Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1914)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UN PROBLÈME SE RÉSOLVANT PAR LA GÉOMÉTRIE A 4 DIMENSIONS

Autor: Sauter, J. / Trosset, F.

Kapitel: Deuxième méthode.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15534

le centre de gravité de l'argent sera sur la même verticale que celui de l'or, mais à une altitude de $\frac{30528}{4020} = 7,5940$ cm. Le problème est aussi résolu pour l'argent.

Le poids total du corps sera de $9234 + 4020 = 13254$ gr. Son centre de gravité est situé sur la verticale qui joint les centres des bases, à une altitude qu'on obtient en divisant par 13254 la somme $33652,8 + 30528 = 64180,8$; l'altitude est de 4,8424. Le problème est complètement résolu.

Deuxième méthode.

Nous supposons établi que la densité du corps à la distance x au-dessous de sa petite base varie uniformément avec x, selon la formule $d = 10 + \frac{9}{12}x$. Nous avions démontré cette propriété pour la pyramide qui avait été désignée par p ; toutefois la formule est valable dans toute l'étendue du corps total, puisque la composition de l'alliage dépend seulement de x, d'après les données mêmes du problème.

Au lieu de couper le corps en morceaux, essayons de le compléter en prolongeant les arêtes obliques A_0A_a, B_0B_a, C_0C_a, D_0D_a jusqu'à leur point d'intersection z (voir fig. 5) et en supposant que la densité varie encore suivant la loi $d = 10 + \frac{9}{12}x$ au-dessus de la petite base, où x prendra des valeurs négatives. Nous désignerons par c le corps donné, par c' la pyramide additionnelle qui le surmonte, et par $C = c + c'$ le corps ainsi complété.

Pour trouver la hauteur h' de z au-dessus de la petite base, nous utilisons la proportion $\frac{h'}{h+h'} = \frac{C_aD_a}{C_0D_0} = \frac{9}{12}$, que démontre la figure ; h est la hauteur du corps donné, 12 cm. ; nous tirons de cette proportion $\frac{h'}{h} = \frac{9}{12-9} = 3$ soit $h' = 3h = 36$ cm.

Pour trouver la densité en z, il nous faut faire, dans la formule pour d, $x = -36$, et nous trouvons le résultat étrange $d = 10 - \frac{9}{12}36 = -17$, densité négative.

Mais ceci nous apprend qu'il suffit d'augmenter partout de 17 la densité du corps C pour en faire un corps C_1 assimilable à une pyramide homogène Q_1 à 4 dimensions, comme nous l'avions fait pour la pyramide p''.

Désignant par y la distance d'un point quelconque au sommet z, en aura $y = x + h' = x + 36$ et pour la densité d_1 en un tel point de C_1 $d_1 = 17 + d = 27 + \frac{9}{12}(y - 36) = \frac{9}{12}y$.

La pyramide à 4 dimensions Q_1 sera un corps homogène dont la hauteur mesure $h + h' = 48$ cm. et dont une section quelconque menée parallèlement à la base à la distance y au-dessous du sommet a comme longueur $\frac{A_0B_0}{h+h'}y = \frac{12}{48}y$, comme largeur $\frac{B_0C_0}{h+h'}y = \frac{8}{48}y$ et comme troisième dimension $d_1 = \frac{9}{12}y = \frac{36}{48}y$.

Le poids de C_1 sera par conséquent égal au produit de la base

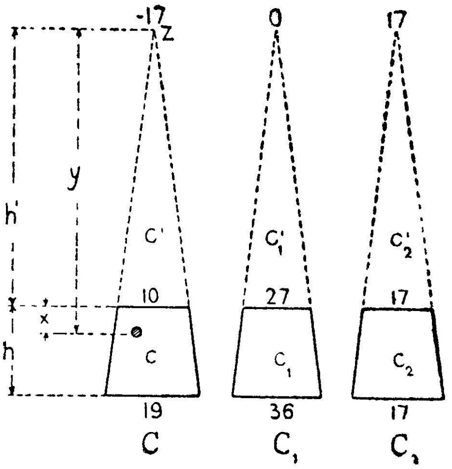

Fig. 5.

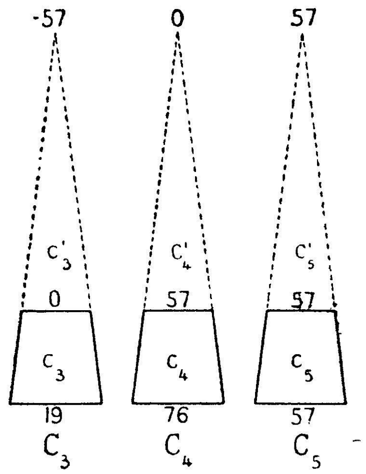

Fig. 6.

$12 \times 8 \times 36$ de Q_1 par 12, quart de la hauteur $h + h'$, donc 41472 gr., et l'altitude G_1 de son centre de gravité 9,6, cinquième partie de $h + h'$.

On passera au poids m'_1 de la partie supérieure c'_1 (correspondant à c') de C_1, soit à la capacité de la partie supérieure q'_1 de Q_1 en multipliant M_1 par la quatrième puissance du rapport des dimensions des corps semblables à 4 dimensions, c'est-à-dire par $\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$, ce qui donnera $m'_1 = 13122$ gr. L'altitude g'_1 du centre de gravité de c'_1 sera égale à $h + \frac{h'}{5} = 12 + \frac{36}{5} = 19{,}2$.

