maximaux, très différents entre eux.
- 3° Etant donné un corps de complexes rationnels faisant partie d'un système déterminé de nombres complexes, il peut même

arriver que ce corps de nombres ne contienne aucun domaine holoïde maximal. L'auteur cite, à titre d'exemple, un système de nombres complexes à trois coordonnées doué de cette curieuse particularité que, dans ce système, le corps des complexes rationnels ne contient aucun domaine holoïde maximal.

Si l'on fait alors l'arithmétique d'un domaine holoïde non maximal, on rencontre dans les théorèmes de divisibilité, dans la théorie du plus grand commun diviseur, etc., des exceptions curieuses, des anomalies surprenantes.

Ces anomalies-là ne se présentent pas, quand l'ensemble des complexes rationnels *entiers* constitue un domaine holoïde maximal.

Discussion: M. Speiser, Mme Young et M. Du Pasquier.

- 3. M. le D<sup>r</sup> G. Pólya (Zurich). *Une série de puissances est-elle en général non-continuable* ? On parle en mathématique de « cas général » dans les cas suivants : lorsque l'ensemble des cas d'exception est :
  - 1. de mesure nulle, ou bien
  - 2. de dimension inférieure, ou bien
- 3. de puissance inférieure à celle de l'ensemble des cas réguliers. L'ensemble des séries de puissances continuables et celui des séries de puissances non-continuables ont tous deux la même puissance, celle du continu. Les notions de mesure ou de dimension n'ont pas encore été définies dans l'espace, dont les éléments représentent les séries de puissances; dans tous les cas, les raisonnements de MM. Borel et Fabry ne s'appuient sur aucune définition explicite de ces notions. Ces raisonnements donc, bien qu'ils nous fournissent des vues intéressantes sur la nature des séries de puissances, ne peuvent pas être considérés comme la stricte démonstration, que les séries de puissances ne sont en général pas continuables.

On fait bien d'envisager la question d'une façon différente. Dans l'espace d'une infinité de dimensions dont les points sont les séries de puissances convergentes dans le cercle de rayon un, on peut définir convenablement certaines notions relatives aux ensembles et démontrer le théorème suivant:

L'ensemble des séries de puissances non-continuables n'a que des points intérieurs et il est partout dense. L'ensemble des séries de puissances continuables est parfait et nulle part dense.

Ce théorème peut être démontré, car les notions de point intérieur, d'ensemble parfait, partout ou nulle part dense, qui interviennent dans l'énoncé, ont été définies avec précision. Toutes ces notions reposent sur celle de voisinage. Le voisinage complet  $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots)$  du point  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  consiste dans l'en-

semble des points  $u_0$ ,  $u_4$ , ...  $u_n$ , ... satisfaisant aux inégalités

$$|u_0-u_0| \le \varepsilon_0, \quad |u_1-a_1| \le \varepsilon_1, \dots \quad |u_n-a_n| \le \varepsilon_n, \dots$$
où l'on a

$$\varepsilon_n \geq 0$$
,  $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\varepsilon_n} = 1$ .

Si la série  $\Sigma(u_n - a_n)$   $x^n$  converge dans un cercle de rayon plus grand que 1, le point  $u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots$  appartient au voisinage immédiat du point  $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$  J'appelle  $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$  point limite de l'ensemble E, lorsque dans un voisinage complet arbitraire du point  $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$  on peut trouver un point, qui appartienne à l'ensemble E, mais non au voisinage immédiat du point  $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ 

C'est avec cette notion du point limite qu'on démontre le théorème énoncé 1.

Discussion: Mme Young, M. G. Dumas, M. Plancherel.

4. — M. le Prof. D' M. Plancherel (Fribourg), Sur la convergence d'une classe remarquable d'intégrales définies. — Prenons comme champ fonctionnel  $\Omega$  l'ensemble des fonctions f(x), définies dans l'intervalle  $(0, \infty)$  et de carré intégrable (au sens de Lebesgue) dans cet intervalle, c'est-à-dire telles que  $\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dx$  soit

finie. Considérons une transformation T faisant correspondre à toute fonction f du champ  $\Omega$  une fonction T(f) du  $m \hat{e} m e$  champ. Nous caractériserons cette transformation par les propriétés suivantes

a) linéarité

$$T(f_1 + f_2) = T(f_1) + T(f_2)$$
  
 $T(kf) = kT(f)$ , k constante.

b) involution

$$TT(f) = f$$
.

e) limitation. Il existe une constante M telle que

$$\int_{0}^{\infty} [T(f)]^{2} dx \leq M^{2} \int_{0}^{\infty} f^{2} dx.$$

Une transformation vérifiant ces conditions sera dite une transformation fonctionnelle linéaire, involutive et bornée. Il existe

<sup>1</sup> Le mémoire paraîtra dans les Acta Mathematica.

alors une fonction génératrice  $\Phi(x, y)$  permettant d'exprimer T(f) presque partout par la formule

$$T(f) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{0}^{\infty} f(y) \frac{\partial}{\partial y} \Phi(x, y) dy.$$

Dans le cas où

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \varphi(x, y)$$

existe presque partout et où l'on a

$$\int_{0}^{x} \int_{0}^{y} \frac{\partial^{2} \Phi}{\partial x \partial y} dx dy = \Phi(x, y) - \Phi(x, 0) - \Phi(0, y) + \Phi(0, 0)$$

elle peut s'écrire

$$T(f) = \frac{\delta}{\delta x} \int_{0}^{\infty} \left\{ f(y) \int_{0}^{x} \varphi(t, y) dt \right\} dy.$$

Dans ce cas  $\varphi(x, y)$  est le noyau de la transformation T. En général, il n'est pas permis de permuter les deux intégrations successives de la dernière formule et d'écrire

$$T(f) = \int_{0}^{\infty} f(y) \varphi(x, y) dy.$$

Par contre, il est toujours possible de déterminer une suite de constantes  $\alpha_n \to \infty$  telles que

$$T(f) = \lim_{n \to \infty} \int_{0}^{\alpha_{n}} f(y) \varphi(x, y) dy$$

presque partout. La suite  $\alpha_n$  dépend en général de la fonction f et varie avec elle. Il est, par suite, naturel de se demander quelle hypothèse sur la fonction f permettrait de se débarrasser de la suite particulière  $\alpha_n$  et d'assurer la convergence presque partout

de  $\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(y) \, g(x, y) \, dy$ . J'ai montré dans les Rendiconti di

