

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 17 (1915)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** PROPRIÉTÉS INVOLUTIVES DUALISTIQUES DES TRIANGLES  
**Autor:** Crelier, L.  
**Kapitel:** § IV. — Coniques particulières.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-16324>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

ment homologiques et engendrent les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ .

Les triangles déterminés par les rayons conjugués comme  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$  et  $a'_2$ ,  $b'_2$ ,  $c'_2$  soient  $\Pi_a\Pi_b\Pi_c$  et  $\Pi'_a\Pi'_b\Pi'_c$ , forment l'involution de triangles, comme dans le cas général.

Les triangles doubles sont le triangle  $ABC$  sur la droite  $p$  et le point de coupe des côtés du triangle auxiliaire soit  $P$ .

Les propriétés des triangles conjugués prennent maintenant la forme suivante :

1. *Les lignes de jonction des sommets homologues sont confondues avec les droites  $a'$ ,  $b'$  ou  $c'$ .*

2. *Les lignes de jonction des sommets non homologues comme  $\Pi_b\Pi'_c$ ,  $\Pi'_b\Pi_c$  ou  $\Pi_a\Pi'_c$ ,  $\Pi_c\Pi'_a$  etc., passent respectivement par  $A'$ ,  $B'$  ou  $C'$ .*

3. *Dans l'hexagone  $\Pi_a\Pi'_c\Pi_b\Pi'_a\Pi_c\Pi'_b$  les points de coupe des côtés opposés sont en ligne droite sur  $p$  et les lignes de jonction des sommets opposés passent par le même point  $P$ .*

4. *Les triangles circonscrits à deux triangles conjugués et dont les côtés passent respectivement par  $A$ ,  $B$  ou  $C$  sont aussi des triangles conjugués.*

Les démonstrations ou les remarques des cas précédents s'appliquent à priori aux propriétés ci-dessus.

doublement homologiques et engendrent les droites  $a'$ ,  $b'$  et  $c'$ .

Les triangles déterminés par les points conjugués  $A_2B_2C_2$  et  $A'_2B'_2C'_2\dots$  forment l'involution des triangles conjugués de la même manière que dans le cas général.

Les triangles doubles sont d'abord le point de coupe  $P$  des côtés du triangle fondamental, puis le triangle  $ABC$  des points doubles sur ces côtés.

Les propriétés des triangles conjugués prennent maintenant la forme suivante :

1. *Les points de coupe de deux côtés homologues sont confondus avec les points  $A'$ ,  $B'$  ou  $C'$ .*

2. *Les points de coupe de deux côtés non homologues comme  $A_2B_2$ ,  $A'_2C'_2$  ou  $A_2C_2$ ,  $A'_2B'_2$  etc., sont respectivement sur  $a'$ ,  $b'$  ou  $c'$ .*

3. *Dans l'hexagone  $(a_2)(c'_2)(b_2)(a'_2)(c_2)(b'_2)$  les lignes de jonction des sommets opposés passent par le point  $P$  et les points de coupe de côtés opposés sont sur la même droite  $p$ .*

4. *Les triangles inscrits dans deux triangles conjugués et dont les sommets se trouvent respectivement sur les droites  $a_1$ ,  $b_1$  ou  $c_1$  sont aussi des triangles conjugués.*

Les raisonnements et les démonstrations sont les mêmes que dans les cas précédents.

#### § IV. — Coniques particulières.

21. Nous nous reporterons au cas où le triangle auxiliaire se ramène à trois droites concou-

22. Nous reviendrons au cas où le triangle auxiliaire  $ABC$  se ramène à trois points en ligne

rantes et soit  $P$  le point de coupe des côtés  $a_1, b_1$  et  $c_1$ . Nous considérerons maintenant les involutions de rayons en  $A, B$  et  $C$  puis les involutions de points sur  $a_1, b_1$  et  $c_1$ . Les rayons conjugués  $a_2, b_2, c_2$  puis  $a'_2, b'_2, c'_2$

droite, et soit  $p$  cette droite. Nous considérerons ensuite les involutions de points sur les côtés fondamentaux  $a_1, b_1, c_1$  puis les involutions de rayons en  $A, B$  et  $C$ . Les points conjugués  $A_2, B_2, C_2$  et  $A'_2, B'_2, C'_2$

