**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 16 (1914)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** L'UTILISATION DE LA GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE DANS LA PHYSIQUE DE LA RELATIVITÉ

**Autor:** Rougier, L.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-15522

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# L'UTILISATION
## DE LA
# GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE
# DANS LA PHYSIQUE DE LA RELATIVITÉ

---

Henri Poincaré a montré que l'espace représentatif n'est ni homogène, ni isotrope, ni forcément à trois dimensions ; qu'il peut s'adapter à une foule de géométries différentes, et qu'il est simplement commode de raisonner sur lui comme s'il était un continu mathématique à trois dimensions auquel on applique la métrique d'Euclide. Ce choix de la géométrie euclidienne à trois dimensions, parmi toutes les autres possibles, se légitime par des raisons de simplicité mathématique et d'opportunisme physique. La géométrie d'Euclide est plus simple que la géométrie de Lobatschefski et de Riemann comme un polynôme du premier degré est moins compliqué qu'un polynôme du second ; et les solides naturels — en particulier notre corps — avec lesquels nous effectuons nos mesures se comportent, à peu près, dans leurs déplacements comme les substitutions du groupe euclidien. Mais l'expérience ne nous impose pas pour cela notre géométrie : elle nous montre seulement qu'elle est la plus commode.

On pourrait à la rigueur se servir des géométries de Lobatschefski et de Riemann pour construire la mécanique et la physique. L'affirmation même que la géométrie d'Euclide est mathématiquement la plus simple ne se passe pas de commentaires. Le principe de dualité qui est évident dans la géométrie de Riemann et dans la géométrie analytique de Lobatschefski, ne l'est pas dans celle d'Euclide ; la théorie de l'équivalence des figures planes, aisée en géométrie non-euclidienne est compliquée en géométrie ordinaire dès que l'on veut se donner la peine d'être rigoureux. L'assertion de Poincaré ne se défend que par une interprétation particulière — très remarquable d'ailleurs — de la géométrie non-euclidienne. Considérons les coordonnées rectangulaires euclidiennes $x$, $y$, $z$ d'un point et les coordonnées correspondantes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ en géométrie lobatschefskienne : savoir le sinus des rapports des distances de ces trois points aux trois plans coor-

donnés à la constante lobatschefskienne $2k$. Posons

$$\xi = \frac{2kx}{x^2 + y^2 + z^2 - k^2}, \quad \eta = \frac{2ky}{x^2 + y^2 + z^2 - k^2}, \quad \zeta = \frac{2k}{x^2 + y^2 + z^2 - k^2};$$

ou, en prenant le radical positivement,

$$x = \frac{\xi}{\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{\zeta}, \quad x = \frac{1}{\zeta}\sqrt{(k\zeta + 1)^2 - \xi^2 - \eta^2 - 1}$$

on trouvera alors qu'à tout point $(\xi, \eta, \zeta)$ de l'espace lobatschefskien correspond un point de l'espace euclidien situé au-dessus du plan fondamental $\zeta = 0$; au plan et à la droite du premier espace, une sphère et un cercle coupant orthogonalement le plan fondamental; à la sphère, au cercle et à l'angle lobatschefskiens, une sphère, un cercle et un angle euclidiens; à la distance lobatschefskienne de deux points, le logarithme du rapport anharmonique de ces deux points et des intersections du plan fondamental avec un cercle passant par ces deux points et le coupant orthogonalement, etc. La transformation ainsi obtenue des propriétés de l'espace lobatschefskien en propriétés d'un demi-espace euclidien, leur confère une apparence compliquée : à certaines expressions lobatschefskiennes du premier degré, correspondent des expressions euclidiennes du second. En ce sens, ce n'est pas à proprement parler, la géométrie lobatschefskienne mais seulement sa transformée euclidienne qui est moins simple que la géométrie ordinaire.

Il y a plus. On peut se demander si, réellement, les mouvements de nos solides naturels se comportent, à peu près, suivant les substitutions du groupe euclidien, et non, par exemple, suivant celles du groupe de Lobatschefski ? Les raisons d'opportunisme physique invoquées en faveur de la géométrie du savant grec se retourneraient alors au bénéfice de celle du savant russe. C'est précisément la révolution que vient d'opérer, selon M. Vladimir Varicak [1], la substitution de la nouvelle physique de la relativité à l'ancienne.