Palermo, tome 30, qu'il suffisait pour cela de supposer que  $\int_{0}^{\infty} f^{2}(x) \sqrt[3]{x} \, dx$  existe. En transposant aux « représentations intégrales » la méthode que j'ai employée pour étudier la convergence

des séries de fonctions orthogonales, j'obtiens une hypothèse plus large et je démontre le théorème suivant :

Soit  $\varphi(x, y)$  le noyau d'une transformation fonctionnelle T linéaire, involutive bornée dans le champ des fonctions de carré intégrable dans l'intervalle  $(0, \infty)$ . Pour toute fonction f(x) de ce

champ, telle que  $\int_{1}^{\infty} f^{2}(x) \log^{3} x dx$  soit finie, la limite

$$\lim_{z \to \infty} \int_{0}^{z} f(y) \varphi(x, y) dy$$

existe presque partout et elle représente la transformée T(f) de f.

5. — M. le Prof. W. H. Young (Genève). Sur l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée. — Dans le rapport que cet auteur a donné lui-même à la Société mathématique suisse, il n'a pas abordé la partie du sujet qui se rapporte à la recherche de la fonction primitive. Récemment il a obtenu la généralisation parfaite des théorèmes de M. Lebesgue et de lui-même sur ce sujet. Les démonstrations sont fort simples. On peut en effet employer la méthode de M. de la Vallée-Poussin. Les « fonctions majorantes et minorantes » introduites par celui-ci rentrent en effet d'une manière tout à fait naturelle dans le cadre de la théorie de M. Young.

Désignant par g(x) une fonction croissante, on aura à considérer non seulement des intégrales et des fonctions sommables par rapport à g(x) mais aussi des nombres dérivés par rapport à g(x); la mesure d'un ensemble deviendra la variation de g(x) par rapport à cet ensemble, et, dans le cas où cette variation est nulle, on dira que l'ensemble complémentaire existe presque partout par rapport à g(x). Pour éviter des répétitions ennuyeuses on peut omettre l'expression « par rapport à g(x) » dans les énoncés. On aura alors cinq théorèmes principaux :

1° S'il existe une fonction f(x) intermédiaire (au sens large) entre les deux nombres dérivés à droite d'une fonction continue F(x), et si f(x) est sommable, ou bien

i) f(x) est infini  $(+\infty \ ou - \infty)$  dans tous les points d'un ensemble ayant la puissance du continu, ou bien

ii) 
$$F(x) - F(a) = \int_{a}^{x} f(x) dg(x)$$
.

En particulier, par conséquent, si F(x) a un nombre dérivé A sommable et fini sauf peut-être dans un ensemble dénombrable de

points, on aura

$$F(x) - F(a) = \int_{a}^{x} \Lambda dg(x)$$
.

2º L'intégrale indéfinie d'une fonction sommable f(x) a f(x) pour

dérivée presque partout.

3° Si la fonction F(x), continue ou discontinue, est non-décroissante dans un intervalle (a, b), l'un quelconque A de ses nombres dérivés est sommable dans cet intervalle et l'on a

$$\int_{a}^{x} A dg(x) = F(b) - F(a) - une fonction positive non-décroissante.$$

- 4º Une fonction à variation bornée, continue ou discontinue, a une dérivée presque partout, et les nombres dérivés de la fonction sont sommables.
- 5° Une fonction F(x) continue et à variation bornée, dont l'un des nombres dérivés est fini, sauf peut-être dans les points d'un ensemble n'ayant pas la puissance du continu est l'intégrale indéfinie de ce nombre dérivé.

Le premier de ces théorèmes est moins général que le théorème suivant obtenu par M. Young:

- Si F(x) est une fonction semi-continue inférieurement à droite et supérieurement à gauche, et si elle possède un nombre dérivé à droite (gauche) f(x) par rapport à g(x), sommable par rapport à g(x) sur l'ensemble S des points où f(x) > 0, on a les deux possibilités:
  - 1°  $f(x) = -\infty$  dans les points d'un ensemble de puissance c;
- $2^{\circ}$  F(x) est une semi-intégrale supérieure par rapport à g(x), en effet
- $F(x) F(a) = \int_S f(x) dg(x) + une fonction positive non-décroissante.$  Pour obtenir ces généralisations il était nécessaire d'élaborer la théorie des nombres dérivés par rapport à g(x) d'une fonction F(x) qui est au moins d'un côté semi-continue. De telles fonctions ont fait leur apparition à plusieurs reprises dans les recherches de M. Young, et les théorèmes qu'il obtient maintenant montrent de nouveau l'intérêt de ces fonctions. Il obtient entre autres un théorème du genre du théorème de Dini, et qui contient ce dernier comme cas spécial:

Si F(x) est semi-continue supérieurement à droite dans un intervalle (a,b), les bornes supérieures des nombres dérivés à gauche sont toutes les mêmes et coı̈ncident avec la borne supérieure du rapport incrémental, les nombres dérivés et le rapport incrémental étant pris par rapport à x ou g(x), pourvu que i) g(x) soit continue

à droite, ou ii) F(x) n'est pas monotone et non-croissant partout dans l'intervalle.

Discussion: M. Plancherel.

6. — M<sup>me</sup> Grace Chisholm Young (Genève). Sur les courbes sans tangente. — Weierstrass a démontré que la fonction continue représentée par la série de Fourier  $\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos a^n x \pi$  n'a pas de

dérivée. La question se pose : est-ce que la courbe y = f(x), où f(x) est la fonction de Weierstrass, n'a pas de tangente? Pour ceci il ne suffit pas que la fonction n'ait pas de dérivée, car si elle avait une dérivée à droite et une dérivée à gauche, toutes les deux infinies mais avec des signes opposés, la courbe aurait une tangente singulière, dont le point d'incidence serait un point de rebroussement de la courbe. D'après un théorème connu, ceci ne peut avoir lieu que dans un ensemble dénombrable de points. On verra qu'en effet il y a de tels points de rebroussement sur la courbe de Weierstrass, mais que, sauf dans un ensemble de première catégorie et de mesure nulle, chaque ligne passant par un point P de la courbe a un caractère tangentiel pour la courbe dans le point P considéré.