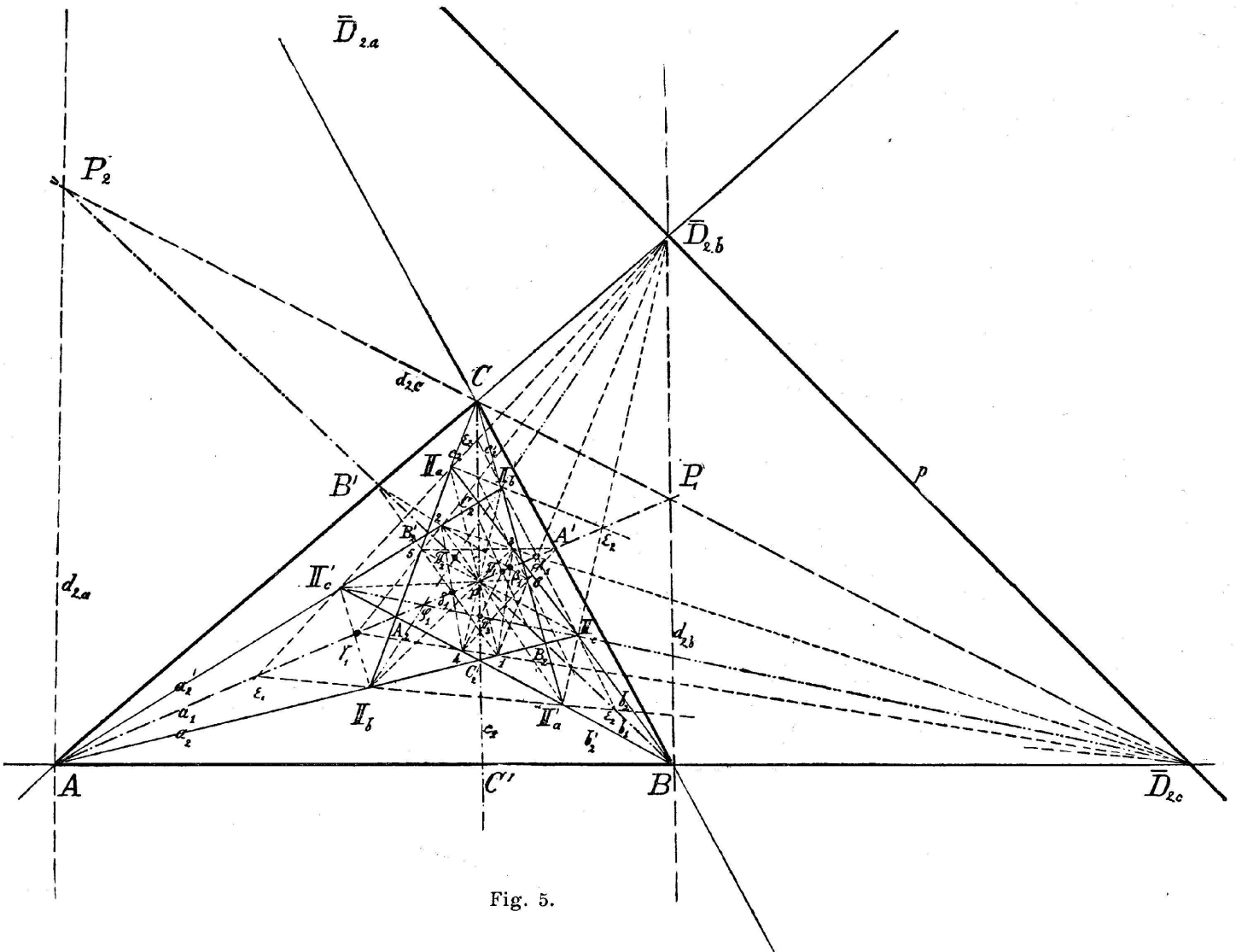


Fig. 5.

déterminent deux triangles conjugués de l'involution de triangles, § II, n° 13. Les points conjugués  $A_2, B_2, C_2$  puis  $A'_2, B'_2, C'_2$  déterminent à leur tour deux triangles conjugués de l'involution dualistique du § III, n° 18.

déterminent deux triangles conjugués de l'involution de triangle du § II, n° 14. Les rayons conjugués  $a_2, b_2, c_2$  puis  $a'_2, b'_2, c'_2$  déterminent à leur tour deux autres triangles conjugués de l'involution de triangles du § III, n° 19.



