PROPRIÉTÉS INVOLUTIVES DUALISTIQUES DES TRIANGLES

PAR

L. Crelier (Berne-Bienne).

---

§ I. — Groupement des involutions par rapport à un triangle fondamental et un triangle auxiliaire.

1. Groupement des transversales.

Théorème. — *Etant donné deux triangles* ABC *et* $a_1 b_1 c_1$ *tels que* a_1 *passe par* A, b_1 *par* B, c_1 *par* C, *toute transversale issue d'un sommet* A *du premier triangle rencontre le second en deux points qui joints aux autres sommets* B *et* C *entraînent de la même manière une figure à six sommets, dont les sommets opposés sont sur les côtés successifs* $a_1 b_1 c_1$ *et dont les côtés opposés se coupent dans les sommets primitifs* ABC. (Fig. 1)

Le triangle fondamental est ABC et le triangle auxiliaire $A_1B_1C_1$ ou $a_1 b_1 c_1$: Soit a_2 par A une sécante arbitraire qui coupe A_1B_1 en C'_2 et A_1C_1 en B_2. Il n'y a qu'un point tel que C'_2 sur A_1B_1 et celui-ci joint à B donne b'_2. Avec cette ligne, on n'a qu'un point A_2 et un seul sur B_1C_1. De celui-ci on en déduit une droite c_2 et une seule par

2. Groupement des points.

Théorème. — *Etant donné deux triangles* $a_1 b_1 c_1$ *et* ABC *tels que les sommets du second se trouvent sur les côtés du premier, tout point pris sur un côté* a_1 *du premier triangle et joint aux sommets* B *et* C *du second donne lieu à deux nouveaux points sur les côtés* b_1 *et* c_1, *lesquels entraînent de la même manière une figure à six côtés, dont les côtés opposés passent par les sommets* ABC *et dont les sommets opposés sont sur* $a_1 b_1 c_1$. (Fig. 1)

Le triangle fondamental est $A_1B_1C_1$ ou $a_1 b_1 c_1$ et le triangle auxiliaire ABC. A est sur a_1 B sur b_1 et C sur c_1. Soit A_2 un point sur a_1. Nous le joignons à C et nous trouvons B'_2 univoquement déterminé sur b_1. Avec A_2 et B nous obtenons C'_2 sur c_1. Les lignes de jonction sont désignées par c_2 et b'_2. Le point B'_2 joint avec A donne la droite

C. Elle coupe A_1C_1 en B'_2; en joignant avec A on obtient la droite a'_2. On trouve C_2 sur A_1B_1 puis b_2 par B et A'_2 sur B_1C_1. La ligne de jonction A'_2C ou c'_2 doit passer par le point B_2 trouvé primitivement.

Nous avons d'abord, en A et B, deux faisceaux homologiques d'axe $C\overline{C}_1$, savoir: AC, a_2, a'_2, $A\overline{A}_1$ qui correspondent à BC, b'_2, b_2 et BB_1. Les rayons AB et BA sont en outre deux rayons conjugués.

a'_2 et le point C_2 sur c_1. Avec B nous aurons A'_2 et la droite b_2. A'_2C sera la droite c'_2 et donnera B_2 sur b_1. La droite B_2A ou a_2 passera par C'_2 à l'intersection de c_1 et b'_2.

En effet, nous avons sur a_1 et b_1 deux ponctuelles homologiques de centre C, savoir: B_1, A_2, A'_2, $\overline{A}_1$ et A qui correspondent à A_1, B'_2, B_2, B et $\overline{B}_1$. Les points en C_1 sont deux points homologues confondus.