Discussion: M. C. Cailler, M. Raoul Picter.

- 7. M. le D<sup>r</sup> D. Mirimanoff (Genève) et M<sup>me</sup> Grace Chisholm Young. Sur le théorème des tuiles. Une tuile d'après W. H. Young, l'auteur du théorème, est un élément de forme et grandeur déterminées autour d'un point spécial dit point d'attachement. L'énoncé est le suivant : Etant donné un ensemble de tuiles sur une droite, dont chacune peut être taillée autant que l'on veut, on peut trouver un nombre fini ou une infinité dénombrable de tuiles, ayant les propriétés suivantes :
  - 1º la largeur de chaque tuile est plus petit que e;
- 2° chaque point d'attachement est couvert par au moins une des tuiles;
- $3^{\circ}$  le point d'attachement  $P_i$  de la tuile  $d_{P_i}$  n'est pas couvert par une autre tuile;
- $4^o\ la\ somme\ des\ largeurs\ des\ tuiles\ diffère\ de\ la\ mesure\ m\left(S\right)\ de\ l'ensemble\ S\ des\ points\ d'attachement\ de\ moins\ e'.$

lci e et e' sont des quantités positives choisies.

Si l'ensemble est fermé, les tuiles peuvent être trouvées en nombre fini.

La démonstration présentée est une élaboration par D. Mirimanoff de celle donnée par l'auteur sous une forme incomplète.

8. — M. le Prof. L. Crelier (Berne-Bienne). Sur un théorème particulier de géométrie cinématique et quelques constructions de tangentes liées à ce théorème 1. — Les résultats généraux de la géométrie cinématique peuvent être appliqués avec succès à un très grand nombre de mécanismes particuliers et conduire ainsi à une foule de résultats de détail originaux et forts intéressants.

Considérons en particulier le mécanisme bien connu « Bielle-Manivelle ». La manivelle étant OB et la bielle AB. Nous prendrons le chemin de la bielle suivant le diamètre OA et nous le considérerons comme axe des x. L'origine sera le centre O.

Nous avons,

$$\begin{array}{ll} \text{pour la base:} & (x^2+y^2)\,(l^2-\mathbf{R}^2-x^2)^2 = 4\mathbf{R}^2x^4 \\ \text{pour la roulante:} & \mathbf{R}^2\,(x^2+y^2-lx)^2 = l^2\,x^2\,(y^2+(x-l)^2) \\ \text{pour la courbe } \mathbf{C}_d: (x^2-l^2)\,(x^2+y^2) + \mathbf{R}^2\,y^2 = \mathbf{O}. \end{array}$$

Cette dernière courbe est une conchoïde de la base par rapport au centre O et dont la constante est R = OB.

Tangentes. — 1. De la roulante. Il suffit de rappeler que celleci est une conchoïde de conique par rapport à un foyer. La constante de la conique est 2R et celle de la conchoïde — R. Soit M un tel point de la roulante;  $F_2M$  est prolongé jusqu'en a avec Ma = R; a est le point de la conique. Nous construisons la normale en a au moyen du cercle directeur et du cercle principal; nous obtenons aJ. En  $F_2$ , nous faisons  $F_2J$  perpendiculaire à  $F_2M$ ; c'est la normale de l'enveloppe de la droite mobile pour la position correspondante, et de cette manière J est le centre instantané nécessaire. Nous en déduisons a priori la tangente et la normale en M.

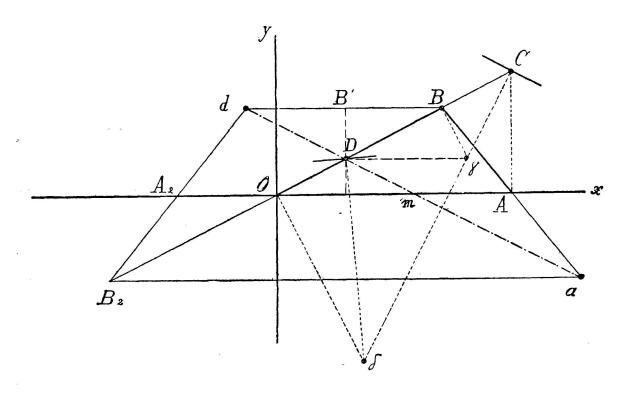
2. De la base. Soit C le point de la base pour la position considérée OBA. Nous porterons Aa = AB = l sur le prolongement de la bielle AB et opposé à B, puis  $OB_2 = OB = R$  sur le prolongement correspondant de la manivelle OB. Nous aurons  $B_2a$  parallèle à Ox. Soit maintenant  $BaB_2d$  le trapèze isocèle sur la base  $B_2a$  et la diagonale  $B_2B$ . Il en résulte  $B_2B = ad = 2R$ , et  $B_2O = OB = am = md = R$ . En désignant le point de coupe des diagonales par D, nous aurons encore Dd = DB et aD + DB = 2R.

De cette manière D est un point de la conique (ellipse) de foyers a et B et de constante 2R. Nous avons également, avec DB' perpendiculaire à dB, dB' = B'B puis AB' = R et OB' = l; dans ces conditions D est encore un point de la courbe  $C_d$ , et nous en tirons DC = R.

Examinons maintenant la tangente en C. La théorie des mouvements épicycloïdaux nous enseigne que la base et la position

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Voir L. Creller, Systèmes cinématiques (collections Scientia), Gauthier-Villars, Paris. Chapitres VI et IV.

correspondante de la roulante pour le point C ont la même tangente en C. En outre cette roulante correspond à la conique de foyers a et B et de constante 2R. Nous appliquons mainténant la construction de la tangente de la roulante. Nous savons déjà que le point nécessaire de la conique est D et nous pourrions encore l'obtenir en portant R depuis C sur OB. La tangente de la conique en D est évidemment DB', perpendiculaire à l'axe des x, donc la



normale est une parallèle D $\gamma$  à ce même axe. D'autre part la normale de l'enveloppe du segment mobile OB dans la génération de la roulante est une perpendiculaire B $\gamma$  à OB. Nous trouvons alors le centre instantané  $\gamma$ , relatif à notre conchoïde de conique.

Il est maintenant facile de tracer la normale et la tangente cherchée en C.