1. L'hexagone  $II_a II_b II_c II'_a II'_b II'_c$  peut être inscrit dans une conique  $C_1$ . La droite de Pascal de l'hexagone est la polaire trilineaire  $p$  de  $P$ .

Voir prop. 3, n° 13.

2. L'hexagone  $A_2 C'_2 B_2 A'_2 C_2 B'_2$  est circonscriptible à une autre conique  $K_1$ . Le point de Brianchon de l'hexagone est le point  $P$ .

Ceci est de toute évidence puisque les lignes de jonction des sommets opposés sont les droites  $a_1, b_1, c_1$  par  $P$ .

3. Les deux triangles conjugués  $II_a II_b II_c$  et  $II'_a II'_b II'_c$  sont inscrits dans la conique  $C_1$  et circonscrits à la conique  $K_1$ . Les droites de jonction de chaque sommet avec le point de tangence du côté opposé sur  $K_1$  passent toutes les six par le point  $P$ .

Soient les points de tangence 1 opposé à  $II_a$ , 2 opposé à  $II'_a$ , 3 opposé à  $II_b$ , 4 à  $II'_b$ , etc., ... Nous étudierons la droite  $II'_a-2$ ; elle passe par  $P$ ; en effet, dans l'hexagone circonscrit  $A-2-C_2-A'_2-II'_a-C'_2-A$ , les côtés  $A-2$  et  $2-C_2$  sont confondus avec la tangente en 2; les diagonales par les sommets opposés sont  $A-A'_2$ ,  $2-II'_a$  et  $C_2-C'_2$ . Les diagonales  $A-A'_2$  et  $C_2-C'_2$  se coupent évidemment en  $P$ , donc la troisième  $2-II'_a$  passe également par  $P$ .

4. Etant donné les deux triangles conjugués  $II_a II_b II_c$  et  $II'_a II'_b II'_c$  circonscrits à la conique  $K_1$ , la ligne de jonction des points de tangence de deux côtés d'un même triangle passe par le

1. L'hexagone  $(a_2)(c'_2)(b_2)(a'_2)(c_2)(b'_2)$  peut être circonscrit à une conique  $K_2$ . Le point de Brianchon de la figure est le pôle trilineaire  $P$  de la droite donnée  $p$ .

Voir prop. 3, n° 14.

2. L'hexagone de côtés  $a_2, c'_2, b_2, a'_2, c_2, b'_2$  ou de sommets  $A_2 C'_2 B_2 A'_2 C_2 B'_2$  est inscriptible dans une conique  $C_2$ . La droite de Pascal de la figure est  $p$ .

Les côtés opposés coupent évidemment en  $A, B, C$  sur la droite  $p$ .

3. Les deux triangles conjugués  $A_2 B_2 C_2$  et  $A'_2 B'_2 C'_2$  sont inscrits dans la conique  $C_2$  et circonscrits à la conique  $K_2$ . Les points de coupe de chaque côté avec la tangente de  $C_2$  par le sommet opposé sont tous les six sur  $p$ .

Nous considérerons le côté  $B'_2 C'_2$  ou  $(a'_2)$  et la tangente de  $C_2$  par  $A'_2$ . Nous admettrons que ces droites se coupent en  $e'_1$  et nous démontrerons que ce point est bien sur  $p$ .

En effet, dans l'hexagone inscrit formé par la tangente en  $A'_2$  et les sommets  $B_2 B'_2 C_2 C'_2$ , les points de coupe des côtés opposés sont  $e'_1$  pour la tangente en  $A'_2$  et le côté  $B'_2 C'_2$  puis  $C$  pour  $A'_2 B_2$  et  $C_2 C'_2$  et enfin  $B$  pour  $B_2 B'_2$  et  $C_2 A'_2$ . Le point  $e'_1$  est donc bien sur la droite  $BC$  ou  $p$ .