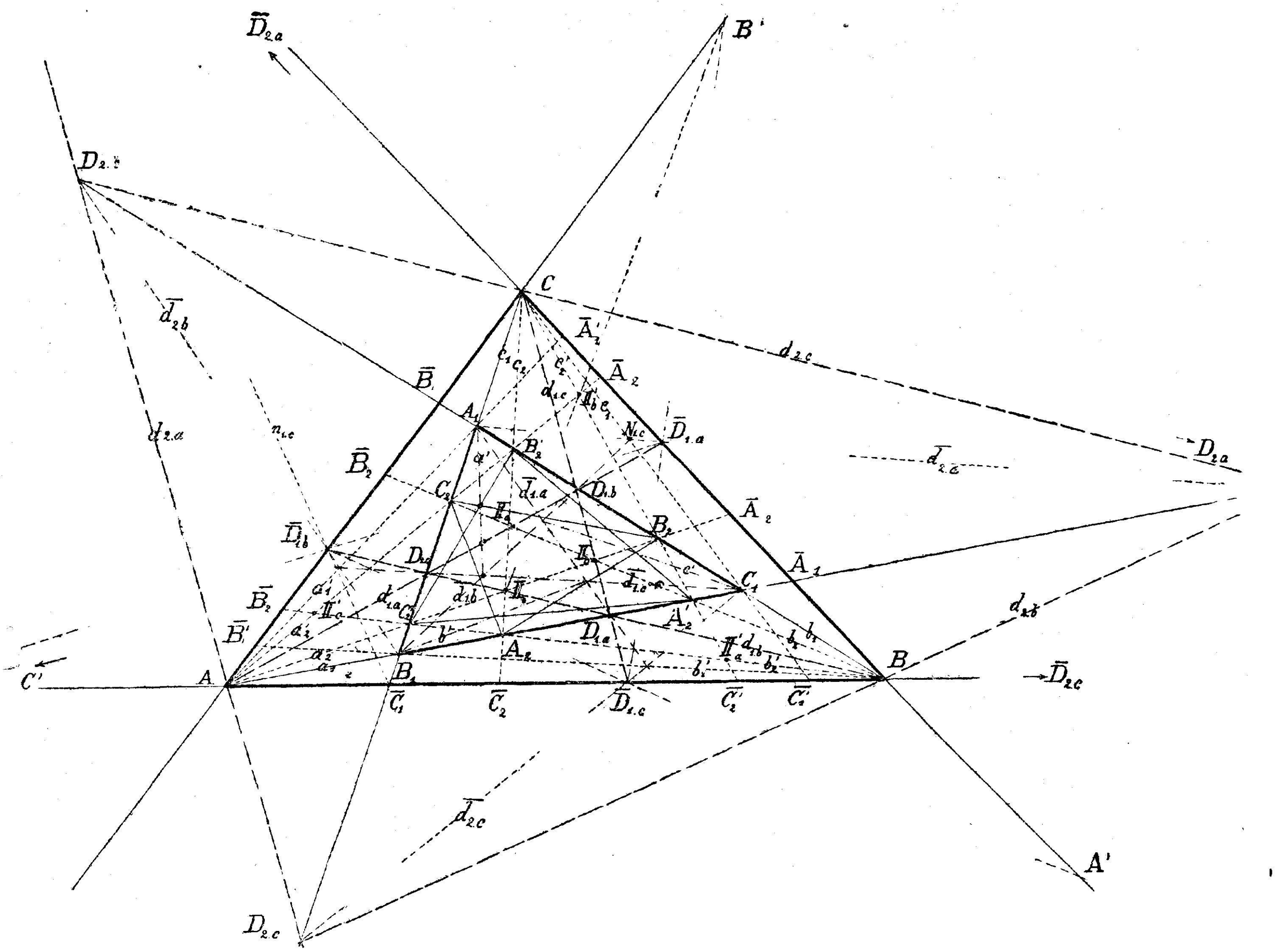

Fig. 1.

En A et C nous avons également deux autres faisceaux homologiques d'axe $B\overline{B}_1$: AC, a_2, a'_2, $A\overline{A}_1$ et AB puis leurs conjugués CA, c'_2, c_2, CC_1 et CB. Il en résulte deux faisceaux homographiques en B et C ; ce sont : BC, b'_2, b_2, BB_1, BA, conjugués de CA, c'_2c_2, CC_1 et CB.

D'autre part nous avons en B et C deux faisceaux homologiques d'axe $A\overline{A}_1$ et si nous admettons que A'_2C ne passe pas par B_2 et si nous désignons par c''_2 ce rayon A'_2C, tandis que c'_2 sera B_2C, nous aurons :

$$BC,\ b'_2,\ b_2,\ BB_1,\quad \text{et}\quad BA$$

conjugués de

$$CB,\ c_2,\ c''_2,\ C\overline{C}_1\quad \text{et}\quad CA\ .$$

De cette manière nous aurons deux faisceaux homographiques concentriques en C :

CA, c'_2, c_2, CC_1 et CB conjugués de CB, c_2, c''_2, $C\overline{C}_1$ et CA. Ces faisceaux ont au moins une paire de rayons conjugués réciproques CA et CB ; ils forment donc une involution et tous les rayons conjugués sont réciproques : c'_2 et c_2, c_2 et c''_2, etc.

Dans ces conditions c'_2 et c''_2 sont tous deux conjugués de c_2 : ils sont confondus et A'_2C passe bien par B_2.

Nous obtenons un groupement cyclique fermé, ou une figure à

Sur a_1 et c_1 nous avons également deux autres ponctuelles homologiques de centre B : B_1, A_2, A'_2, C_1, $\overline{A}_1$ et A conjugués de B_1, C_2', C_2, A_1, C et $\overline{C}_1$. Il en résulte deux ponctuelles homographiques sur b_1 et c_1 ; ce sont :

$$A_1,\ B'_2,\ B_2,\ C_1,\ B,\ \overline{B}_1$$

conjugués de

$$B_1,\ C'_2,\ C_2,\ A_1,\ C,\ \overline{C}_1\ .$$

D'autre part, nous avons encore deux ponctuelles homologiques de centre A sur b_1 et c_1, et si nous admettons que la droite a_2 ne passe pas par C'_2, et si nous désignons par C''_2, son point de coupe avec c_1, nous aurons :

$$A_1,\ B'_2,\ B_2,\ C_1,\ B,\ \overline{B}_1,$$

conjugués

$$A_1,\ C_2,\ C''_2,\ B_1,\ \overline{C}_1,\ C\ .$$

Nous obtenons finalement deux ponctuelles homographiques de même base sur c_1 :

B_1, C'_2, C_2, A_1, C, $\overline{C}_1$ conjugués de A_1, C_2, C''_2, B_1, $\overline{C}_1$, C. Ces ponctuelles ont au moins une paire de points conjugués réciproques, B conjugué de A et A conjugué de B. Elles forment une involution et tous les points conjugués sont réciproques : C'_2 et C_2 puis C_2 et C''_2, etc.

Dans ces conditions C'_2 et C''_2 sont tous deux conjugués de C_2 ; ils sont donc confondus et la droite a_2 passe bien par C'_2 sur c_1 et sur b'_2.

Nous obtenons alors un groupement cyclique fermé ou un six sommets qui est $C'_2A_2B'_2$, $C_2A'_2B_2$; les sommets $C_2C'_2$, $B_2B'_2$, $A_2A'_2$ sont sur les axes d'homologie, c'est-à-dire sur les côtés du triangle auxiliaire; $C'_2A_2 = b'_2$, $C_2A'_2 = b_2$, $A_2B'_2 = c_2$, $A'_2B_2 = c'_2$ et enfin $B'_2C_2 = a'_2$, $B_2C'_2 = a_2$ se coupent bien en A, B et C.