3. De la courbe  $C_d$ . Comme celle-ci est une conchoïde de la base, nous utiliserons la normale de la base en C et la normale de l'enveloppe du segment mobile OB autour de O; cette dernière est O $\delta$  perpendiculaire à OB. Le point  $\delta$  est ainsi le nouveau centre instantané de rotation et nous en déduisons sans autre la normale, puis la tangente en D.

Trajectoires de a et d. — Nous savons que a est un point fixe de la bielle avec BA = Aa = l. Sa trajectoire est une roulette du mécanisme considéré. L'équation de cette courbe s'appelle :

$$(x^2 - R^2 - 4l^2 + 5y^2)^2 = 16(R^2 - y^2)(l^2 - y^2)$$
.

Nous devons observer en plus que le mécanisme OBA et le mécanisme symétrique travaillant à gauche de l'axe des y ont la même base, et la même courbe  $C_d$ . Comme nous avons aussi  $B_2A_2=l$ ,

 $OB_2A_2$  est une des positions de ce mécanisme symétrique. Avec  $A_2d=l$ , la trajectoire de d est une roulette analogue à celle décrite par a. En établissant son équation, nous trouvons le même résultat que pour le chemin de a; en conséquence les points a et d se déplacent sur la même courbe.

Si nous considérons plus spécialement la diagonale ad dont les extrémités s'appuient sur la trajectoire (a) ou (d), nous avons là une droite de longueur fixe, double de la manivelle, disposée symétriquement par rapport à celle-ci et passant toujours par le point correspondant D de la courbe  $C_d$ . Cette droite donne lieu au théorème suivant :

Théorème: Dans le mouvement du mécanisme « Bielle-Manivelle », il existe une droite mobile de longueur fixe 2R, symétrique avec le rayon OB, passant toujours par le point correspondant D et telle que son milieu m glisse sur l'axe des x pendant que ses extrémités s'appuient sur la trajectoire (a) d'un point a de la bielle, avec Aa = 1

ou en d'autres termes:

Les cordes de la trajectoire (a) symétriques des rayons OB et menées par les divers points D correspondants, sont de longueur fixe 2R et elles sont divisées en deux parties égales par l'axe des x.

9. – M. le D' René de Saussure (Berne et Genève), La Géométrie des feuillets cotés. — M. René de Saussure, poursuivant l'étude de la géométrie dite des «feuillets», expose un développement récent de cette géométrie obtenu en introduisant la notion du « feuillet coté ». Les résultats de cette étude ont été exposés dans les Arch. des Sc. Phys. et Nat. de Genève (1915). Rappelons seulement que le « feuillet » n'est pas autre chose qu'un corps rigide quelconque, considéré non pas en sa forme ou en sa grandeur, mais seulement comme position. C'est cette position qui est prise comme élément spatial primitif, donnant lieu à une nouvelle géométrie de caractère quadratique et à 6 dimensions (quoique située dans notre espace à 3 dimensions). En affectant chaque feuillet d'un coefficient numérique, appelé cote, on obtient le feuillet « coté », qui donne lieu à une géométrie à 7 dimensions (toujours située dans notre espace) et dont le caractère n'est plus quadratique mais linéaire. Les formes fondamentales de cette géométrie ont reçu de l'auteur les noms de: mono-, bi-, tri-, tétra-, penta-, et hexacouronne.

L'hexacouronne est le lieu des feuillets cotés (en nombre  $\infty^6$ ) qui satisfont à l'équation :

$$f + \varphi = h \tan \frac{\omega}{2}$$

fétant la cote d'un feuillet fixe F (appelé feuillet central);  $\varphi$ , la

cote du feuillet mobile  $\Phi$  qui engendre l'hexacouronne; enfin h et  $\omega$ , la translation et la rotation du mouvement hélicoïdal qui permet de passer de la position fixe F à la position  $\Phi$ .

Toutes les autres polycouronnes peuvent être définies comme l'ensemble des feuillets cotés communs à 2, 3, 4, 5 ou 6 hexacouronnes. Finalement: 7 hexacouronnes ont en commun un feuillet coté et un seul. De sorte que réciproquement: 7 feuillets cotés déterminent une hexacouronne, 6 feuillets une pentacouronne, etc., 2 feuillets une monocouronne.

10. — M. le Prof. C. Cailler (Genève). Sur la théorie analytique des corps cotés. — M. C. Cailler présente quelques développements sur les principes analytiques de la théorie des corps solides cotés ou feuillets cotés, due essentiellement à M. de Saussure, qui l'a étudiée surtout par la voie géométrique. C'est M. E. Study qui, le premier, a représenté par des coordonnées d'un emploi commode les positions d'un solide dans l'espace. Rappelons la formation de ces coordonnées où intervient la notion de biquaternion qui remonte à Cayley et Clifford.

Soient  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  les unités quaternionniennes, i une nouvelle unité complexe permutable avec les précédentes et telle que  $i^2 = 0$ . Un corps solide congruent à un système d'axes coordonnés est équivalent à un mouvement de ce dernier; à son tour le mouvement se ramène à une rotation, dont les constantes de Rodrigues sont  $e_0$ ,  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ , combinée avec une translation de composantes

 $a_1, a_2, a_3$ . Les 8 coordonnées homogènes du corps  $\left\langle \begin{array}{c} \alpha_k' \\ \alpha_k'' \end{array} \right\rangle$  seront, selon M. Study, les suivantes :

$$\mathcal{A}_{0}' = e_{0}$$
,  $\mathcal{A}_{0}'' = -\frac{1}{2} (e_{1}a_{1} + e_{2}a_{2} + e_{3}a_{3})$ ,  $\mathcal{A}_{1}' = e_{1}$ ,  $\mathcal{A}_{1}'' = +\frac{1}{2} (e_{0}a_{1} + e_{3}a_{2} - e_{2}a_{3})$ ,  $\mathcal{A}_{2}' = e_{2}$ ,  $\mathcal{A}_{2}'' = +\frac{1}{2} (e_{0}a_{2} + e_{1}a_{3} - e_{3}a_{1})$ ,  $\mathcal{A}_{3}' = e_{3}$ ,  $\mathcal{A}_{3}'' = +\frac{1}{2} (e_{0}a_{3} + e_{2}a_{1} - e_{1}a_{2})$ ;

elles vérifient les conditions  $\sum_{(k)} \mathcal{O}_k'^2 = 1$ ,  $\sum_{(k)} \mathcal{O}_k' \mathcal{O}_k'' = 0$ , de sorte que le corps occupe dans l'espace  $\infty^6$  positions comme il convient. Désignons par un accent la partie réelle d'une quantité com-