4. Etant donné les deux triangles conjugués  $A_2 B_2 C_2$  et  $A'_2 B'_2 C'_2$  inscrits dans la conique  $C_2$ , le point de coupe des tangentes par deux sommets d'un même triangle se trouve

point de coupe des côtés correspondants des deux triangles primitifs  $ABC$  et  $a_1 b_1 c_1$  par  $P$ .

Nous prendrons les points de tangence sur les côtés  $II'_a II'_c$  et  $II'_a II'_b$ , soient 4 et 6. Les côtés correspondants des triangles primitifs seront  $BC$  ou  $a$  et  $a_1$  par  $P$ , avec le point de coupe en  $A'$ .

Considérons ensuite l'hexagone circonscrit  $A_2 - 4 - B - A'_2 - 6 - C - A_2$  dans lequel les tangentes  $II_a II_a = BA_2$  et  $II'_a II'_b = CA'_2$  avec leurs points de tangence 4 et 6 comptent comme deux côtés de l'hexagone.

Les diagonales par les sommets opposés sont  $A_2 A'_2$  ou  $AA'$ , 4 — 6 ou la ligne de jonction des points de tangence, puis  $BC$  ou le côté  $a$ . Comme  $A'$  est sur  $a$ , la droite 4 — 6 passera par  $A'$ .

5. *Etant donné les deux triangles  $II_a II_b II_c$  et  $II'_a II'_b II'_c$  circonscrits à la conique  $K_1$ , la ligne de jonction des points de tangence 3 et 2 relatifs à un côté ( $b_2$ ) du premier triangle et un côté ( $a'_2$ ) du second, passe par le point correspondant  $\bar{D}_{2.c}$  de la droite  $p$ .*

En effet, dans l'hexagone circonscrit 2 —  $II'_b$  —  $A'_2$  — 3 —  $II_a$  —  $B'_2$  — 2 les lignes de jonction des sommets opposés 2 — 3,  $II_a$  —  $II'_b$ ,  $A'_2$  —  $B'_2$  sont concourantes; les deux dernières passent par  $\bar{D}_{2.c}$  sur  $p$  (voir § 2, n° 11 et 13, chiff. 2); 2 — 3 passe donc par  $\bar{D}_{2.c}$ .

Ceci subsiste pour 5 — 6 et 4 — 1, puis pour les groupe-

toujours sur la droite de jonction du point  $P$  au sommet correspondant du triangle fondamental.

Soient les tangentes par  $B'_2$  et  $C'_2$ ; elles se coupent en un point  $tb'c'$  et nous avons à démontrer que ce point se trouve sur la droite  $AA_1$  ou  $a'_1$ .

Considérons ensuite l'hexagone inscrit  $B_2 - B'_2 - B'_2 - C_2 - C'_2 - C'_2 - B_2$ , dans lequel les tangentes en  $B'_2$  et en  $C'_2$  sont considérées comme côtés par deux sommets infiniment rapprochés.

Les points de coupe des côtés opposés sont  $tb'c'$  pour la tangente en  $B'_2$  et celle en  $C'_2$ ,  $A_1$  pour  $B_2 B'_2$  et  $C_2 C'_2$ , puis  $A$  pour  $B'_2 C_2$  et  $B_2 C'_2$ . Ces points étant en ligne droite,  $tb'c'$  est donc bien sur  $A_1 A$  ou  $a'_1$ .

5. *Etant donné les deux triangles conjugués  $A_2 B_2 C_2$  et  $A'_2 B'_2 C'_2$  inscrits dans la conique  $C_2$ , le point de coupe des tangentes par deux sommets quelconques, pris un sur chaque triangle,  $B_2$  et  $C'_2$  par exemple, est situé sur le rayon correspondant  $\bar{d}_{2.a}$  par  $A_1$  et  $P$ .*

En effet, dans l'hexagone  $B_2 - B_2 - C_2 - C'_2 - C'_2 - B'_2 - B_2$ , les points de coupe des côtés opposés sont  $tb'c'$  sur les tangentes en  $B_2$  et  $C'_2$  puis  $A_1$  sur  $C_2 C'_2$  et  $B_2 B'_2$ , et enfin  $k_{aa'}$  sur  $B_2 C_2$  et  $B'_2 C'_2$ . La droite  $A_1 k_{aa'}$  est également le rayon double  $\bar{d}_{2.a}$  (voir § 2, n° 14, chiff. 1). Donc  $tb'c'$  est sur  $\bar{d}_{2.a}$ .

ments analogues relatifs à  $\bar{D}_{2.a}$  et  $\bar{D}_{2.b}$ .

