Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 17 (1915)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PROBLÈME DE JEAN DE PALERME ET DE LÉONARD DE PISE
Autor: Turrière, Emile
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16326

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LE PROBLÈME DE JEAN DE PALERME ET DE LÉONARD DE PISE

PAR

Emile TURRIÈRE (Montpellier).

La publication du bel article de M. A. AUBRY[1] sur les éléments de la théorie des nombres, me décide à faire paraître quelques remarques au sujet des relations qui existent entre la Géométrie et cette branche de la science, et notamment sur le grand intérêt que présentent des considérations géométriques dans l'étude de diverses questions ressortissant au domaine de l'Arithmétique. Le jugement porté par M. A. AUBRY[2] sur la méthode que je nommerai *méthode arithmo-géométrique* me paraît un peu trop sévère et j'estime que cette méthode qui a été employée, sous une forme plus ou moins déguisée par les Anciens, par Diophante en particulier, méritait qu'une meilleure destinée lui fût réservée.

Un exemple simple, emprunté à l'histoire des mathématiques, suffira pour mettre en évidence l'intérêt qu'il y a parfois à laisser de côté des représentations au moyen de fonctions elliptiques et à se placer sous un point de vue beaucoup plus élémentaire. J'ai choisi une question célèbre qui me semble digne d'une étude toute spéciale : la première des trois questions posée par Jean de Palerme à Léonard de Pise, en 1225.

1. — Il s'agissait de trouver un carré qui, augmenté ou diminué du nombre 5, restât, dans les deux cas, un carré

---

[1] A. AUBRY, Le premier chapitre de la théorie élémentaire des nombres. *E. M.*, t. XVII, 1915, pp 161-195.

[2] pp. 173 et sq. du travail cité plus haut.

parfait. Léonard de Pise répondit que le carré du nombre $\frac{41}{12}$ était solution de cette question; on a, en effet :

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2, \qquad \left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2.$$

Cette solution est simple mais particulière. Le problème de Jean de Palerme consiste, dans sa généralité, à trouver les solutions rationnelles du système suivant de deux équations quadratiques à trois inconnues x, y et z.

$$(1) \qquad x^2 + 5 = y^2, \qquad x^2 - 5 = z^2.$$

Du point de vue arithmogéométrique, il s'agit donc d'étudier la courbe gauche que représentent ces deux équations.

Considérons, d'une manière plus générale, la biquadratique gauche représentée par les équations suivantes

$$(2) \qquad x^2 + a = y^2, \qquad x^2 + b = z^2,$$

dans lesquelles a et b représentent deux constantes algébriques rationnelles. L'équation du plan osculateur au point M de coordonnées (x, y, z) est :

$$(b - a)x^3 X - by^3 Y + az^3 Z = ab(b - a).$$

Le plan osculateur rencontre la quartique en un second point M_1 de coordonnées x_1, y_1, z_1; celles-ci sont évidemment des fonctions rationnelles des coordonnées respectives x, y, z du point M; le calcul donne les expressions suivantes pour les coordonnées x_1, y_1, z_1 :

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = -x\dfrac{x^8 - 6abx^4 - 4ab(a+b)x^2 - 3a^2b^2}{3x^8 + 4(a+b)x^6 - 6abx^4 - a^2b^2}, \\[2ex] y_1 = -y\dfrac{y^8 - 6a(a-b)y^4 - 4a(a-b)(b-2a)y^2 - 3a^2(a-b)^2}{3y^8 + 4(b-2a)y^6 - 6a(a-b)y^4 - a^2(a-b)^2}, \\[2ex] z_1 = -z\dfrac{z^8 - 6b(b-a)z^4 - 4b(b-a)(a-2b)z^2 - 3b^2(b-a)^2}{3z^8 + 4(a-2b)z^6 - 6b(b-a)z^4 - b^2(b-a)^2}, \end{cases}$$

Dans ces conditions, si le point M est un *arithmopoint* (c'est-à-dire un point dont les coordonnées sont des nombres rationnels), il en sera de même de M_1. La méthode précédente permet donc de déduire de tout arithmopoint de la

biquadratique gauche considérée un nouvel arithmopoint. Il n'y aurait exception que pour le cas où M serait un point à plan osculateur admettant un contact d'ordre supérieur avec la courbe; il n'existe d'ailleurs pas de point de cette nature, dans le cas actuel, à distance finie.