plexe, par deux accents la partie imaginaire de cette même quantité, et posons

$$\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_k' + i\mathcal{A}_k''$$
 et  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + i_1\mathcal{A}_1 + i_2\mathcal{A}_2 + i_3\mathcal{A}_3$ 

le biquaternion  $\mathcal{A}$  ainsi formé représente analytiquement le corps ou le mouvement donné. On montre que si  $\overline{\mathcal{A}}$  est le conjugué de  $\mathcal{A}$  obtenu en changeant dans  $\mathcal{A}$  le signe des quatre quantités i, le déplacement d'un point solidaire du corps mobile est représenté par la formule quaternionnienne

$$\sigma' = \alpha \sigma \overline{\alpha}$$

dans laquelle

$$\sigma = 1 + i(i_1x_1 + i_2x_2 + i_3x_3) , \qquad \sigma' = 1 + i(i_1x_1' + i_2x_2' + i_3x_3') ,$$

 $x_k$  et  $x_k'$  désignant les coordonnées du point avant et après le mouvement.

Pour s'élever à la conception du corps coté, il suffit de remarquer que la formule précédente ne change pas quand on multiplie  $\mathfrak{A}$  par le facteur scalaire  $(1 + \omega i)$ , et partant,  $\overline{\mathfrak{A}}$  par le facteur conjugué  $1 - i\omega$ ; en effet, le produit des facteurs ainsi introduits vaut  $1 - i^2\omega^2 = 1$ .

La quantité arbitraire  $\omega$  prendra le nom de cote du corps; le corps coté aura pour représentant analytique un biquaternion

$$\alpha = (1 + \omega i) \ \mathcal{A} = \alpha_0 + i_1 \alpha_1 + i_2 \alpha_2 + i_3 \alpha_3 = (\alpha_0' + i \alpha_0'') + i_1 (\alpha_1' + i \alpha_1'') + \dots ;$$

de là résultent pour les 2 coordonnées  $\begin{pmatrix} \alpha_k' \\ \alpha_k'' \end{pmatrix}$  du corps coté les valeurs

$$\alpha'_{k} = e_{k}$$
,  $\alpha''_{k} = \omega e_{k} + \mathcal{C}''_{k}$ ;  $(k = 0, 1, 2, 3)$ 

lesquelles satisfont les équations

$$\begin{split} (\alpha\alpha)' &= \alpha_0^{'2} + \alpha_1^{'2} + \alpha_2^{'2} + \alpha_3^{'2} = 1 \ , \\ \frac{1}{2} \, (\alpha\alpha)'' &= \alpha_0' \, \alpha_0'' + \alpha_1' \, \alpha_1'' + \alpha_2' \, \alpha_2'' + \alpha_3' \, \alpha_3'' = \omega \ . \end{split}$$

De la sorte, un corps et une cote déterminent ensemble, au signe près, le tableau  $\begin{cases} \alpha_k' \\ \alpha_k'' \end{cases}$ ; réciproquement 8 nombres quelconques  $\alpha_k$  définissent, d'une manière unique, un corps coté, pourvu que ces nombres vérifient la condition  $(\alpha\alpha)' = 1$ .

Il est d'ailleurs aisé d'assigner la signification géométrique des coordonnées  $\begin{cases} \alpha_k' \\ \alpha_k'' \end{cases}$ , en la faisant dériver de celle des invariants  $(\alpha\beta)'$  et  $(\alpha\beta)''$  de deux corps  $\alpha$  et  $\beta$ , de cotes  $\omega_{\alpha}$  et  $\omega_{\beta}$ . Si  $\alpha$  et  $\beta$  désignent l'angle de rotation et le glissement du mouvement hélicoïdal conduisant un de ces corps sur l'autre, on trouve facilement

$$(\alpha \beta)' = \sum_{k} \alpha_{k}' \beta_{k}' = \cos \frac{a}{2} ,$$

$$(\alpha \beta)'' = \sum_{k} (\alpha_{k}' \beta_{k}'' + \alpha_{k}'' \beta_{k}') = (\omega_{\alpha} + \omega_{\beta}) \cos \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \sin \frac{a}{2} .$$

Ce dernier invariant qu'on peut nommer le moment relatif des deux corps joue le rôle principal dans l'étude des polyséries linéaires de corps cotés. M. de Saussure a donné la théorie géométrique de ces polyséries et les a désignées sous le nom générique de polycouronnes; elles sont semblables aux systèmes de vis de

Ball. L'emploi des coordonnées  $\begin{pmatrix} \alpha'_k \\ \alpha''_k \end{pmatrix}$  permet de présenter d'une ma-

nière très claire l'ensemble de ces résultats.

M. Cailler termine sa communication en insistant sur les analogies que présente, avec les théories de la Statique ordinaire, celle des corps non cotés mais doués d'une *masse* ou d'une *inten*-

sité a. Ce sont les corps 
$$\left\langle \begin{array}{l} \mathcal{C}_k' \\ \mathcal{C}_k'' \\ \end{array} \right\rangle$$
 vérifiant la condition  $\sum_k \mathcal{C}_k' \mathcal{C}_k'' = 0$  mais donnant  $\sum_k \mathcal{C}_k'^2 = a^2$ , au lieu de  $\sum_k \mathcal{C}_k'^2 = 1$ .

Un système de corps massifs  $(\mathfrak{A}, a)$ ,  $(\mathfrak{B}, b)$ ,  $(\mathfrak{C}, c)$  ... est toujours équivalent à un corps coté a: deux systèmes  $\mathfrak{S}$  et  $\mathfrak{S}'$ , équivalents au même corps côté a, sont réductibles l'un à l'autre par une opération toute semblable à la composition des vecteurs concourants. Ainsi se trouve fermé le cycle des comparaisons entre la Géométrie réglée d'une part et celle des corps cotés de l'autre.