6. Etant donné deux paires de côtés opposés dans les deux triangles conjugués circonscrits à la conique  $K_1$ , comme  $\Pi_a\Pi_b$  et  $\Pi'_a\Pi'_b$  puis  $\Pi_a\Pi_c$  et  $\Pi'_a\Pi'_c$ , le point de coupe  $\pi_1$  des lignes de jonction des points de tangence des côtés opposés est aussi le point de coupe de la ligne de jonction des sommets correspondants  $\Pi_a\Pi'_a$  avec le côté correspondant  $a_1$  par  $P$  du triangle auxiliaire.

Dans l'hexagone circonscrit  $\Pi'_a - 4 - A_2 - \Pi_a - 3 - A'_2 - \Pi'_a$ , les tangentes en 4 et 3 avec leurs points de tangence sont comptées comme deux côtés de la figure.

Le point de Brianchon sera sur les diagonales  $\Pi_a\Pi'_a$ ,  $3 - 4$  et  $A_2A'_2$ . La première est la ligne de jonction des sommets  $\Pi_a$  et  $\Pi'_a$  et la troisième est un côté  $a_1$  du triangle auxiliaire. La seconde, qui est la ligne de jonction des points de tangence des côtés opposés, passera donc par l'intersection  $\pi_1$  des deux autres. Un même raisonnement nous permet d'établir que la ligne de jonction des autres points de tangence 5 et 6 passe également par  $\pi_1$ .

Nous avons de même  $\pi_2$  sur  $b_1$  et  $\pi_3$  sur  $c_1$ .

Nous avons encore vu précédemment (n° 13, chiff. 1), que  $\Pi_a\Pi'_a$  rencontre  $BC$  en  $\bar{D}_{2.a}$  et que les points  $\bar{D}_{2.a}$ ,  $\bar{D}_{2.b}$  et  $\bar{D}_{2.c}$  sont en ligne droite sur  $p$ .

6. Etant donné deux paires de sommets opposés dans les deux triangles conjugués inscrits dans la conique  $C_2$ , comme  $B_2B'_2$  et  $C_2C'_2$ , la ligne de jonction des points de coupe  $t_{bb'}$  et  $t_{cc'}$  des tangentes par les sommets opposés passe également par le point de coupe des côtés correspondants  $B_2C_2$  et  $B'_2C'_2$  et par le sommet  $A$  sur  $p$  du triangle auxiliaire.

Dans l'hexagone inscrit  $B_2 - B_2 - C'_2 - B'_2 - B'_2 - C_2 - B_2$ , les tangentes en  $B'_2$  et en  $B_2$  sont comptées comme lignes de jonction de deux sommets infiniment rapprochés.

La droite de Pascal de cet hexagone est déterminée par  $t_{bb'}$  comme intersection des tangentes en  $B_2$  et  $B'_2$ ,  $A$  comme intersection de  $B_2C'_2$  et  $B'_2C_2$  puis par  $k_{aa'}$  comme intersection de  $C_2B_2$  et  $C'_2B'_2$ . Le point de coupe des tangentes en  $B_2$  et  $B'_2$  est donc bien sur la droite  $Ak_{aa'}$ . Par un même raisonnement nous pouvons encore montrer que les tangentes en  $C_2$  et  $C'_2$  se coupent également en un point  $t_{cc'}$  de cette même droite  $p_1$ .

Nous avons une ligne analogue  $p_2$  par  $B$  et une  $p_3$  par  $C$ ; celle par  $B$  passe par  $k_{bb'}$  et celle par  $C$  passe par  $k_{cc'}$ .

Nous pouvons également rappeler que  $k_{aa'}$  est aussi sur  $A_1P = \bar{d}_{2.a}$  et que les trois droites  $\bar{d}_{2.a}$ ,  $\bar{d}_{2.b}$ ,  $\bar{d}_{2.c}$  passent par  $P$ .