A première vue, les analogies entre cette physique nouvelle et la géométrie non-euclidienne sont frappantes. Dans l'une comme dans l'autre intervient un certain paramètre, appelé respectivement *courbure spatiale* et *vitesse de la lumière*, tels que l'on est tout naturellement conduit à mesurer le rayon de courbure spatiale par la vitesse de la lumière. Dans l'une comme dans l'autre, ce paramètre est une grandeur finie; et, pour une valeur infinie

[1] Physikalische Zeitschrift **11**, pp. 93, 287, 586, 1910; **12**, pp. 169, 1911 — Sitzungsberichte der K. serbischen Akademie zu Belgrad, p. 88, 1911 — Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1912 — Wiadomosci matematyczne, 4, 1913 — Primjedbe o teoriji relativnosti, prestampano iz 1908. Kerjige « Rada » Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti, 1913.

qu'on lui accorde, on retrouve, respectivement, la géométrie d'Euclide et la mécanique de Newton comme cas limites. A la contraction de Lorentz dans la physique de la relativité correspond la déformation des largeurs dans l'interprétation euclidienne fournie par Poincaré de la géométrie lobatschefskienne, où l'élément linéaire $d\sigma = \frac{ds}{y}$ ne se peut déplacer, en général, sans subir de déformations. Dans la physique de la relativité, la règle du parallélogramme des vitesses cesse d'être valable : il n'y a pas de parallélogramme dans la géométrie de Lobatschefski. Le développement de celle-ci s'est heurté à de nombreuses antinomies apparentes : il en est de même du développement de celle-là avec les paradoxes d'Ehrenfest et de Born.

Ces analogies conduisirent M. Vladimir Varicák à exprimer les équations de la physique d'Einstein à l'aide de la géométrie de Lobatschefski. Il lui apparut bien vite que, non seulement les formules se simplifiaient, mais qu'elles acquéraient une signification géométrique en absolue corrélation avec l'interprétation de la théorie classique au moyen de la géométrie d'Euclide. Cette similitude va si loin qu'il n'y a pas lieu, parfois, de modifier l'énoncé des théorèmes de la théorie classique, à la seule condition de substituer aux figures euclidiennes les figures correspondantes de la géométrie lobatschefskienne, en prenant pour constante spatiale le paramètre $c = 3 \,.\, 10^{10}$ cm. La géométrie de Lobatschefski se présente ainsi comme l'instrument le plus adéquatement approprié au traitement mathématique de la physique de la relativité. Elle revendique pour son compte la précellence attribuée jusqu'à nos jours à celle d'Euclide.

*Définition et représentation graphique des vitesses.* — La vitesse de la lumière joue dans la physique nouvelle le rôle de la vitesse infinie dans la mécanique ancienne. M. Vladimir Varicák commence par définir la vitesse de manière à représenter celle de la lumière par une grandeur infinie. Comme unité de longueur, il prend $c = 3 \,.\, 10^{10}$ cm, c'est-à-dire le parcours de la lumière en une seconde, et il pose

$$\frac{v}{c} = \operatorname{th} \frac{U}{c} = \operatorname{th} u \,, \tag{1}$$

à la vitesse $v$ correspond le segment U dont la longueur est mesurée par le nombre $u$ d'après la relation

$$u = \operatorname{th}^{-1} \frac{v}{c} \,. \tag{2}$$

Suivant la manière d'écrire anglaise, (2) représente la fonction inverse de la tangente hyperbolique. Cette définition ne diffère

pas considérablement de la conception ordinaire que nous nous faisons des vitesses. Pour représenter des mouvements uniformes on se sert, dans la mécanique classique, de vecteurs proportionnels aux vitesses en question. Dans les limites de notre expérience ordinaire, la formule (2) conduit aux mêmes résultats. C'est seulement pour des vitesses de l'ordre de celle de la lumière, que se révèle une divergence croissante qui tend bien vite à l'infini.