La solution de Léonard de Pise, $x = \frac{41}{12}$, $y = \frac{49}{12}$, $z = \frac{31}{12}$ entraîne donc l'existence d'une infinité d'autres systèmes de solutions rationnelles des équations (1); ces solutions se déduisent les unes des autres par l'emploi indéfiniment répété des formules (3). Ces solutions sont d'ailleurs très compliquées dès la seconde.

2. — Une seconde méthode consiste à rattacher l'étude du système de deux équations (2) à celle d'une cubique plane. On obtient, en effet, tous les arithmopoints de l'hyperbole équilatère d'équation

$$y^2 - x^2 = a$$

en posant :

$$x + y = u \ , \qquad y - x = \frac{a}{u} \ ,$$

c'est-à-dire :

$$x = \frac{1}{2}\left(u - \frac{a}{u}\right) = \frac{u^2 - a}{2u} \ ,$$

$$y = \frac{1}{2}\left(u + \frac{a}{u}\right) = \frac{u^2 + a}{2u} \ ;$$

pour l'hyperbole équilatère d'équation

$$z^2 - x^2 = b \ ,$$

on a de même :

$$x = \frac{v^2 - b}{2v} \ , \qquad z = \frac{v^2 + b}{2v} \ .$$

Egalant alors entre elles les deux expressions respectives de x en fonctions de u et de v, on obtient la relation suivante entre u et v :

$$v(u^2 - a) = u(v^2 - b) \ ;$$

elle représente dans un plan rapporté à deux axes (Ou, Ov), une cubique plane :

$$uv(u - v) = av - bu \ . \tag{4}$$

Ainsi donc à toute solution rationnelle du Problème généralisé de Jean de Palerme et de Léonard de Pise correspond un arithmopoint de la cubique plane (4); inversement, à tout arithmopoint de cette cubique correspond une solution du problème considéré. Les formules de correspondance sont:

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} u = x + y\,, \qquad v = x + z\,; \\ x = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{bu^2 - av^2}{bu - av}\,, \qquad y = \dfrac{u^2 + a}{2u}\,, \qquad z = \dfrac{v^2 + b}{2v}\,. \end{array}\right.$$

Dans le cas du problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise proprement dit, $a = 5$ et $b = -5$; l'équation de la cubique est alors:

$$uv(u - v) = 5(u + v)\,;$$

la solution particulière trouvée par Léonard de Pise

$$x = \frac{41}{12}\,, \qquad y = \frac{49}{12}\,, \qquad z = \frac{31}{12}\,,$$

correspond à l'arithmopoint de cette cubique de coordonnées:

$$u = \frac{15}{2}\,, \qquad v = 6\,.$$

En réalité, les solutions

$$x = \pm\frac{41}{12}\,, \qquad y = \pm\frac{49}{12}\,, \qquad z = \pm\frac{31}{12}\,,$$

au nombre de huit et qui ne sont pas distinctes au point de vue arithmétique, sont associées à huit arithmopoints de la cubique. Ceux-ci se déduisent les uns des autres et de l'un d'eux au moyen de transformations simples: symétrie par rapport à l'origine, qui est un centre inflexionnel pour la cubique; semi-inversion cartésienne $\left(u_1 = u\,,\ v_1 = -\dfrac{1}{5v}\right)$; semi-inversion cartésienne $\left(u_2 = -\dfrac{1}{5u}\,,\ v_2 = v\right)$; inversion cartésienne $\left(u_3 = \dfrac{1}{5u}\,,\ v_3 = -\dfrac{1}{5v}\right)$; ces quatre transformations homographiques laissent la cubique invariante.