Soustrayant 13122 de 41472, on obtient 28350 pour le poids m_1 de la partie inférieure c_1 (correspondant à c) de C_1, tandis que l'altitude g_1 du centre de gravité de c_1 sera donnée par relation $M_1G_1 = m'_1g'_1 + m_1g_1$ soit, en remarquant que M_1, m'_1 et m_1 sont entre eux comme les nombres 256, 81 et $256 - 81 = 175$,

$$256 \times 9{,}6 = 81 \times 19{,}2 + 175\, g_1$$
$$\text{d'où } 175\, g_1 = 2457{,}6 - 1555{,}2 = 902{,}4,$$
$$\text{soit } 700\, g_1 = 3609{,}6 \text{ ou } g_1 = \frac{36{,}096}{7} \text{ cm.}$$

Nous introduirons encore un corps homogène C_2 de mêmes dimensions que le corps C, mais ayant partout la densité 17 ; nous y distinguerons encore deux parties, c_2 et c'_2, correspondant à c et c'. Le poids M_2 de C_2 est égal à $17 \times \frac{48}{3} \times 12 \times 8 = 26112$ gr., le poids m'_2 de c'_2 à $\left(\frac{3}{4}\right)^3 26112 = 11016$ gr., le poids m_2 de c_2 à $26112 - 11016 = 15096$ gr. L'altitude G_2 du centre de gravité de C_2 est de $\frac{1}{4} 48 = 12$ cm.; l'altitude g'_2 du centre de gravité de c'_2 est $12 + \frac{1}{4} 36 = 21$ cm.; l'altitude g_2 du centre de gravité de c_2 s'obtient par la relation $M_2 G_2 = m'_2 g'_2 + m_2 g_2$ soit, en remarquant que M_2, m'_2 et m_2 sont entre eux comme les nombres 64, 27 et $64 - 27 = 37$,

$$64 \times 12 = 27 \times 21 + 37\, g_2$$

$$\text{d'où } 37 g_2 = 768 - 567, \text{ soit } g_2 = \frac{201}{37}.$$

Tout est prêt pour la résolution de notre problème en ce qui concerne la masse totale du corps donné c. C'est que le corps c_1 peut être considéré comme la somme des corps c_2 et c; on doit avoir $m_1 = m_2 + m$ et $m_1 g_1 = m_2 g_2 + mg$, m étant le poids de c et g l'altitude de son centre de gravité ; on trouve

$$m = m_1 - m_2 = 28350 - 15096 = 13254 \text{ gr.}$$

$$mg = m_1 g_1 - m_2 g_2 = 28350 \frac{36,096}{7} - 15096 \frac{201}{37}$$

$$13254\, g = 4050 \times 36,096 - 408 \times 201,$$

$$\text{d'où } g = \frac{146188,8 - 82008}{13254} = 4,8424.$$

En outre, tout le travail de raisonnement qui a été fait jusqu'ici va nous servir sans autre pour traiter le problème de l'or. Nous supposerons que par un procédé chimique nous ayons pu dissoudre et enlever tout l'argent du corps c; il restera un corps spongieux c_3 (voir fig. 6) de constitution analogue à celle de la pyramide p_1 (utilisée dans la 1re méthode), dont la densité moyenne à l'altitude x répond à la formule $d_3 = \frac{19}{12} x$. Ceci nous conduira à introduire successivement :

Un corps c'_3 de mêmes dimensions que c' et formant avec c_3 une pyramide C_3 dont la densité, répondant encore à la formule précédente, atteint au sommet la valeur négative — 57 ;

un corps c_4 de mêmes dimensions que c_1 et dont la densité atteint 57 en haut et 76 en bas, donc des valeurs $\frac{19}{9}$ fois plus fortes que celles de c_1; le poids m_4 de ce corps sera donc $\frac{19}{9}\, 28350 =$

59850 gr., tandis que l'altitude g_4 de son centre de gravité reste $\frac{36,096}{7}$ cm.;

un corps homogène c_5 de mêmes dimensions que c_2, mais de densité 57, donc $\frac{57}{17}$ fois plus lourd ; son poids m_5 sera par conséquent $\frac{57}{17}$ 15096 $=$ 50616 gr., tandis que l'altitude g_5 de son centre de gravité reste $\frac{201}{37}$ cm.

Nous arriverons ainsi à $m_3 = m_4 - m_5 = 59850 - 50616 = 9234$ gr. comme poids de l'or du corps c, et aux relations suivantes pour l'altitude g_3 de son centre de gravité :

$$m_3 g_3 = m_4 g_4 - m_5 g_5 = 59850 \frac{36,096}{7} - 50616 \frac{201}{37}$$

$$9234 g_3 = 8550 \times 36,096 - 1368 \times 201 = 33652,8 \;,$$

d'où $g_3 = 3,6444$ cm.

Quant à l'argent du corps c, son poids sera

$$m - m_3 = 13254 - 9234 = 4020 \text{ gr.}$$

et l'altitude de son centre de gravité

$$\frac{mg - m_3 g_3}{m - m_3} \quad \text{soit} \quad \frac{64180,8 - 33652,8}{4020} = 7,5940 \text{ cm.}$$

On voit que cette seconde méthode conduit aux mêmes résultats que la première. Les deux méthodes ayant fait intervenir de deux façons très différentes certaines propriétés de la pyramide générale à n dimensions, il y a tout lieu de croire que ces propriétés, établies par induction, sont vraies.

Complément.

Nous nous proposons ici de démontrer par déduction, mais sans le secours du calcul intégral, les propriétés fondamentales de la pyramide à n dimensions :

« La capacité de la pyramide à n dimensions est égale au produit de la base par la $n^{\text{ième}}$ partie de la hauteur ;

« la distance de la base au centre de gravité est égale à la $(n+1)^{\text{ième}}$ partie de la hauteur. »

Il est à remarquer que n peut aussi être plus petit que 3. Pour $n = 1$ on obtient un segment de droite dont une extrémité fera « sommet » et dont l'autre fera « base » ; la « capacité » se réduit à