Nous avons posé

$$\frac{U}{c} = u = \frac{v}{c} + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{v}{c}\right)^5 + \dots \tag{3}$$

Prenons maintenant $v = 1$ km./sec., on obtient alors

$$u = \frac{1}{3 \,.\, 10^5} + \frac{1}{3^4 \,.\, 10^{15}} + \frac{1}{5 \,.\, 3^5 \,.\, 10^{25}} + \dots$$

Si nous négligeons les termes de la série à droite du premier, nous commettrons une erreur qui n'influera pas sur la dixième décimale. Nous aurons alors un vecteur de 1 km. pour représenter une vitesse de 1 km./sec. Si l'on considère des vitesses, énormes pour la mécanique ordinaire, de 100 km./sec., on aura

$$\frac{U}{c} = \frac{1}{3 \,.\, 10^2} + \frac{1}{3 \,.\, 3^3 \,.\, 10^9} + \frac{1}{5 \,.\, 3^5 \,.\, 10^{15}} + \dots ,$$

et le segment U ne dépassera 100 km. que d'environ 3 mm. La différence n'est pas encore pratiquement appréciable. A la vitesse de 100,000 km./sec. correspondra un segment de 103,990 km. ce qui constitue, déjà, une différence notable. Mais si nous considérons les vitesses des rayons $\beta$ qui, d'après la célèbre expérience de Kaufmann, s'élèvent à 216,000 et 279,780 km./sec., les vecteurs qui les représentent seront de 272,400 et 503,400 km. Enfin pour $v = c$ on aura th $u = 1$, d'où $U = \infty$.

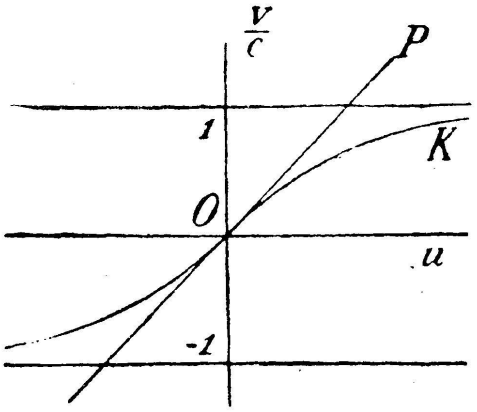


Fig. 1.

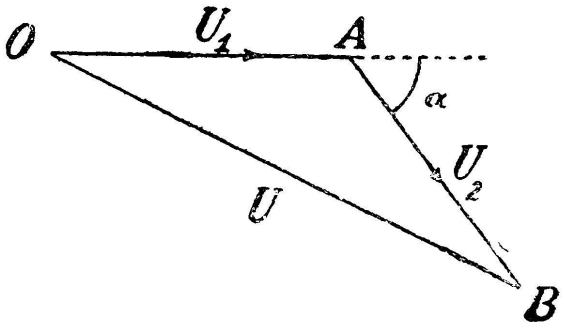


Fig. 2.

On peut représenter ces rapports graphiquement d'une façon fort simple. En prenant $u$ comme abscisse et $\frac{v}{c}$ comme ordonnée,

(2) sera représenté par la courbe K. L'évaluation habituelle correspond à la droite P, c'est-à-dire au premier membre de la série infinie (3). Cette droite est la tangente de K au point d'inflexion O; à mesure qu'on s'éloigne de l'origine la courbe K s'en écarte toujours davantage.