11. — M. le D<sup>r</sup> H. Berliner (Berne), Une nouvelle géométrie projective analytique. — Dans le plan: Ayant fixé un triangle ABC et 3 nombres  $z_1 z_2 z_3$ , nous attribuons dans le faisceau autour d'un point P — ou dans la ponctuelle sur une droite g; aux 3 rayons PA, PB, PC — respectivement aux 3 points gBC, gCA, gAB ou bien les nombres  $z_1 z_2 z_3$  eux-mêmes comme abscisses, ou bien (ayant fixé un angle unité) les angles  $z_1 z_2 z_3$  comme coordonnées angulaires. (Voir: Berliner Involutions ystème in der Ebene des Dreiecks, Braunschweig 1914, No. 26). Un élément génétique s

aura l'abscisse z ou la coordonnée angulaire w déterminées respectivement par les conditions :

$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}: \frac{z-z_1}{z-z_2} = (PA, PB, PC, S) \text{ resp.} = (gBC, gCA, gAB, S)$$

(Cf. v. Staudt, Beiträge z. Geom. der Lage, § 29). ou bien:

$$\frac{tgz_3-tgz_1}{tgz_2-tgz_2}:\frac{tgw-tgz_1}{tgw-tgz_2}=(\text{PA, PB, PC, S}) \text{ resp.} = (g\text{BC, }g\text{CA, }g\text{AB, S}).$$

Toute forme fondamentale de premier rang possède ainsi un système d'abscisses et de coordonnées angulaires. Si P est sur g; si x est l'abscisse ou la coordonnée angulaire de P dans le système correspondant à g, et si y est l'abscisse ou la coordonnée angulaire de g dans le système correspondant à P, x égale y. On peut aussi parler de l'abscisse ou de la coordonnée angulaire d'un point sur une courbe: on entendra les coordonnées qui sont attribuées à P dans le système de la tangente en ce point.

Les systèmes d'abscisses ou de coordonnées angulaires conduisent à plusieurs systèmes de coordonnées ponctuelles ou tan-

gentielles dans le plan. Nous n'en citons qu'un.

Si l'on fixe un point D, non situé sur un côté du triangle, un second poit P détermine alors univoquement 2 coordonnées angulaires.  $\varphi$  et  $\psi$ , en général : ce sont la coordonnée angulaire  $\varphi$  de DP, dans le système correspondant à D, et la coordonnée angulaire  $\psi$  de P, dans le système de DP. Nous nommons  $\varphi$  et  $\psi$  la  $1^{re}$  et la  $2^e$  coordonnées de P. On pourrait semblablement employer des systèmes d'abscisses.

Les systèmes d'abscisses et de coordonnée angulaire conduisent chacun à une géométrie métrique. Nous définissons la distance de 2 points par la différence des abscisses ou des coordonnées angulaires dans le système correspondant à la droite de jonction, et l'angle de 2 droites par différence des abscisses ou des coordonnées angulaires des droites, dans le système de leur point d'intersection. La distance et l'angle ont ainsi un signe déterminé. Le cercle est une C<sup>3</sup>, et par tout point on peut mener 3 parallèles à une droite g, si (par définition) l'angle de g et de ses parallèles est nul.

Dans l'espace: Ayant fixé un tétraèdre ABCD (BCD  $\equiv \alpha$ , CDA  $\equiv \beta$ , DAB  $\equiv \gamma$ , ABC  $\equiv \delta$ ) et 3 nombres  $z_1 z_2 z_3$ , nous attribuons — dans la ponctuelle sur une droite g arbitraire aux 3 points  $g\alpha$ ,  $g\beta$ ,  $g\gamma$  — dans le faisceau de plans autour de g aux 3 plans gA, gB, gC — dans le faisceau de droites par un point P, dans un plan  $\varepsilon$  ou bien (1<sup>re</sup> manière) aux 3 rayons (P,  $\varepsilon BC$ ) (P,  $\varepsilon CA$ ) (P,  $\varepsilon AB$ ) ou bien (2<sup>e</sup> manière) (P,  $\varepsilon \beta \gamma$ ), (P,  $\varepsilon \gamma \alpha$ ), (P,  $\varepsilon \alpha \beta$ ) — les 3 nombres  $z_1 z_2 z_3$ 

comme abscisses et détérminons comme plus haut l'abscisse de l'élément générique. On pourrait employer de façon analogue les coordonnées angulaires.

De cette façon, à chaque forme fondamentale de 1<sup>er</sup> rang correspondent un (respectivement deux) système d'abscisse, et un (respectivement deux) système de coordonnées angulaires. De plus, à chaque forme fondamentale de second rang, dont le support est un point P, ou un plan  $\varepsilon$ , le tétraèdre ABCD fait correspondre un système de coordonnées dans lequel le trièdre fondamental P(ABC), le rayon PD et le plan polaire de PD suivant P(ABC), ou bien le triangle fondamental  $\varepsilon(\alpha\beta\gamma)$ , la droite  $\varepsilon\delta$  et le pôle de  $\varepsilon\delta$  suivant  $\varepsilon(\alpha\beta\gamma)$  jouent le rôle de base, et où l'on emploiera comme coordonnées les abscisses de la première ou de la seconde manière. Si P et  $\varepsilon$  sont incidents, si xy sont les  $1^{re}$  et  $2^e$  coordonnées de P, dans le système correspondant à  $\varepsilon$ , et  $\xi$ ,  $\eta$  celles de  $\varepsilon$ , dans le système correspondant à P (comme centre d'une gerbe de droites) on a

$$x = \xi$$
 et  $y = \eta$ .

Par 1<sup>re</sup> et 2<sup>e</sup> coordonnées d'un point sur une surface (d'une tangente, d'un point tangent) on comprendra celles du point dans le système de son plan tangent.

Les systèmes d'abscisses — ou de coordonnées angulaires — ou de  $1^{\rm re}$  et  $2^{\rm e}$  coordonnées des formes fondamentales de  $1^{\rm er}$  et de  $2^{\rm e}$  rang conduisent à plusieurs systèmes de coordonnées ponctuels linéaires ou tangentiels de l'espace. Nous ne citons que le suivant. Si nous fixons un point  $\varepsilon$  non situé sur une des faces du tétraèdre, un point P détermine 3 coordonnées angulaires  $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ ; ce sont la  $1^{\rm re}$  et  $2^{\rm e}$  coordonnée angulaire  $\varphi_1 \varphi_2$  de  $\varepsilon$ P dans le système correspondant à  $\varepsilon$ , et la coordonnée angulaire  $\varphi_3$  de P dans le système correspondant à la ponctuelle  $\varepsilon$ P. En outre une droite g détermine 4 coordonnées angulaires  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  qui sont les  $1^{\rm re}$  et  $2^{\rm e}$  coordonnées angulaires du plan  $\varepsilon g$  dans le système correspondant à  $\varepsilon$ , et les  $1^{\rm re}$  et  $2^{\rm e}$  coordonnées angulaires de g dans le système du plan  $\varepsilon g$ .  $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$  sont les les coordonnées de P;  $\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4$  celles de g, — on peut semblablement employer les abscisses comme coordonnées.