Le même raisonnement subsisterait avec une autre transversale a_n, laquelle entraînerait les transversales $a_na'_n$ en A, $b_nb'_n$ en B, et $c_nc'_n$ en C avec les sommets $A_nA'_n$ sur $a_1 = B_1C_1$, $B_nB'_n$ sur $b_1 = A_1C_1$ et enfin $C_nC'_n$ sur $c_1 = A_1B_1$. Donc le théorème est démontré.

3. Involutions dans les sommets du triangle fondamental.

Nous avons $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ et $AA_1 = A\bar{A}'_1 = a'_1$, $BB_1 = B\bar{B}'_1 = b'_1$, $CC_1 = C\bar{C}'_1 = c'_1$.

D'après ce qui précède, a_n et a'_n en A sont des rayons conjugués d'une involution dans laquelle b et c puis a_1 et a'_1 sont également conjugués.

Nous avons la même chose avec b_n et b'_n en B puis avec c_n et c'_n en C.

Toutes les transversales par A comme $a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots$ donneront des groupements cycliques ou des hexagones fermés analogues au premier. A chacune d'elles correspondra d'abord un rayon conjugué en A comme a'_2, $a'_3 \ldots a'_n \ldots$, puis une paire de rayons conjugués en B et une en C. Nous pourrons désigner ces paires par hexagone de côtés $c_2a'_2b_2c'_2a_2b'_2$. Les côtés opposés $c_2c'_2$, $a_2a'_2$ et $b_2b'_2$ passent respectivement par C, A et B. Les sommets opposés $(c_2a'_2)$ et (c'_2a_2), $(a_2b'_2)$, et (a'_2b_2), puis $(b_2c'_2)$ et (b'_2c_2) sont respectivement sur les côtés b_1, c_1 et a_1.

Nous avons le même raisonnement avec un point quelconque A_n de a_1. Il entraînera les points $A_nA'_n$ sur a_1, $B_nB'_n$ sur b_1 et $C_nC'_n$ sur c_1 avec les transversales $a_na'_n$ en A, $b_nb'_n$ en B et $c_nc'_n$ en C. Donc le théorème est démontré.

4. Involutions sur les côtés du triangle fondamental.

Nous poserons encore $\bar{A}_1 =$ Intersection de a et $a_1 = (aa_1)$, $\bar{B}_1 = (bb_1)$ et $\bar{C}_1 = (cc_1)$.

D'après ce qui précède les points A_n et A'_n sur a_1 sont des points conjugués d'une involution dans laquelle B_1 et C_1 puis A et $\bar{A}_1$ sont également conjugués.

Nous avons la même chose avec B_n et B'_n sur b_1 puis C_n et C'_n sur c_1.

Tous les points de a_1, A_2, A_3, ... A_n, ... donneront des hexagones fermés analogues au premier. A chacun d'eux correspondra en outre un point conjugué sur a_1 soit A'_2, $A'_3 \ldots A'_n \ldots$ et ensuite une paire de points conjugués sur b_1 et une sur c_1. Nous désignerons ces paires par $B_2B'_2$, $B_3B'_3 \ldots B_nB'_n$ et $C_2C'_2$, $C_3C'_3$, ... $C_nC'_n$.

$b_2 b'_2$, $b_3 b'_3$, ... $b_n b_n$, ... et par $c_2 c'_2$, $c_3 c'_3$, ... $c_n c'_n$, ...

L'ensemble des paires en chaque sommet appartient ainsi à une involution définie par les éléments des 2 triangles primitifs.

En outre si nous comparons les involutions des deux sommets, celles de A et B par exemple, nous voyons que chaque paire d'une involution est conjuguée à une paire, mais à une seule de l'autre; de plus chaque rayon comme a_n est conjugué *homologique* de b'_n, puis conjugué *homographique* de b_n et réciproquement.

La même remarque subsiste évidemment pour les paires fondamentales des involutions, soit b, c et a_1, a'_1 en A puis a, c et b_1, b'_1 en B; b en A est conjugué homologique de a en B et conjugué homographique de c en B, puis c en A est conjugué homologique de c en B et conjugué homographique de a en B. Ensuite a_1 en A est homologique avec b'_1 en B et homographique avec b_1 en B; a'_1 en A est homologique avec b_1 en B et homographique avec b'_1 en B. On a la même chose en commençant en B.

Nous arrivons ainsi au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les rayons menés par les sommets du triangle fondamental forment trois faisceaux involutifs semi-homologiques et homographiques. Les involutions sont complètement déterminées par les éléments du triangle fondamental et par ceux du triangle auxiliaire.*

L'ensemble des paires sur chaque côté appartient à l'involution définie par les éléments des 2 triangles primitifs.

En outre la comparaison des involutions sur deux côtés, a_1 et b_1 par exemple, nous montrera que chaque paire d'une involution est conjuguée à une paire, mais à une seule de l'autre; de plus, chaque point comme A_n est conjugué *homologique* de B'_n et conjugué *homographique* de B_n et réciproquement.

Cette relation subsiste évidemment pour les paires fondamentales, soit $B_1 C_1$ et $A\overline{A}_1$ sur a_1 et $A_1 C_1$ et $B\overline{B}_1$ sur b_1, B_1 sur a_1 est conjugué homologique de A_1 sur b_1 et homographique de C_1 sur b_1, puis C_1 sur a_1 est homologique de C_1 sur b_1 et homographique de A_1 sur b_1. Ensuite A sur a_1 est homologique de $\overline{B}_1$ sur b_1 et homographique de B sur b_1. On a encore $\overline{A}_1$ sur a_1 homologique de B sur b_1 et homographique de B_1 sur b_1. La même chose se présentera en commençant par les points sur b_1.