*La loi d'addition des vitesses d'Einstein.* — L'addition vectorielle des vitesses se retrouve dans la physique de la relativité. Considérons deux vitesses $v_1$ et $v_2$ qui comprennent entre elles un angle $\alpha$. Les segments $U_1$ et $U_2$ leur correspondent, que mesurent les nombres $u_1$ et $u_2$ suivant la relation

$$\frac{v_1}{c} = \operatorname{th} u_1 , \qquad \frac{v_2}{c} = \operatorname{th} u_2 . \tag{4}$$

On porte le segment $OA = U_1$ dans la direction de $v_1$ à partir du point O, et l'on place sous l'angle $\alpha$ le segment $AB = U_2$. La résultante est exprimée par le vecteur $OB = U$. Le triangle lobatschefskien OAB comprend la relation

$$\operatorname{ch} u = \operatorname{ch} u_1 \operatorname{ch} u_2 + \operatorname{sh} u_1 \operatorname{sh} u_2 \cos \alpha . \tag{5}$$

Si l'on pose

$$\operatorname{ch} u = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} , \qquad \operatorname{sh} u = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} , \tag{6}$$

on obtient

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v_1 v_2 \cos \alpha}{c^2}} ,$$

et, après quelques transformations,

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{\left(\frac{v_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{c}\right)^2 - \left(\frac{v_1 v_2}{c^2}\right)^2 - 1}{\left(1 + \frac{v_1 v_2 \cos \alpha}{c^2}\right)^2} + 1$$

$$= \frac{\left(\frac{v_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{c}\right)^2 - \left(\frac{v_1 v_2}{c^2}\right)^2 . (1 - \cos^2 \alpha) + \frac{2 v_1 v_2 \cos \alpha}{c^2}}{\left(1 + \frac{v_1 v_2 \cos \alpha}{c^2}\right)^2}$$

d'où suit finalement

$$v = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos \alpha - \left(\frac{v_1 v_2 \sin \alpha}{c^2}\right)^2}}{1 + \frac{v_1 v_2 \cos \alpha}{c^2}} \tag{7}$$

C'est la loi d'Einstein pour la composition des vitesses.

Si $v_1$ et $v_2$ sont faibles par rapport à la vitesse de la lumière on peut négliger le dernier membre dans le numérateur et le dénominateur de l'expression (7), et on retrouvera la formule ordinaire

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha} \,. \tag{8}$$

Si l'on accorde au paramètre $c$ une valeur infinie, on retombe dans la géométrie d'Euclide, et la formule (7) se réduit exactement à (9).

Si les vitesses $v_1$ et $v_2$ comprennent l'angle $\alpha = 0$, elles ont la même direction, et l'on a, d'après (5), $u = u_1 + u_2$. La vitesse résultante $v$ se déduit de la formule

$$\operatorname{th} u = \frac{\operatorname{th} u_1 + \operatorname{th} u_2}{1 + \operatorname{th} u_1 \operatorname{th} u_2} \,,$$

ou

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \,. \tag{9}$$

La résultante est certes arithmétiquement plus petite que la somme des composantes, mais elle est représentée, comme dans la théorie classique, par un segment qui équivaut à la somme des segments représentant les composantes. Si l'on compose deux vitesses égales $U_1$ dans la même direction, la résultante sera représentée par le segment $2U_2$.

*Non commutativité de l'addition vectorielle des vitesses.* — Dans la géométrie de Lobatschefski il n'y a pas de parallélogramme. La résultante de deux vitesses ne peut donc être représentée par la diagonale d'un parallélogramme. Il s'ensuit que les composantes ne sont pas commutatives. Pour plus de simplicité, prenons deux vitesses qui forment l'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$. D'après la formule (5) nous avons

$$\operatorname{ch} u = \operatorname{ch} u_1 \operatorname{ch} u_2 \,, \tag{10}$$

d'où l'on tire facilement

$$\operatorname{th}^2 u = \operatorname{th}^2 u_1 + \operatorname{th}^2 u_2 - \operatorname{th}^2 u_1 \operatorname{th}^2 u_2$$

ou

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - \left(\frac{v_1 v_2}{c}\right)^2} \,. \tag{11}$$

Dans la figure (3) nous avons

$$OA = u_1 , \qquad AB = u_2 , \qquad OB = u .$$

Dans la géométrie hyperbolique, la somme des angles d'un triangle est toujours plus petite que deux droits. Dans le triangle OAB on a par conséquent

$$\alpha_1 + \alpha_2 < \frac{\pi}{2} .$$

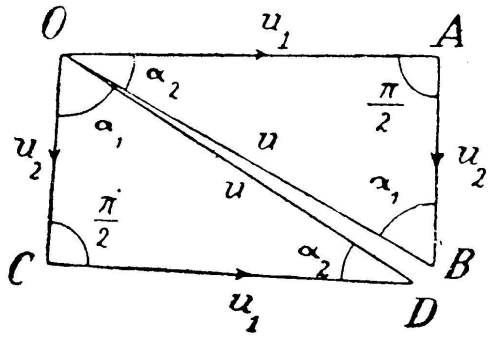

Fig. 3.