L'existence de ces transformations homographiques s'explique d'ailleurs aisément au moyen de la considération des

asymptotes de la cubique. Cette courbe possède, en effet, trois asymptotes : les deux axes coordonnés $u = 0$, $v = 0$ et leur bissectrice $u - v = 0$. Il en résulte que la connaissance d'un arithmopoint M de la courbe conduit à trois nouveaux arithmopoints, intersections de la cubique avec les parallèles aux asymptotes menées par M ; la symétrie par rapport à O double ensuite le nombre de ces arithmopoints. Ces transformations de la cubique en elle-même présentent un certain intérêt : les arithmopoints ainsi obtenus combinés avec d'autres arithmopoints, connus par tout autre procédé, donnent, en effet, naissance, par alignements, à de nouveaux arithmopoints de la cubique et par suite à de nouvelles solutions du problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise.

C'est ainsi que les deux solutions

$$u_1 = \frac{15}{2}, \qquad v_1 = 6 \; ; \qquad u_2 = \frac{2}{3}, \qquad v_2 = -6 \; ,$$

donnent par alignement une troisième solution

$$u_3 = \frac{49 \times 41}{12 \times 31}, \qquad v_3 = \frac{60 \times 49}{31 \times 41} \; .$$

3. — Etant donné un arithmopoint quelconque M de la cubique d'équation (4),

$$uv(u - v) = av - bu \; , \tag{4}$$

la tangente en ce point à la courbe rencontre à nouveau la cubique en un autre arithmopoint M. Il n'y aurait exception que pour un arithmopoint inflexionnel. De là naît une méthode de déduction d'une infinité d'arithmopoints de la cubique à partir de tout arithmopoint donné.

Partons du point M de coordonnées (u, v) ; la tangente à la cubique en ce point a pour équations paramétriques

$$\mathrm{U} = u + \lambda(v^2 + b)u^2 \; , \qquad \mathrm{V} = v + \lambda(u^2 + a)v^2 \; ;$$

portant ces expressions des coordonnées courantes U, V dans l'équation

$$\mathrm{UV}(\mathrm{U} - \mathrm{V}) = a\mathrm{V} - b\mathrm{U}$$

de la cubique, on obtient une équation du troisième degré en λ; celle-ci admet $\lambda = 0$ pour racine double; la racine simple λ_1 est :

$$\lambda_1 = -\left[\frac{1}{u(v^2+b)} + \frac{1}{v(u^2+a)} + \frac{u-v}{bu^2-av^2}\right];$$

il en résulte que les coordonnées du point *tangentiel* M_1 sont :

$$(6) \qquad u_1 = \frac{2au^2(v^2+b)(v-u)}{(u^2+a)(bu^2-av^2)}, \qquad v_1 = \frac{2bv^2(u^2+a)(v-u)}{(v^2+b)(bu^2-av^2)}.$$

Pour faciliter les calculs, il y a intérêt à faire intervenir explicitement le nombre x qui figure dans l'énoncé du problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise :

$$x = \frac{u^2-a}{2u} = \frac{v^2-b}{2v} = \frac{bu^2-av^2}{2(bu-av)};$$

on peut écrire :

$$a = u(u-2x), \qquad b = v(v-2x),$$

d'où résultent les expressions suivantes de u_1, v_1 et λ_1 :

$$(7) \qquad \begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{1}{2uv}\left[\dfrac{1}{u-x} + \dfrac{1}{v-x} - \dfrac{1}{x}\right], \\ u_1 = \dfrac{a}{x}\cdot\dfrac{v-x}{u-x}, \qquad v_1 = \dfrac{b}{x}\cdot\dfrac{u-x}{v-x}, \end{cases}$$

c'est-à-dire encore :

$$(8) \qquad u_1 = \frac{az}{xy}, \qquad v_1 = \frac{by}{xz}.$$

La solution correspondante du problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise est donnée par les formules suivantes :

$$(9) \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{az^4-by^4}{2xyz(z^2-y^2)}, \\ y_1 = \dfrac{x^2y^2+az^2}{2xyz}, \qquad z_1 = \dfrac{x^2z^2+by^2}{2xyz}. \end{cases}$$

qu'on peut mettre aussi sous la forme équivalente :

$$(10) \qquad x_1 = \frac{ab-x^4}{2xyz}, \quad y_1 = \frac{ab+2ax^2+x^4}{2xyz}, \quad z_1 = \frac{ab+2bx^2+x^4}{2xyz}.$$