L'auteur se propose de publier prochainement un travail plus complet et plus explicite sur ce sujet.

12. — M. le professeur Louis Kollros (Zurich). Sur une dualité. — On peut établir entre la géométrie ponctuelle à 4 dimensions et la géométrie des sphères une liaison telle qu'à un point, une droite, un plan et un espace à 3 dimensions de la première correspondent respectivement une sphère, un cercle, une paire de

points et un réseau de sphères (toutes orthogonales à une sphère

fixe) de la seconde.

On trouve ainsi (parmi beaucoup d'autres¹) quelques théorèmes qui n'ont pas, à notre connaissance, été énoncés jusqu'ici; par

exemple:

1. Étant données 2 paires de points :  $p_1$  et  $p_2$  et une sphère : s, il existe, en général, une seule paire : x de points de s telle que les 2 paires x et  $p_1$  d'une part, x et  $p_2$  d'autre part, soient sur un cercle.

2. Etant données 3 paires de points :  $p_1p_2p_3$  et une sphère : s, il existe, en général, un seul cercle de s qui soit sur une sphère

avec  $p_1$ , respectivement  $p_2$  et  $p_3$ .

3. Etant donnés 3 cercles quelconques  $c_1c_2c_3$  de l'espace, il existe toujours un plan, et en général un seul, qui coupe les 3 cercles en 6 points d'un nouveau cercle :  $a_4$  (cercle associé à  $c_1c_2c_3$ ).

Sur chaque arête du trièdre formé par les plans des 3 cercles donnés, il y a un point, et en général un seul, qui a la même puissance par rapport aux 2 cercles adjacents. Le plan de jonction

de ces 3 points est le plan cherché.

4. Etant donnés 4 cercles :  $c_1 c_2 c_3 c_4$ , en les combinant 3 à 3, on obtient 4 cercles associés :  $a_1 a_2 a_3 a_4$  ( $a_4$  est l'associé de  $c_2 c_3 c_4$ , etc.). Si l'on désigne par  $s_i$  la sphère orthogonale aux 2 cercles  $c_i$  et  $a_i$  i=(1, 2, 3, 4), on peut prouver que les 4 sphères :  $s_1 s_2 s_3 s_4$  sont orthogonales à un même cercle :  $c_5$ ; nous l'appellerons le

complémentaire du groupe  $(c_1 c_2 c_3 c_4)$ .

Les 5 cercles :  $c_1 \dots c_5$  jouissent de propriétés symétriques ; chacun est le complémentaire du groupe formé par les 4 autres. En les combinant 3 à 3, puis 2 à 2, on trouve respectivement 10 cercles associés et 10 sphères analogues aux  $s_i$ . Ces 10 sphères forment avec les 15 cercles une configuration curieuse telle que chaque sphère soit orthogonale à 6 cercles, chaque cercle étant orthogonal à 4 sphères. Les 15 cercles peuvent se réunir de 6 manières différentes en groupes de 5 jouissant des mêmes propriétés que  $c_4 \dots c_5$ .

5. Par une transformation corrélative dans l'espace à 4 dimensions, on trouve que 4 paires de points  $p_1 p_2 p_3 p_4$  choisies arbitrairement déterminent d'une manière unique 10 sphères et 11 autres paires de points telles que chaque sphère passe par 6 paires de points et que chacune des 15 paires soient situées sur 4 sphères.

La paire  $p_5$  complémentaire du groupe  $(p_4p_2p_3p_4)$  jouit d'une propriété intéressante; sur une sphère quelconque, il n'existe pas, en général, de cercle situé sur une sphère avec  $p_4$ , respectivement  $p_2$ ,  $p_3$  et  $p_4$ ; mais si la sphère passe par  $p_5$  (condition suffi-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Les nombreuses propriétés des cyclides s'établissent très simplement par ce procédé.

sante, mais pas nécessaire), elle contient toujours un tel cercle, et, en général, un seul.

- 13. M. le D<sup>r</sup> Ferd. Gonseth (Zurich). Extensions d'un théorème de Poncelet. I. M. Gonseth expose trois extensions du théorème de Poncelet: S'il existe un polygone inscrit à une conique et circonscrit à une seconde conique, il en existe une simple infinité, d'un même nombre de côtés.
- A) S'il existe un polygone gauche inscrit à une cubique gauche  $C_3$ , et dont les plans joignant deux côtés consécutifs sont osculateurs à une seconde cubique gauche  $T_3$ , si de plus  $C_3$  et  $T_3$  sont réciproques dans un système focal arbitraire, il existe une simple infinité de pareils polygones gauches.

La condition que C<sub>3</sub> et T<sub>3</sub> soient réciproques dans un système focal arbitraire est essentielle.

II. Viennent ensuite deux extensions du théorème de Weyr<sub>1</sub>: S'il existe sur une conique un groupe de n+1 points dont toutes les droites de jonction de tous les points 2 à 2 sont tangentes à une courbe de classe n,  $T_n$ , il existe sur la conique une simple infinité linéaire de groupe de n+1 points dont les droites de jonction touchent  $T_n$ .

Ce théorème est évidemment lui-même une généralisation du théorème de Poncelet. Ces extensions sont :

- B) S'il existe sur une quadrique une courbe de  $(n+1)^{\text{ème}}$  ordre dont toutes les bisécantes sont comprises dans un complexe de  $n^{\text{ème}}$  ordre,  $C_n$ , il existe sur la quadrique une simple infinité de courbes de  $(n+1)^{\text{ème}}$  ordre dont toutes les bisécantes sont comprises dans  $C_n$ .
- C) S'il existe sur une cubique gauche  $C_3$  2 groupes de n+2 points dont tous les plans de jonction de tous les points 3 à 3 dans chaque groupe touchent une même surface de  $n^{\text{ème}}$  classe, il existe sur la cubique gauche une double infinité linéaire de pareils groupes de n+2 points.