Portons le segment $u_2$ dans la direction OC normalement à OA, et plaçons sous l'angle droit le segment $u_1$ : nous atteignons le point D, qui est différent de B. Dans l'ancienne mécanique ces deux points coïncident. Si l'on compose les vitesses suivant l'ordre inverse, on obtient une résultante de même grandeur, mais de direction différente. La différence de direction

$$\delta = \sphericalangle BOD = \frac{\pi}{2} - (\alpha_1 + \alpha_2) \tag{12}$$

peut facilement se représenter comme une fonction des composantes.

Si l'on introduit dans la formule

$$\operatorname{cotg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2}{1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} \tag{13}$$

la valeur tirée du triangle lobatschefskien OAB

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\operatorname{th} u_1}{\operatorname{th} u_2} , \qquad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\operatorname{th} u_2}{\operatorname{th} u_1} ,$$

on obtient

$$\operatorname{cotg} \delta = \frac{\operatorname{th} u_1 \operatorname{sh} u_1 + \operatorname{th} u_2 \operatorname{sh} u_1}{\operatorname{sh} u_1 \operatorname{sh} u_2 - \operatorname{th} u_1 \operatorname{th} u_2} , \tag{14}$$

ce qui, par suite de (1) et de (6) se transforme en

$$\operatorname{cotg} \delta = \frac{v_1^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2} + v_2^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}{v_1 v_2 \left(\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}\right)} . \tag{15}$$

Dans la géométrie de Lobatschefski il n'y a pas de figures semblables. Il n'y a pas davantage, dans la théorie de la relativité,

de similitude cinématique. Quand on multiplie toutes les composantes par le nombre $k$, la résultante est $k$ fois plus grande dans l'ancienne mécanique, mais non dans la nouvelle. On doit dessiner toutes les figures avec leur grandeur absolue, et, comme l'unité de longueur est trop grande, on ne peut en donner qu'une représentation schématique et tronquée.

*Les coordonnées de Weierstrass.* — Convenons maintenant de prendre comme unité de longueur 1 cm., et de mesurer le temps de façon que la vitesse de la lumière soit 1 cm. par unité de temps. Nous désignerons ce temps nouveau par $l$, et nous considérerons une montre comme un simple instrument de mesure, propre à indiquer combien de fois un même phénomène s'est reproduit, toujours dans les mêmes conditions, depuis un événement déterminé choisi pour origine des temps. Nous exprimerons ainsi l'indication du temps d'une montre déterminée toujours par un seul nombre $l = ct$.

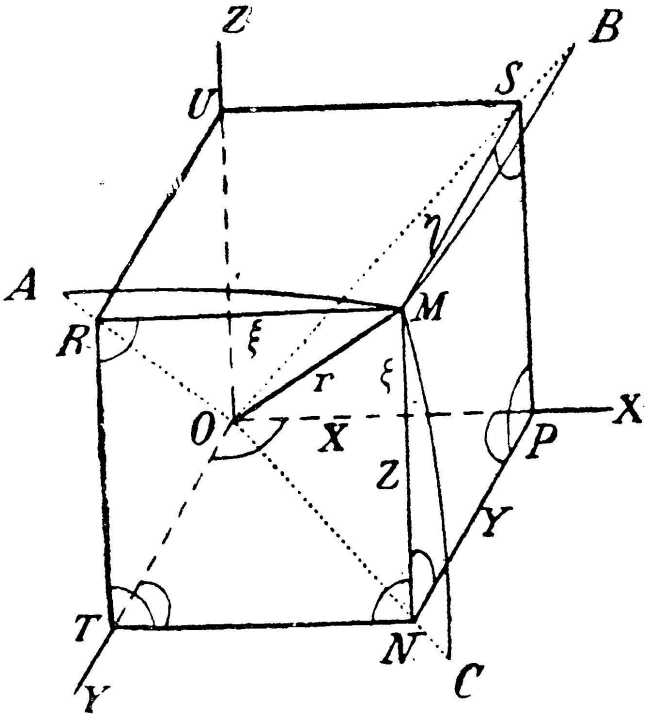

Fig. 4.