D'après ce qui précède et par rapport à la conique  $K_1$

|                      |                          |                              |
|----------------------|--------------------------|------------------------------|
| A                    | est le pôle de la droite | $1 - \pi_3 - \pi_2 - 2$      |
| B                    | »                        | $3 - \pi_1 - \pi_3 - 4$      |
| C                    | »                        | $5 - \pi_2 - \pi_1 - 6$      |
| $A_2$                | »                        | $4 - 5 - \overline{D}_{2.a}$ |
| $A'_2$               | »                        | $6 - 3 - \overline{D}_{2.a}$ |
| $\pi_1$              | »                        | $BC = a$                     |
| $A'$                 | »                        | $\Pi_a \Pi'_a$               |
| $\overline{D}_{2.a}$ | »                        | $AA' = a_1$                  |

Donc P est le pôle de la droite p par rapport à la conique  $K_1$ .

7. Etant donné deux sommets non consécutifs de l'hexagone  $A_2 C'_2 B_2 A'_2 C_2 B'_2$  circonscrit à  $K_1$ , les lignes de jonction des points de tangence des tangentes issues de chaque point considéré se coupent toujours sur le côté correspondant du triangle auxiliaire, et ce point de coupe est le pôle de la ligne de jonction des deux points primitifs.

Nous considérons les sommets  $C_2$  sur  $CC'$  et  $B_2$  sur  $BB'$ . Les points de tangence sont 2 et 3 par rapport à  $C_2$  et 1 et 6 par rapport à  $B_2$ . La droite  $AA'$  est la polaire de  $\overline{D}_{2.a}$ . Comme  $B_2 C_2$  passe par  $\overline{D}_{2.a}$  son pôle qui est à l'intersection des droites 2-3 et 1-6, en  $\alpha_1$  sera sur  $AA'$ .

Donc  $\alpha_1$  pôle de  $B_2 C_2$  est bien sur le côté  $a_1$  du triangle auxiliaire. Le même raisonnement s'applique aux points  $\alpha_2$  sur  $b_1$  et  $\alpha_3$  sur  $c_1$ .

Si nous considérons les sommets  $C'_2$  et  $B'_2$  sur les mêmes droites  $c_1$  et  $b_1$ , nous trouvons un pôle  $\gamma_1$  de  $C'_2 - B'_2$  qui est sur  $a_1$  parce que  $C'_2 - B'_2$  passe aussi par  $\overline{D}_{2.a}$ .

D'après ce qui précède et par rapport à la conique  $C_2$

|                              |                         |            |
|------------------------------|-------------------------|------------|
| $a_1$                        | est la polaire de       | $t_{aa'}$  |
| $b_1$                        | »                       | $t_{bb'}$  |
| $c_1$                        | »                       | $t_{cc'}$  |
| $(a_2)$                      | »                       | $t_{bc}$   |
| $(a'_2)$                     | »                       | $t_{b'c'}$ |
| $P_1$                        | par A est la polaire de | $A_1$      |
| $a'_1$                       | » A »                   | $k_{aa'}$  |
| $\overline{d}_{2.a} = A_1 P$ | »                       | A.         |

La droite p passant par A, B et C est la polaire de P par rapport à la conique  $C_2$ .

7. Etant donné deux côtés non consécutifs de l'hexagone  $A_2 C'_2 B_2 A_2 C_2 B_2$  inscrit dans  $C_2$ , les points de coupe des tangentes menées par les extrémités de chaque côté sont situés sur une droite passant par le troisième sommet du triangle auxiliaire et étant la polaire du point d'intersection des côtés primitifs.

Nous considérerons les côtés  $A_2 B'_2$  par C et  $A'_2 C_2$  par B. Le point de coupe de ces côtés est en  $\Pi_a$  sur  $\overline{d}_{2.a}$ .

Le point de coupe des tangentes par  $A_2$  et  $B'_2$  s'appelle  $t_{ab'}$  et celui des tangentes par  $C_2$  et  $A'_2$  s'appelle  $t_{ca'}$ . La droite  $t_{ab'} t_{ca'}$  est évidemment la polaire de  $\Pi_a$  sur  $\overline{d}_{2.a}$ , donc elle passe par le pôle A de  $\overline{d}_{2.a}$ . Nous désignerons cette polaire par  $\alpha_1$ .

Nous aurons de même  $\alpha_2$  en B et  $\alpha_3$  en C.