Nous arrivons ainsi au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les points situés sur les côtés du triangle fondamental forment trois ponctuelles involutives semi-homologiques et homographiques. Les involutions sont complètement déterminées par les éléments du triangle fondamental et par ceux du triangle auxiliaire.*

5. Courbes engendrées.

D'une manière générale deux faisceaux involutifs et homographiques engendrent une courbe du 4^e degré. Si les involutions sont semi-homologiques et homographiques, la ligne des sommets représente deux rayons homologues simples confondus. Cette droite ainsi que l'axe d'homologie font partie de la courbe engendrée, et il ne reste plus qu'une conique pour terminer cette courbe.

Du reste les faisceaux, considérés comme faisceaux homographiques, engendrent une conique, et c'est celle-ci qui, avec les deux droites précédentes, représente la courbe du 4^e degré.

Les points de coupe de la conique avec l'axe d'homologie correspondent à deux rayons conjugués dans l'homologie et à deux rayons conjugués dans l'homographie. Ces rayons sont confondus et forment les rayons doubles des involutions.

Les rayons doubles des faisceaux semi-homologiques et homographiques sont donc respectivement conjugués.

Nous avons encore un autre cas particulier possible. Si les faisceaux semi-homologiques et homographiques ont deux rayons doubles conjugués et confondus avec la ligne des sommets, ils engendrent cette droite comme droite double et l'axe d'homologie comme droite simple ; il ne reste plus qu'une quatrième droite pour former la courbe générale. Cette droite

6. Courbes enveloppées.

Deux ponctuelles involutives et homographiques enveloppent une courbe de la 4^e classe. Si les ponctuelles sont semi-homologiques et homographiques, le point de coupe des bases est formé de deux points simples homologues et confondus. Ce point, ainsi que le centre d'homologie, font partie de l'enveloppe, et il ne reste plus qu'une conique pour compléter la courbe de quatrième classe.

Du reste les ponctuelles considérées comme des divisions homographiques engendrent une conique et c'est celle-ci qui, avec les deux autres points, forme la courbe de 4^e classe.

Les tangentes de la conique par le centre d'homologie donnent deux points conjugués dans l'homologie et deux points conjugués dans l'homographie. Ces points étant respectivement confondus, ils forment les points doubles des involutions.

Les points doubles des involutions semi-homologiques et homographiques sont donc respectivement conjugués.

Nous avons encore également un autre cas particulier possible : Si les involutions ont deux points doubles conjugués et confondus avec le point de coupe des bases, elles enveloppent ce point comme point double ; le centre d'homologie est un troisième point de l'enveloppe et il ne reste plus qu'un quatrième point pour finir la courbe générale. Ce point est

est déterminée par deux paires quelconques de rayons conjugués.

Le point de coupe de cette droite avec l'axe d'homologie est évidemment le point de coupe des deux autres rayons doubles séparés mais homologues. Des involutions de ce genre sont appelées *involutions doublement homologiques.*

Revenons maintenant aux involutions dans le triangle fondamental et par rapport au triangle auxiliaire. En leur appliquant les considérations précédentes, nous pouvons établir le théorème suivant :

Théorème. — *Les faisceaux involutifs semi-homologiques et homographiques dans les sommets du triangle fondamental engendrent d'une part, les côtés du triangle fondamental, d'autre part les côtés du triangle auxiliaire, et enfin 3 coniques* $C_{1.a}$, $C_{1.b}$, $C_{1.c}$, *telles que chacune d'elles passe par un sommet du triangle auxiliaire et par deux sommets du triangle fondamental, en étant tangente d'un côté de ce triangle en chaque sommet.* (Fig. 1.)

En effet, tout faisceau est semi-homologique et homographique avec chacun des deux autres. Les côtés de A B C sont les rayons homologues confondus et ceux de $A_1 B_1 C_1$ sont les axes d'homologie.

D'autre part les faisceaux en A et B par exemple, donnent encore une conique $C_{1.c}$ passant par A et B ; les tangentes en ces points sont les rayons conjugués

déterminé par deux paires quelconques de points conjugués.

La ligne de jonction de ce point avec le centre d'homologie est évidemment la droite de jonction des deux autres points doubles conjugués, mais séparés. Nous appellerons ces involutions des *involutions doublement homologiques.*

Revenons maintenant aux involutions sur les côtés du triangle fondamental et par rapport au triangle auxiliaire. En les traitant d'après ce qui précède, nous arrivons au théorème suivant :

Théorème. — *Les ponctuelles involutives semi-homologiques et homographiques sur les côtés du triangle fondamental engendrent d'une part, les sommets du triangle fondamental, d'autre part les sommets du triangle auxiliaire et enfin 3 coniques* $K_{1.a}$, $K_{1.b}$, $K_{1.c}$, *telles que chacunes d'elles est tangente à un côté du triangle auxiliaire et à deux côtés du triangle fondamental en passant par un sommet de ce triangle sur chaque côté.* (Fig. 1.)

En effet, chaque ponctuelle est semi-homologique et homographique avec chacune des deux autres. Les sommets de $A_1 B_1 C_1$ sont des points homologues confondus et les sommets ABC sont les centres d'homologie.

D'autre part les ponctuelles sur a_1 et b_1 par exemple, donnent encore une conique $K_{1.c}$ tangente à a_1 et b_1. Les points de tangence sont les points conjude AB, soient AC et BC ou les côtés de ABC autres que AB.

Corollaire. — *Tout point de coupe de deux coniques autre que* A, B ou C *appartient aussi à la troisième.*

Soit P un tel point sur $C_{1.a}$ et $C_{1.b}$. Les rayons AP et CP sont conjugués homographiques dans $C_{1.b}$; BP et CP sont conjugués homographiques dans $C_{1.a}$; donc AP et BP sont conjugués homographiques et le point P appartient aussi à la courbe $C_{1.c}$.