Un événement élémentaire sera représenté par un système de quatre valeurs $x$, $y$, $z$, $l$ que nous considérerons comme les coordonnées homogènes de Weierstrass d'un point dans un espace lobatschefskien à trois dimensions.

Par le point M (fig. 4) menons trois arcs d'horicycles normaux aux plans des coordonnées; abaissons du même point trois perpendiculaires $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sur ces plans, et soient N, R, S les pieds des trois perpendiculaires,

$$X = OP\ , \qquad Y = PN\ , \qquad Z = NM$$

seront les coordonnées lobatschefskiennes, et

$$(16)\qquad \begin{aligned} x &= \operatorname{sh}\xi = \operatorname{sh}X \operatorname{ch}Y \operatorname{ch}Z\ , \\ y &= \operatorname{sh}\eta = \operatorname{sh}Y \operatorname{ch}Z\ , \\ z &= \operatorname{sh}\zeta = \operatorname{sh}Z\ , \\ l &= \operatorname{ch}\lambda = \operatorname{ch}X \operatorname{ch}Y \operatorname{ch}Z\ , \end{aligned}$$

les coordonnées weierstrassiennes, exprimées en fonction des premières, du point M. On trouve alors facilement que les arcs d'horicycles MA, MB et MC sont les $x$, $y$, $z$ en question, et que les coordonnées weierstrassiennes de chaque point satisfont à l'équation quadratique

$$l^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1 \ . \tag{17}$$

On sait le rôle de cet invariant dans l'interprétation imaginaire à quatre dimensions de Minkowski.

*Le groupe de transformations de Lorentz-Einstein.* — Le groupe de Newton

$$x' = x - vt \ , \quad y' = y \ , \quad z' = z \ , \quad t' = t \tag{18}$$

exprime une translation le long de la ligne des $x$ dans la géométrie euclidienne. Le groupe de Lorentz-Einstein

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \ , \quad y' = y \ , \quad z' = z \ , \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{19}$$

s'interprète également comme une translation le long de l'axe des $x$ dans la géométrie de Lobatschefski.

Si nous demeurons dans le plan, nous pouvons dire : *le groupe de transformations de Lorentz-Einstein définit un mouvement le long des hypercycles qui ont l'axe des* x *comme ligne médiane.*

L'hypercycle $Y = b$ est le lieu des points qui sont à une distance constante $b$ de la ligne des $x$. La longueur de son arc compris entre deux points M et M′ est (fig. 5)

$$s = (X - X') \operatorname{ch} b \ . \tag{20}$$

La translation du segment $s$ le long de l'hypercycle dans le sens négatif est donnée par les équations

$$X' = X - \frac{s}{\operatorname{ch} b} \ , \quad Y' = Y \ ; \tag{21}$$

pour le passage du point M′ au point M″ on a

$$X'' = X' - \frac{s'}{\operatorname{ch} b} \ , \quad Y'' = Y' \ ,$$

ou

$$X'' = X - \frac{s + s'}{\operatorname{ch} b} \ , \quad Y'' = Y \ ; \tag{22}$$

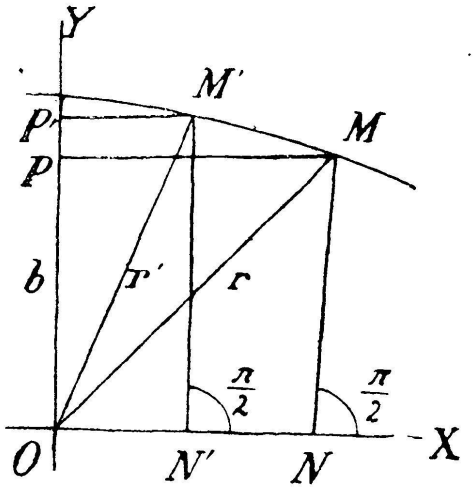

Fig. 5.

d'où résulte la propriété qu'ont les translations le long d'un hypercycle de former un groupe.