4. — Il est encore possible de présenter autrement l'étude du problème généralisé de Jean de Palerme et de Léonard de Pise et de la rattacher à celle d'une cubique plane.

Les équations (2) sont, en effet, équivalentes aux suivantes :

$$(b - a)x^2 = by^2 - az^2 , \qquad a - b = y^2 - z^2 .$$

La première de celles-ci représente, en coordonnées homogènes, une arithmoconique contenant l'arithmopoint $x = y = z$; introduisant le paramètre t défini par la relation

$$y - x = t(z - x) ,$$

on obtient la représentation paramétrique suivante de cette arithmoconique :

$$(11) \qquad y = x \cdot \frac{-bt^2 + 2at - a}{bt^2 - a} , \qquad z = x \cdot \frac{bt^2 - 2bt + a}{bt^2 - a} ;$$

portant alors ces expressions dans l'équation

$$a - b = y^2 - z^2 ,$$

il vient :

$$(12) \qquad x^2 = \frac{(bt^2 - a)^2}{4} \cdot \frac{1}{t(1 - t)(bt - a)} ;$$

il s'agit donc de rendre cette dernière expression carrée, c'est-à-dire d'étudier la cubique qui, dans un plan rapporté à deux axes (t, T), aurait pour équation

$$(13) \qquad t(1 - t)(bt - a) = \mathrm{T}^2 .$$

Le problème généralisé de Jean de Palerme et de Léonard de Pise est donc équivalent à l'étude arithmogéométrique de la cubique précédente.

Les équations précédentes se simplifient considérablement dans le cas moins général, mais qui contient comme cas particulier le problème proprement dit de Jean de Palerme, où les deux constantes a et b sont symétriques. On est alors conduit à la cubique plane représentée par l'équation :

$$at(1 - t^2) + \mathrm{T}^2 = 0 .$$

Dans ce même cas, on peut arriver à la même conclusion en observant que des deux équations

$$x^2 + a = y^2 , \qquad x^2 + b = z^2 , \qquad (\text{avec} \quad b + a = 0)$$

résulte l'équation

$$y^2 + z^2 = 2x^2 ;$$

il suffit de poser

$$y = x(\cos\theta + \sin\theta) , \qquad z = x(\cos\theta - \sin\theta) ,$$

en supposant $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ rationnel, pour avoir la représentation paramétrique générale des solutions rationnelles de l'équation $y^2 + z^2 = 2x^2$. Portant alors ces expressions dans l'équation $y^2 - z^2 = 2a$, on obtient :

$$x^2 = \frac{a}{\sin 2\theta} . \tag{14}$$

L'étude des solutions rationnelles du système d'équations (2)

$$x^2 + a = y^2 , \qquad x^2 - a = z^2$$

est donc équivalente à la recherche des valeurs rationnelles de $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ *qui rendent carré parfait le produit* $a \sin 2\theta$.

En posant $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = -t$, il s'agit donc de rendre carré le polynome cubique $at(t^2 - 1)$; on est ainsi conduit à l'étude de la cubique précédente.

La remarque précédente présente un certain intérêt ; elle permet, en effet, d'affirmer l'impossibilité du problème considéré dans deux cas particuliers.