Les côtés  $b'_2 = A_2 C'_2$  par B et  $c'_2 = A'_2 B_2$  par C se coupent en  $\Pi'_a$  sur  $a_1$  et donnent  $\gamma_1$  comme polaire de  $\Pi'_a$ . Cette polaire passe également par A.

Nous trouverons de même  $\gamma_2$  sur  $b_1$  et  $\gamma_3$  sur  $c_1$ .

8. *Etant donné deux sommets non homologues des triangles conjugués  $II_a II_b II_c$  et  $II'_a II'_b II'_c$ , comme  $II'_b$  et  $II_c$  puis  $II_b$  et  $II'_c$ , les lignes de jonction des points de tangence des tangentes de  $K_1$  issues de ces points se coupent sur le côté correspondant du triangle auxiliaire, et ce point de coupe est le pôle de la ligne de jonction des points primitifs.*

Soient donc  $II'_b$  et  $II_c$  les premiers sommets considérés, les lignes de jonction des points de tangence sont 2 — 6 et 1 — 3. Ces droites se coupent en  $\beta_1$ .

Comme  $II'_b II_c$  passe également par  $\bar{D}_{2.a}$ , qui est le pôle de  $AA'$ ,  $\beta_1$  se trouvera sur la polaire  $AA'$  ou  $a_1$  de  $\bar{D}_{2.a}$ . De la même manière  $\beta_2$  pôle de  $II_a II'_c$  sera sur  $b_1$  ou  $BB'$ , et  $\beta_3$  le pôle de  $II'_a II_b$  sera sur  $CC'$  ou  $c_1$ .

Avec les sommets  $II_b II'_c$  nous aurons les lignes de jonction 1 — 5 et 4 — 2 qui se coupent  $\delta_1$ . Ce point est le pôle  $II_b II'_c$  comme cette dernière droite passe par  $\bar{D}_{2.a}$ ,  $\delta_1$  se trouvera aussi sur  $a_1$ .

Les points analogues  $\delta_2$  et  $\delta_3$  seront sur  $b_1$  et  $c_1$ .

9. *Nous aurons en outre  $\alpha_1$  situé sur  $II'_b II_c$ ,  $\beta_1$  situé sur  $B_2 C_2$ ,  $\gamma_1$  situé sur  $II_b II'_c$  et  $\delta_1$  situé sur  $B'_2 C'_2$ .*

Considérons les quatre points 2 — 3 — 6 — 1 de la courbe  $K_1$ ; le quadrilatère circonscrit et le quadrangle inscrit ont les mêmes points diagonaux, donc  $B_2 C_2$  passe par  $\beta_1$  et  $II'_b II_c$  par  $\alpha_1$ .

Nous aurons de même  $\gamma_2$  par B et  $\gamma_3$  par C.

8. *Etant donné deux côtés non homologues des triangles conjugués  $(a_2)(c'_2)(b_2)(a'_2)(c_2)(b'_2)$  comme  $(b_2)(c'_2)$  puis  $(b'_2)(c_2)$ , les points de coupe des tangentes de  $C_2$  menées par les extrémités de ces côtés sont sur une droite qui passe par le sommet correspondant du triangle auxiliaire; cette droite est en outre la polaire du point de coupe des côtés considérés.*

Soient  $(b_2) = A_2 C_2$  et  $(c'_2) = A'_2 B'_2$  les côtés considérés. Les tangentes par  $A_2$  et  $C_2$  se coupent en  $t_{ac}$  et celles par  $A'_2$  et  $B'_2$  se coupent en  $t_{a'c'}$ . La ligne de jonction sera désignée par  $\beta_1$ . Comme le point de coupe  $kb.c'$  de ces côtés est aussi sur  $\bar{d}_{2.a}$ , sa polaire  $\beta_1$  passera par le pôle A de  $\bar{d}_{2.a}$ . De la même manière  $\beta_2$  passera par B et  $\beta_3$  par C.

Avec les côtés  $A'_2 C'_2$  et  $A_2 B_2$ , les tangentes par les premiers points se couperont en  $t_{a'c'}$  et celles par les autres points en  $t_{ab}$ . La droite  $\delta_1$  sera la polaire du point de coupe de ces côtés et comme ce point de coupe est sur  $\bar{d}_{2.a}$  sa polaire passera par le pôle A de  $\bar{d}_{2.a}$ .