Autre corollaire. — *Les rayons doubles de deux faisceaux involutifs comme les précédents sont respectivement homologues et passent par les points de coupe de l'axe correspondant avec la conique respective.*

Les rayons doubles en A *et* B *se coupent sur l'axe* $\overline{CC_1}$ *et ces points de coupe appartiennent à la conique* $C_{1.c}$. *Il en sera de même avec les autres coniques.*

Ces rayons sont en A : $d_{1.a}$ et $d_{2.a}$, en B : $d_{1.b}$ et $d_{2.b}$, puis en C : $d_{1.c}$ et $d_{2.c}$. Nous aurons $d_{1.a}$ conjugué de $d_{1.b}$ et $d_{1.c}$, $d_{2.a}$ conjugué de $d_{2.b}$ et $d_{2.c}$.

gués de l'intersection c_1 des bases, soient les deux autres sommets B_1 sur a_1 et A_1 sur b_1.

Corollaire. — *Toute tangente commune de deux coniques, autre que* a_1, b_1 *ou* c_1 *est aussi une tangente de la troisième.*

Soit p une tangente de $K_{1.a}$ et $K_{1.b}$. Les points de coupe de p avec a_1 et c_1 sont conjugués homographiques par rapport à $K_{1.b}$ et ceux de p avec b_1 et c_1, le sont par rapport à $K_{1.a}$. Donc les points de coupe de p avec a_1 et b_1 sont homographiques et la droite p est une tangente de $K_{1.c}$.

Autre corollaire. — *Les points doubles des ponctuelles involutives, comme les précédentes, sont homologues et déterminent les tangentes de la conique respective par le centre d'homologie correspondant.*

Les points doubles sur a_1 *et* b_1 *donnent les tangentes de* $K_{1.c}$ *par* C. *Il en sera de même avec les autres coniques.*

Ces points seront $D_{1.a}$ et $D_{2.a}$ sur a_1, $D_{1.b}$ et $D_{2.b}$ sur b_1, $D_{1.c}$ et $D_{2.c}$ sur c_1 et l'on aura $D_{1.a}$ conjugué de $D_{1.b}$ et $D_{1.c}$ puis $D_{2.a}$ conjugué de $D_{2.b}$ et $D_{2.c}$.

7. Ponctuelles involutives.

Chaque involution dans les sommets du triangle fondamental ABC est coupée par les côtés des deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ suivant des involutions de points qui jouiront de propriétés analogues.

8. Faisceaux involutifs.

Chaque involution sur un des côtés du triangle fondamental peut être réunie avec le troisième sommet de ce triangle ou avec les deux sommets correspondants du triangle auxiliaire. Les faisceaux involutifs ainsi

Considérons l'involution en A, elle est coupée par le côté BC, puis par les côtés A_1B_1 et A_1C_1. Dans l'involution sur BC les points B et C sont conjugués, $\overline{A}_1$ sur a_1 est conjugué de $\overline{A'}_1$ sur a'_1 ; $\overline{A}_2$ sur a_2 est conjugué de $\overline{A'}_2$ sur a'_2, et ainsi de suite. Les points doubles seront $\overline{D}_{1.a}$ et $\overline{D}_{2.a}$ sur les rayons doubles par A.

Sur A_1B_1 nous aurons B_1 et A_1, C et $\overline{C}_1$, C_2 et C'_2 comme points conjugués, puis comme points doubles $D_{1.c}$ et $D_{2.c}$. Sur A_1C_1, ce sera C_1 et A_1, B et $\overline{B}_1$, B_2 et B'_2, puis comme points doubles $D_{1.b}$ et $D_{2.b}$.

Les points doubles sur A_1C_1 ou A_1B_1 sont les points de coupe de ces lignes avec les coniques $C_{1.b}$ ou $C_{1.c}$.

Nous pourrons comparer maintenant les involutions sur les côtés fondamentaux et celles sur les côtés auxiliaires. Pour cela nous nous reporterons aux involutions en A et B. Les involutions correspondantes sur BC et AC sont homographiques ; à chaque paire de l'une correspond une paire mais une seule de l'autre. En outre deux lignes de jonction comme $\overline{A_1B'_1}$ ou $\overline{A_2B'_2}$ passeront toujours par le conjugué harmonique C' de $\overline{C}_1$ sur AB, puisque $C\overline{C}_1 = c_1$ et c sont des diagonales fixes dans les quadrilatères correspondants. C est un point conjugué avec lui-même. Les deux ponctuelles sur AC et BC sont semi-

obtenus jouiront de propriétés analogues aux autres.

Avec l'involution sur a_1, nous formons des faisceaux en A_1 ou en B ou encore en C. Soit le faisceau involutif en A_1 : les côtés b_1 et c_1 sont conjugués ; $\overline{a}_1$ par $\overline{A}_1$ est conjugué de $\overline{a'}_1$ par $\overline{A'}_1$; $\overline{a}_2$ par A_2 est conjugué de $\overline{a'}_2$ par A'_2 et ainsi de suite. Les rayons doubles $\overline{d}_{1.a}$ et $\overline{d}_{2.a}$ passent par les points doubles $D_{1.a}$ et $D_{2.a}$.

Dans le faisceau involutif en C les rayons conjugués sont a et b, c_1 et c'_1, c_2 et c'_2 etc. ; les rayons doubles sont $d_{1.c}$ et $d_{2.c}$ par $D_{1.a}$ et $D_{2.a}$. En B, les rayons conjugués sont a et c, b_1 et b'_1, b_2 et b'_2, etc. Comme nous l'avons déjà dit, les rayons doubles par B et C seront les tangentes des coniques $K_{1.b}$ et $K_{1.c}$.

Nous pouvons comparer les involutions dans les sommets du triangle fondamental et celles dans les sommets du triangle auxiliaire. Considérons les involutions en A_1 et B_1 dépendant de celles sur a_1 et b_1. Elles sont d'abord homographiques ; à chaque paire de rayons de l'une correspond une paire, mais une seule de l'autre.