Soit $u$ la projection NN′ de l'arc MM′ sur l'axe des $x$. On a alors

$$X' = X - u \ , \qquad Y' = Y \ , \tag{23}$$

donc

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} X' &= \operatorname{sh} X \operatorname{ch} u - \operatorname{ch} X \operatorname{sh} u \ , \\ \operatorname{sh} Y' &= \operatorname{sh} Y \ . \end{aligned} \tag{24}$$

En multipliant la première équation par $\operatorname{ch} Y' = \operatorname{ch} Y$, on obtient

$$\operatorname{sh} X' \operatorname{ch} Y' = \operatorname{sh} X \operatorname{ch} Y \operatorname{ch} u - \operatorname{ch} X \operatorname{ch} Y \operatorname{sh} u \ , \qquad \operatorname{sh} Y' = \operatorname{sh} Y \ . \tag{25}$$

D'après la figure (5) on a de plus

$$\operatorname{ch} OM' = \operatorname{ch} X' \operatorname{ch} Y' \ , \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{ch} r' = \operatorname{ch}(X - u) \operatorname{ch} Y \ , \tag{26}$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{ch} r' = \operatorname{ch} X \operatorname{ch} Y \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} X \operatorname{ch} Y \operatorname{sh} u \ . \tag{27}$$

Jusqu'à présent nous avons appliqué les coordonnées lobatschefskiennes. Si nous voulons passer aux coordonnées weierstrassiennes, nous devons nous servir des formules de transformation (16) qui permettent d'écrire les équations (26) et (27) sous la forme

$$x' = x \operatorname{ch} u - l \operatorname{sh} u \ , \qquad y' = y \ , \qquad l' = l \operatorname{ch} u - x \operatorname{sh} u \ . \tag{28}$$

Si l'on pose d'après la formule (6)

$$\operatorname{ch} u = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \ , \qquad \operatorname{sh} u = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \ ,$$

et $l = ct$, on obtient aussitôt le groupe de transformations de Lorentz-Einstein sous son aspect habituel (19). Nous voyons ainsi que la transformation de l'espace et du temps entraînée par un mouvement uniforme de vitesse $u$, est complètement caractérisé par la translation du point M représentant un événement élémentaire.

Dans l'espace, on obtient les hypercycles qui ont l'axe des $x$ pour ligne médiane comme lignes d'intersections de deux hypersphères

$$y - d_2 = 0 \ , \qquad z - d_2 = 0 \ ,$$

dont les plans médians sont les plans des coordonnées XY et XZ. Le groupe de transformations de Lorentz-Einstein (28), auquel

s'applique l'équation $Z' = Z$, se peut interpréter alors : *comme une translation le long de la ligne d'intersection de ces deux hypersphères*. La trajectoire d'un point d'un corps solide emporté d'un mouvement de translation le long de l'axe des $x$, est un hypercycle. Les dimensions transversales du corps restent invariables dans ce déplacement.

Si nous prenons le paramètre $c = \infty$, la géométrie de Lobatschefski se changera dans celle d'Euclide ; les horicycles $x$, $y$, $z$ deviendront des lignes droites ; les coordonnées de Weierstrass se transformeront dans les coordonnées cartésiennes ordinaires ; les hypercycles se trouveront être des parallèles à l'axe des $x$ ; au groupe de transformations (28) ou (19) se substituera celui de Newton (18).