Nous aurons ainsi  $\delta_2$  par B et  $\delta_3$  par C.

9.  $\alpha_1$  passera en outre par l'intersection de  $(b_2)$  et  $(c'_2)$ ,  $\beta_1$  par l'intersection  $II_a$  de  $c_2$  et  $b_2$ ;  $\gamma_1$  passera par l'intersection de  $(b'_2)$  et  $(c_2)$ , et  $\delta_1$  par  $II'_a$  sur  $b'_2$  et  $c'_2$ .

Le quadrilatère inscrit et le quadrangle circonscrit relatifs aux quatre points  $A_2 C_2 A'_2 B'_2$  de la courbe  $C_2$  ont les mêmes

Le même raisonnement subsiste pour les autres points.

23. Les droites  $\Pi_a \Pi'_c$ ,  $\Pi'_b \Pi_c$ ,  $\Pi_b \Pi'_a$  forment le triangle  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$  dont les sommets sont sur  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  et dont les côtés passent respectivement par  $\bar{D}_{2.a}$ ,  $\bar{D}_{2.b}$ ,  $\bar{D}_{2.c}$ . Ce triangle est homologique avec ABC.

La conique  $C_1$  par rapport à ce triangle joue le même rôle que  $C_2$  par rapport à son triangle fondamental  $A_1 B_1 C_1$ .

*Les tangentes de  $C_1$  peuvent donc être construites comme celles de  $C_2$ .*

Dans le cas spécial où ABC est en ligne droite les points  $A_2 C'_2 B_2 A'_2 C_2 B'_2$  déterminent un hexagone inscriptible et la conique circonscrite se confond avec la courbe  $C_2$  des éléments dualistiques.

L'hexagone considéré est aussi formé par les côtés  $(a_2)(c'_2)(b_2)(a'_2)(c_2)(b'_2)$ . Il est également circonscrit à une conique  $K_2$ .

Comme dans le cas plus général nous avons aussi les points  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$  sur  $a_1$  et les points analogues sur  $b_1$  et  $c_1$ .  $\beta_1$  et  $\delta_1$  sont les points de tangence des côtés  $(a_2)$  et  $(a'_2)$  avec  $K_2$  puisque  $A_2$  et  $A'_2$  sont sur  $a_1$  passant par P. (Fig. 4.)

points diagonaux, donc  $\alpha_1$  passe par  $k_{bc'}$  et  $\beta_1$  par  $\Pi_a$ .

Le même raisonnement est applicable aux autres droites du théorème.

24. Les points de coupe des côtés  $(a_2)(a'_2)$ ,  $(b_2)(b'_2)$ ,  $(c_2)(c'_2)$  forment un triangle  $k_{aa'} k_{bb'} k_{cc'}$  dont les côtés passent respectivement par A, B et C et dont les sommets sont sur  $\bar{d}_{2.a}$ ,  $\bar{d}_{2.b}$  et  $\bar{d}_{2.c}$ . Ce triangle est homologique avec  $A_1 B_1 C_1$ .

La conique  $K_2$  par rapport à ce triangle joue le même rôle que  $K_1$  par rapport à son triangle fondamental ABC.

*Les points de tangence de  $K_2$  peuvent être construits comme ceux de  $K_1$ .*

Dans le cas spécial où  $a_1 b_1 c_1$  passent par le même point P, l'hexagone  $(a_2)(c'_2)(b_2)(a'_2)(c_2)(b'_2)$  est circonscriptible à une conique, et celle-ci se confond avec  $K_1$  des éléments dualistiques.

L'hexagone considéré est aussi formé par les sommets  $A_2 C'_2 B_2 A'_2 C_2 B'_2$ . Il est également inscrit dans la conique  $C_2$ .

De même que dans le cas plus général nous avons encore les droites  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$  par A;  $\beta_1$  et  $\delta_1$  sont les tangentes de  $C_1$  en  $\Pi_a$  et  $\Pi'_a$ , puisque le point de coupe de  $\Pi_b \Pi_c$  ou  $\Pi'_b \Pi'_c$  avec  $p$  est en A. (Fig. 4.)

Bienne, juillet 1915.