En outre les points de coupe de 2 rayons apparentés comme $\overline{a'}_1$ et $\overline{b}_1$, $\overline{a}_2$ et $\overline{b'}_2$, etc., seront toujours sur le conjugué harmonique c' de $CC_1 = c'_1$, par rapport à a_1 et b_1 en C_1, car C et C_1 sont des points diagonaux fixes dans les quadrangles correspondants. Le rayon c_1 est en homologiques et homographiques de centre C′.

Elles engendrent une nouvelle conique $K_{2.c}$, *tangente de* AC *en* A *et de* BC *en* B, *et en plus, les deux points* C *et* C′. *La ligne de jonction des points doubles conjugués passe évidemment par* C′.

Nous aurons un raisonnement analogue pour les autres côtés et nous trouverons ainsi les trois coniques $K_{2.a}$, $K_{2.b}$ et $K_{2.c}$.

Dans le triangle auxiliaire $A_1 B_1 C_1$, les involutions sur $A_1 B_1$ et $A_1 C_1$ correspondent à celles en A et les involutions sur $B_1 C_1$ et $B_1 A_1$ correspondent à celle en B. Les deux premières sont semi-homologiques et homographiques et de centre A. Elles sont identiques avec celles étudiées au début, dans la partie dualistique et elles engendrent la conique $K_{1.a}$. Nous aurons un raisonnement analogue pour les autres côtés et nous retrouverons les trois coniques déjà connues $K_{1.a}$, $K_{1.b}$ et $K_{1.c}$.

Nous avons encore d'autres ponctuelles possibles. En coupant par exemple, l'involution de rayons en A par les droites c_1 et $d_{1.b}$, nous trouvons deux ponctuelles involutives semi-homologiques et homographiques de centre A et dont le point de coupe des bases $D_{1.c}$ est un point formé de deux points doubles conjugués et confondus.

L'enveloppe des droites par les points homologues contient

plus conjugué à lui-même : Les deux faisceaux involutifs en A_1 et B_1 sont donc semi-homologiques et homographiques.

Ils engendrent une nouvelle conique $C_{2.c}$ *tangente de* $A_1 C_1$ *en* A_1 *et de* $B_1 C_1$ *en* B_1, *plus les deux droites* c_1 *et* c'. *Le point de coupe des rayons doubles conjugués est évidemment sur la droite* c'.

Nous aurons un raisonnement analogue pour les autres sommets et nous trouverons ainsi les trois coniques $C_{2.a}$, $C_{2.b}$ et $C_{2.c}$.

Dans le triangle ABC nous aurons des faisceaux involutifs en C et B correspondant à l'involution sur a_1 et d'autres faisceaux involutifs en A et C correspondant à l'involution sur b_1. Les deux premiers faisceaux sont semi-homologiques et homographiques d'axe a_1 ; ils sont identiques avec ceux étudiés au début dans la partie dualistique et ils engendrent la conique $C_{1.a}$. Il en sera de même des faisceaux dans les autres sommets et nous retrouverons les coniques $C_{1.a}$, $C_{1.b}$ et $C_{1.c}$.

Parmi les autres faisceaux involutifs possibles, considérons ceux formés en joignant la ponctuelle sur a_1, avec C et $D_{1.b}$ sur b_1. Nous obtenons deux faisceaux involutifs semi-homologiques et homographiques d'axe a_1 et dont la ligne de jonction des sommets C et $D_{1.b}$ est formée de deux rayons doubles homologues et confondus.

Ces faisceaux seront doublement homologiques et la courbe ce point $D_{1.c}$ comme point double et le point A comme point simple ; il ne reste plus qu'un point pour former complètement la courbe. Autrement dit, les lignes de jonction des points homographiques doivent passer par le même centre.

Nous voyons de suite que ce centre sera $\overline{D}_{2.a}$ sur BC et $A_1 D_{1.a}$ ou $\overline{C}_1 \overline{D}_{1.b}$, etc. (Fig. 1.)

Nous avons le même résultat avec les sécantes b_1 et $d_{1.c}$, etc., puis des résultats analogues avec les faisceaux en B et en C.

Ces remarques donnent immédiatement lieu aux observations suivantes relatives aux rayons doubles et aux points doubles.

1. *Les lignes de jonction d'un sommet comme* A_1 *avec les points doubles* $D_{1.a}$ *ou* $D_{2.a}$ *sur* a_1, *soient* $\overline{d}_{1.a}$ *et* $\overline{d}_{2.a}$ *en* A_1, *passent par les points doubles respectifs sur* a ; *on a donc* $\overline{d}_{1.a}$ *par* $\overline{D}_{2.a}$ *et* $\overline{d}_{2.a}$ *par* $\overline{D}_{1.a}$.

2. *Les lignes de jonction d'un point comme* $\overline{C}_1$ *sur* c *avec les points doubles d'un côté du même triangle fondamental,* b *par exemple, passent par les points doubles correspondants de l'autre côté* c.

$\overline{C}_1 \ \overline{D}_{1.b} = n_{1.c}$ passe par $\overline{D}_{2.a}$

$\overline{C}_1 \ \overline{D}_{2.b} = n_{2.c}$ passe par $\overline{D}_{1.a}$.

3. *Les droites* $\overline{D}_{1.a}\overline{D}_{1.b}$ *et* $\overline{D}_{2.a}\overline{D}_{2.b}$ *passant par* C', *à cause de la première remarque relative à ce point.*

engendrée contient cette droite $CD_{1.b}$ comme droite double, ainsi que l'axe d'homologie a_1 comme droite simple. Il ne reste plus qu'une droite pour compléter la courbe ; autrement dit, les points de coupe des rayons conjugués homographiquement seront sur une même droite.