Discussion: M. Grossmann.

14. — M. le D<sup>r</sup> Ed. Guillaume (Berne). Sur l'impossibilité de ramener à une probabilité composée la loi des écarts à plusieurs variables. — L'auteur montre d'abord un petit appareil permettant de tracer rapidement, sur une feuille de papier, un grand nombre de points répartis suivant la loi des écarts à deux variables, comme les points d'impact sur une cible. L'appareil se compose d'un entonnoir dont l'axe est vertical, maintenu au-dessus d'un certain nombre de grilles horizontales superposées. Sous les

<sup>1</sup> Mathematische Annalen.

grilles, à une certaine distance, on place une feuille de papier millimétré et, sur cette feuille, une feuille de papier carbone. En mettant dans l'entonnoir de la grenaille de plomb, les grains s'écoulent, traversent successivement les grilles superposées, ce qui les disperse, et tombent finalement sur le papier carbone en faisant une marque sur le papier millimétré. Lorsqu'un grand nombre N de grains sont tombés, celui-ci offre une image très nette de la répartition des points d'impact.

Le papier millimétré permet de diviser facilement le plan en un grand nombre de petites cases carrées identiques, de côtés  $\Delta x = \Delta y = \varepsilon$ . La probabilité pour qu'un des grains, désigné à l'avance, soit tombé sur une case de coordonnées  $x_0$ ,  $y_0$  et de surface  $\varepsilon^2$  est, approximativement, en appelant n le nombre de grains tombés dans cette case, et A et a deux constantes caractéristiques

de l'appareil :

$$\frac{n}{N} = A^{2}e^{-a(x_{0}^{2} + y_{0}^{2})} \varepsilon^{2}.$$

Cette probabilité peut se décomposer en un produit de 2 autres probabilités:  $Ae^{-ax_0^2} \varepsilon$  et  $Ae^{-ay_0^2} \varepsilon$ . Par exemple,  $Ae^{-ax_0^2} \varepsilon$  est la probabilité pour que le point ait une abscisse comprise entre  $x_0$ et  $x_0 + \varepsilon$ , autrement dit, soit tombé dans une bande  $(x_0, y)$  de largeur  $\varepsilon$ , formée par toutes les cases d'abscisse  $x_0$ , et parallèle à l'axe des y. Si  $n_1$  est le nombre de grains tombés dans cette bande, on aura:

$$Ae^{-ax_0^2}\varepsilon = \frac{n}{N} .$$

On aura de même pour les grains tombés dans la bande  $(x, y_0)$ parallèle à l'axe des x à la distance  $y_0$ :

$$Ae^{-ay_0^2}\varepsilon = \frac{n_2}{N} .$$

Or, on ne peut traiter  $Ae^{-ax_0^2}$  s et  $Ae^{-ay_0^2}$  s comme deux probabilités indépendantes, car il y a une liaison géométrique qui n'apparaît pas analytiquement: la répartition des points dans une bande, par exemple  $(x_0, y)$ , dépend de la répartition des points de toutes les bandes qui lui sont perpendiculaires, en particulier de la bande  $(x, y_0)$ . Les grains  $n_1$  et  $n_2$  ne pourraient donc faire l'objet de deux tirages dans une urne. Le fait qu'il peut y avoir liaison géométrique sans liaison analytique a déjà été entrevu par Poincaré (Dernières pensées, p. 64)<sup>1</sup>.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Voir en outre : Ed. Guillaume, La Théorie des Probabilités et la Physique, Arch. Sc. phys. et nat. 1914, t. XXXVIII et 1915 t. XXXIX, pp. 373, 205 et 302.

15. — Séance administrative de la Société mathématique suisse. — M. le Prof. H. Fehr, président, donne un rapide aperçu de l'exercice écoulé. Depuis la réunion extraordinaire, tenue à Zurich en mai 1914, le Comité a admis dix nouveaux membres, dont deux au cours de la séance annuelle: MM. G. Tiercy (Genève), E. Rod (Genève), F. Lévy (Genève), Mme Gr. Young (Genève), MM. Berliner (Berne), C.-E. Guye (Genève), F. Gonseth (Genève), Pólya (Zurich), Fr. Laurent (Genève), Denis (Genève). Par contre il a eu le regret d'enregistrer le décès de MM. Guccia (Palerme), G. Cellérier (Genève) et H. v. Wayer (Bâle-C.). La Société compte actuellement 144 membres.

Sur la proposition des vérificateurs des comptes, MM. Crelier et Marchand, la Société approuve le rapport du trésorier, M. Plancherel. Elle procède ensuite au renouvellement de son comité pour les années 1916 et 1917. Sont élus MM. les Prof. Grossmann (Zurich), président; M. Plancherel (Fribourg), vice-président; L. Crelier (Bienne-Berne), secrétaire-trésorier.

La prochaine réunion ordinaire aura lieu dans les Grisons.

### Nouvelles diverses. — Nominations.

M. Harold Воня, professeur adjoint à l'Université de Copenhague, est nommé professeur de mathématiques à l'Ecole polytechnique de la même ville, en remplacement de M. le professeur P. C. V. Hansen, qui prend sa retraite.

M. K. Bopp, privat-docent, est nommé professeur extraordinaire

à l'Université de Heidelberg.

M. G. Faber, professeur à l'Université de Strasbourg, est nommé professeur à l'École technique supérieure de Munich.

M. U. C. Mitchell est nommé professeur extraordinaire à l'Uni-

versité de Kansas.

M. Joh. Mollerup est nommé professeur adjoint à l'Université de Copenhague, en remplacement de M. Вонк, appelé à l'Ecole polytechnique.

M. F. W. Owens est nommé professeur extraordinaire à l'Uni-

versité Cornell, Ithaca, E.-U.

M. H. B. Philipps est nommé professeur extraordinaire à l'Institut technologique de Boston, Mass.

Privat-docents. — Ont été admis en qualité de privat-docents pour les mathématiques, MM. J. Radon et Rulf, à l'École technique supérieure de Vienne, M. Simandl, à l'École technique supérieure de Brünn, et M. G. Tiercy, à l'Université de Genève.

## Nécrologie.

M. H. Ganter, professeur au Gymnase d'Aarau (Suisse), est décédé le 29 juillet 1915. Très apprécié par ses élèves, il était