5. — *Impossibilité des équations :*

$$x^2 + 1 = y^2 , \qquad x^2 - 1 = z^2 .$$

D'après ce qui précède, il s'agit de démontrer que l'expression de $\sin 2\theta$ en fonction de $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ ne peut jamais être carrée lorsque $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ est rationnel. Il me suffira de rappeler que, d'après Fermat, la surface d'un triangle rectangle à côtés rationnels n'est jamais mesurée par un carré. Si l'on

désigne par θ l'un des angles aigus d'un tel triangle pythagorique, $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ est, on le sait, un nombre rationnel; la surface est $\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$, c'est-à-dire $\frac{1}{4}\sin 2\theta$.

Le problème proposé par Jean de Palerme à Léonard de Pise aurait donc été impossible si le nombre 5 avait été remplacé par le nombre 1.

6. — *Impossibilité des équations :*

$$x^2 + 2 = y^2 , \qquad x^2 - 2 = z^2 .$$

C'est encore une proposition de Fermat qui me permettra d'établir l'impossibilité du problème de Jean de Palerme dans le cas où le nombre 2 est substitué au nombre 5. Fermat a établi, en effet, l'impossibilité de l'équation indéterminée

$$x^4 + y^4 = z^2 ,$$

en nombres entiers; il est aisé d'étendre cette impossibilité au cas où x, y, z seraient des nombres rationnels; si l'équation précédente admettait, en effet, des solutions rationnelles $x = \frac{a}{A}$, $y = \frac{b}{B}$, $z = \frac{c}{C}$, l'existence de ce système de solutions rationnelles entraînerait l'existence du système de solutions entières :

$$x_1 = a\mathrm{BC} , \qquad y_1 = b\mathrm{AC} , \qquad z_1 = c\mathrm{ABC} .$$

Il est donc impossible de satisfaire rationnellement à l'équation

$$\left(\frac{x^2}{z}\right)^2 + \left(\frac{y^2}{z}\right)^2 = 1 .$$

c'est-à-dire encore aux équations

$$\frac{x^2}{z} = \cos\theta , \qquad \frac{y^2}{z} = \sin\theta ,$$

$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ étant un nombre rationnel; en admettant l'existence d'une solution, le produit $\sin\theta \,.\, \cos\theta$ serait carré et réciproquement; il est donc impossible de rendre $\sin 2\theta$ double

d'un carré ; les équations

$$x^2 + 2 = y^2 , \qquad x^2 - 2 = z^2$$

sont donc impossibles en nombres rationnels.

Je ferai observer que le résultat précédent peut être énoncé sous la forme intéressante suivante : *l'aire d'un triangle pythagorique n'est jamais mesurée par le double d'un carré.*

7. — Il est aisé de formuler la correspondance géométrique qui existe entre les deux cubiques planes précédemment mises en évidence, représentées respectivement par les équations (4) et (13). Le paramètre t qui figure dans les expressions (11), (12) et (13) est, en effet, défini par la relation

$$t = \frac{y - x}{z - x} ,$$

que les équations (5) permettent d'écrire

$$t = \frac{av}{bu} .$$

On a d'autre part, d'après (12) et (13) :

$$\mathrm{T} = \frac{bt^2 - a}{2x} = \frac{av}{bu}(u - v) ;$$

les cubiques planes (4) et (13) sont donc reliées entre elles par la transformation définie par les formules

$$(15) \qquad t = \frac{av}{bu} , \quad \mathrm{T} = \frac{av}{bu}(u - v) , \quad u = \frac{a\mathrm{T}}{t(a - bt)} , \quad v = \frac{b\mathrm{T}}{a - bt} .$$

La correspondance entre les deux cubiques est donc birationnelle, mais non homographique ; à trois points alignés de l'une des deux cubiques ne correspondent pas trois points alignés de l'autre. Si donc on connaît deux arithmopoints $M_1 M_2$ de l'une des cubiques et, par suite, un troisième M_3 de cette même cubique les formules de transformation précédentes feront connaître trois arithmopoints $M'_1 M'_2 M'_3$ non alignés de l'autre cubique ; ceux-ci donneront immédiatement, par alignements, trois nouveaux arithmopoints de cette seconde cubique, c'est-à-dire de nouvelles solutions du problème de Jean de Palerme.

4 septembre 1915.