Cette droite sera $\overline{d}_{2.a}$ passant par l'intersection des droites b_1 et c_1 et des droites a et $d_{1.a}$ ou $A_1 \overline{D}_{1.a}$. Cette droite contient également les intersections de c'_1 et $d_{1.b} = N_{1.c}$, etc. (Fig. 1)

Nous aurons les mêmes résultats avec les ponctuelles sur b_1 et c_1.

Nous en déduirons immédiatement les observations suivantes conformes à leurs dualistiques.

1. *Les points de coupe d'un côté comme* a *avec les rayons doubles* $d_{1.a}$ *ou* $d_{2.a}$ *par* A, *soient* $\overline{D}_{1.a}$ *et* $\overline{D}_{2.a}$, *sont aussi sur les rayons doubles respectifs par* A_1, *on aura donc* $\overline{D}_{1.a}$ *sur* $\overline{d}_{2.a}$, $\overline{D}_{2.a}$ *sur* $\overline{d}_{1.a}$.

2. *Les points de coupe d'un rayon comme* $c'_1 = \overline{c}'_1 = CC_1 = C_1\overline{C}'_1$ *par* C *avec les rayons doubles issus d'un autre sommet du triangle fondamental* B_1 *par exemple, sont aussi sur les rayons doubles non correspondants de l'autre sommet* C_1.

Intersection $(c'_1 \overline{d}_{1.b}) = N_{1.c}$ sur $\overline{d}_{2.a}$

Intersection $(c'_1 \overline{d}_{2.b}) = N_{2.c}$ sur $\overline{d}_{1.a}$

3. *Les points de coupe* $(\overline{d}_{1.a}\overline{d}_{1.b})$ *et* $(\overline{d}_{2.a}\overline{d}_{2.b})$ *sont sur* c' *à cause de la première remarque relative à cette droite.*

$\overline{D}_{1.a}\overline{D}_{1.c}$ et $\overline{D}_{2.a}\overline{D}_{2.c}$ passent par B' et ainsi de suite pour des raisons analogues.

9. Involutions de triangles. (3 côtés)

En considérant une paire de rayons conjugués a_2 et a'_2 en A puis la paire conjuguée en B : b_2 et b'_2 et enfin la paire conjuguée en C : c_2 et c'_2, ces paires déterminent un hexagone $A_2B'_2C_2A'_2B_2C'_2$ et deux triangles $II_aII_bII_c$ et $II'_aII'_bII'_c$. Les sommets opposés de l'hexagone sont sur les côtés du triangle auxiliaire et les sommets opposés des triangles sont sur les coniques engendrées par les involutions en A, B et C; II_a et II'_a sont sur $C_{1.a}$, II_b et II'_b sur $C_{1.b}$ et II_c et II'_c sur $C_{1.c}$ comme points de coupe de rayons homologues des faisceaux.

Tous les triangles comme $II_aII_bII_c$ et $II'_aII'_bII'_c$, puis $III_aIII_bIII_c$ et $III'_aIII'_bIII'_c$ ... sont tels que leurs côtés opposés sont involutivement conjugués.

Ces triangles forment donc une suite dans laquelle chacun d'eux est réciproquement conjugué à un autre, mais à un seul, autrement dit ils forment *une involution de triangles.*

Le triangle fondamental est conjugué à lui même, A est conjugué de B sur $C_{1.c}$, B est conjugué de C sur $C_{1.a}$ et C est conjugué de A sur $C_{1.b}$. ABC est conjugué avec BCA.

$(\overline{d}_{1.a}\overline{d}_{1.c})$ et $(\overline{d}_{2.a}\overline{d}_{2.c})$ sont sur b' et ainsi de suite pour des raisons analogues.

10. Involutions de triangles. (3 sommets)

En considérant les points conjugués A_2 et A'_2 sur a_1 puis B_2 et B'_2 sur b_1 et enfin C_2 et C'_2 sur c_1, ces trois paires de points déterminent l'hexagone de côtés $a_2b'_2c_2a'_2b_2c'_2$ ainsi que 2 triangles $A_2B_2C_2$ et $A'_2B'_2C'_2$. Les points de coupe des côtés opposés de l'hexagone sont dans les sommets du triangle auxiliaire et les côtés opposés des triangles sont des tangentes des coniques engendrées par les involutions sur $a_1b_1c_1$. B_2C_2 et $B'_2C'_2$ sont des tangentes de $K_{1.a}$ et ainsi de suite. Ces droites sont des lignes de jonction de points homologues des ponctuelles.

Tous les triangles comme $A_2B_2C_2$ et $A'_2B'_2C'_2$ puis $A_3B_3C_3$ et $A'_3B'_3C'_3$ ... sont tels que leurs sommets opposés sont involutivement conjugués.

Ces triangles forment donc une suite dans laquelle chacun d'eux est réciproquement conjugué à un autre, mais à un seul, autrement dit ils forment *une involution de triangles.*

Le triangle fondamental est conjugué à lui-même, a_1 est conjugué de b_1 par rapport à la conique $K_{1.c}$, b_1 est conjugué de c_1 sur $K_{1.a}$ et c_1 est conjugué de a_1 sur $K_{1.b}$. $a_1b_1c_1$ est conjugué de $b_1c_1a_1$.

$A_1B_1C_1$ ou $I_aI_bI_c$ est conjugué de $I'_aI'_bI'_c$, I'_a étant sur c'_1 conjugué de c_1 en C et sur b'_1 conjugué de b_1 en B, etc. $II_aII_bII_c$ est conjugué de $II'_aII'_bII'_c$ et ainsi de suite.

L'involution possède deux triangles doubles formés par les rayons doubles, ce sont $D_{1.a}$ $D_{1.b}$ $D_{1.c}$ et $D_{2.a}$ $D_{2.b}$ $D_{2.c}$. Chacun est conjugué à lui-même; les sommets homologues sont confondus en $D_{1.a}$, $D_{1.b}$, etc.

Les coniques ont au moins un point commun, soit P ce point; il correspond à un triangle de l'involution pour lequel les trois sommets sont confondus. Le triangle conjugué s'obtiendra de la même manière que les autres. Il ne peut pas y avoir de triangle du système involutif dont les sommets soient sur les côtés du triangle fondamental, puisque ceux-ci sont des tangentes. D'autre part, il ne peut pas non plus y avoir de triangles du système dont les sommets soient séparés et en ligne droite car les côtés d'un triangle tel que $II_a\, II_b\, II_c$ passent chacun par un sommet de ABC.

Revenons aux triangles conjugués $II_aII_bII_c$ et $II'_aII'_bII'_c$. *La ligne de jonction de deux sommets homologues* II_a *et* II'_a, *c'est-à-dire de deux sommets sur la même conique, passera toujours par un point fixe, le conjugué harmonique* A' *de* $\overline{A}_1$ *par rapport à* B *et* C, puisque a et a_1 sont des diagonales fixes dans

Le triangle auxiliaire ABC est conjugué de $\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1$ parce que $\overline{A}_1$ est conjugué de A sur a_1, etc., $a_2b_2c_2$ est conjugué de $a'_2b'_2c'_2$ et ainsi de suite.

L'involution possède aussi deux triangles doubles correspondant aux points doubles, ce sont $D_{1.a}D_{1.b}D_{1.c}$ et $D_{2.a}D_{2.b}D_{2.c}$. Chacun est conjugué à lui-même car les côtés représentent en somme deux rayons homologues confondus.

Les coniques ont au moins une tangente commune, soit p. Elle correspond à un triangle de l'involution dont les côtés sont confondus, et le triangle conjugué s'obtiendra de la même manière que les autres. Il ne peut pas y avoir de triangles du système dont les côtés passent par les sommets du triangle fondamental, puisque ceux-ci sont déjà des points de tangence. D'autre part il ne peut pas y avoir de triangles de l'involution dont les trois côtés soient séparés et passent par un même point; autrement dit, il ne peut pas y avoir de triangles qui se ramènent à un point, car les sommets doivent appartenir à chacun des trois côtés respectifs du triangle fondamental.

Revenons aux deux triangles conjugués $A_2B_2C_2$ et $A'_2B'_2C'_2$. *Les points de coupe de deux côtés homologues,* B_2C_2 *et* $B'_2C'_2$ *par exemple, c'est-à-dire le point de coupe de deux tangentes de la même conique sera toujours sur une droite fixe, le rayon conjugué harmonique* a' *de* $a'_1 = \overline{a}'_1 = AA_1$ *par rapport à* b_1 *et* c_1, les quadrilatères correspondants. De la même manière II_b — II'_b passera par B′ et II_c — II'_c par C′.

Les droites analogues menées par les sommets des triangles doubles, comme $C'D_{1.c}$ et $C'D_{2.c}$ sont les droites de jonction de deux points confondus sur une conique. Ce sont par conséquent des tangentes de la conique.

Les tangentes respectives des coniques $C_{1.a}$, $C_{1.b}$, $C_{1.c}$ *par* A′, B′, C′ *sont les droites de jonction de ces points avec les points doubles des involutions correspondantes sur les côtés du triangle auxiliaire, ou avec les sommets correspondants des triangles doubles de l'involution de triangles.*

L'ensemble des lignes de jonction considérées en A′, B′ et C′ forment trois faisceaux homographiques puisque chaque ligne d'un faisceau est conjuguée à une, mais à une seule de chaque autre faisceau. Ces faisceaux engendrent trois coniques $C_{3.a}$, $C_{3.b}$ et $C_{3.c}$, telles que chacune d'elles passe par les deux sommets correspondants et par un sommet du triangle fondamental. $C_{3.a}$ par exemple, passe par B′, C′ et A car C′AB et B′CA sont des rayons conjugués. Ces trois coniques passent encore évidemment par les points comme P communs aux trois coniques $C_{1.a}$, $C_{1.b}$, et $C_{1.c}$.

car les points A et A_1 sont des points diagonaux fixes des quadrangles correspondants. De la même manière A_2C_2 et $A'_2C'_2$ se coupent sur b' et A_2B_2 et $A'_2B'_2$ sur c'.

Les points de coupe des côtés des triangles doubles avec les rayons a' b' et c' correspondants seront les points de tangence de ces côtés avec leur conique respective, car ce point est aussi le point de coupe de deux tangentes confondues. $D_{1.b}$ — $D_{1.c}$ coupera a' en son point de tangence avec $K_{1.a}$.

Les points de coupe des coniques $K_{1.a}$ $K_{1.b}$, $K_{1c.}$, *avec les droites* a′, b′, c′ ($K_{1.a}$ *avec* a′, *etc.) sont les points de coupe de ces droites avec les côtés correspondants des triangles doubles de l'involution de triangles et ce sont aussi les points de tangence de ces mêmes côtés avec les courbes.*

Les points de coupe sur les rayons a', b', c' considérés dans leur ensemble forment trois ponctuelles homographiques, chaque point de l'une étant conjugué à un, mais un seul de chacune des autres. Ces ponctuelles engendrent trois coniques telles que chacune d'elles $K_{3.a}$, $K_{3.b}$ et $K_{3.c}$ est tangente aux deux bases correspondantes et à un côté du triangle fondamental. $K_{3.a}$ par exemple est tangente de b', c' et a_1, puisque C_1 sur c' et B_1 sur b' sont des points conjugués.

Ces trois coniques admettent évidemment p et les autres tangentes communes des $K_{1.a}$, $K_{1.b}$, $K_{1.c}$, comme tangentes communes à elles aussi.