La forme infinitésimale du groupe de Lorentz-Einstein est

$$\text{(29)} \qquad Uf \equiv -l\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial l} .$$

Une première sorte d'invariants est formée par les hypercycles $Y = b$

$$\text{(30)} \qquad \omega(l, x) = l^2 - x^2 - y^2 \coth^2 b = 0 .$$

Les normales à l'axe des $x$ sont des invariants de seconde sorte

$$\text{(31)} \qquad \omega(l, x) = \frac{l}{x} - \coth u = 0 ,$$

car on a

$$U(\omega) = -1 + \omega^2 = F(\omega) .$$

Avec les coordonnées rectangulaires lobatschefskiennes l'équation de ces normales est $X = u$.

*Temps local.* — Si deux observateurs sont animés de vitesses uniformes mais différentes suivant des directions parallèles, chacun d'eux peut prétendre avec le même bon droit qu'il est en repos vis-à-vis de l'autre. Géométriquement parlant, cela veut dire que nous pouvons toujours considérer un point d'un plan comme en repos, moyennant un changement convenable du système de coordonnées. Il suffit pour cela d'abaisser la normale de ce point sur l'axe des $x$, et de prendre cette normale comme nouvel axe des ordonnées. Mais dans cette transformation le paramètre du temps est modifié.

L'unité de temps de l'observateur en un point déterminé doit être représentée par le cosinus hyperbolique de l'abscisse lobatschefskienne de ce point. Si dans un premier système (fig. 6), l'unité de temps de l'observateur en O ou en M est égale à (1), l'unité de temps de l'observateur en O′ ou M′ sera égale à $\operatorname{ch} u$,

quand on pose $OO' = u$. Il semble alors à l'observateur en repos en O, que la montre qui se meut avec la vitesse $u$ reste avec la sienne dans le rapport ch $u$ : 1. Dans l'évaluation de la durée d'un événement avec la montre mobile, l'observateur en repos doit trouver un nombre plus petit. La relation suivante se vérifie

$$(32) \qquad l' = \frac{l}{\operatorname{ch} u}, \qquad \text{ou} \qquad t' = t\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Mais, dans le second système, l'unité de temps de l'observateur en O' est égal à «1», pendant que l'unité de temps de l'observateur en O est égal à ch $u$. Les deux systèmes sont entièrement équivalents. On ne saurait donc parler d'une durée en soi. Il n'est pas davantage permis, en conséquence, d'accorder à la simultanéité de deux événements une signification absolue. Tel est bien le résultat des recherches d'Einstein sur la nouvelle notion, purement locale, du temps.

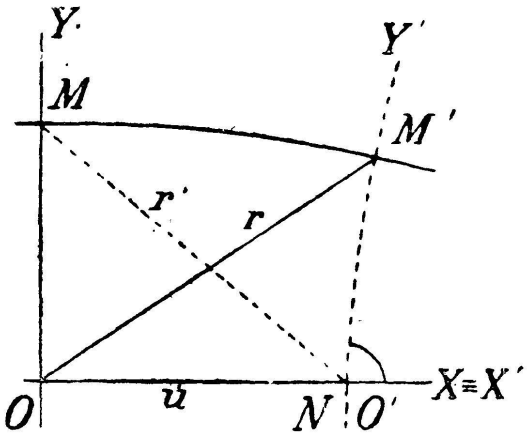

Fig. 6.

*Conclusions.* — Sans qu'il soit besoin de poursuivre l'exposé beaucoup plus complet de M. Varicák, qui s'étend à divers phénomènes d'optique et à la solution des paradoxes d'Ehrenfest et de Born, les exemples précédents suffisent à montrer comment la géométrie de Lobatschefski se substitue naturellement à celle d'Euclide dans la physique de la relativité. C'est en partant d'elle que M. Emile Borel est parvenu à mettre en lumière des conséquences qui avaient jusqu'alors échappé aux plus sagaces relativistes [1] : les observateurs qu'emporte un système peuvent le tenir pour constamment en translation, tandis qu'il apparaît animé d'un mouvement de rotation à des observateurs extérieurs ; d'où la possibilité de rendre compte des mouvements de rotation qui apparaissent à des observateurs en repos par des hypothèses où les mouvements intrinsèques sont uniquement des mouvements de translation.

A quoi tient cette convenance de la géométrie non-euclidienne à la physique de la relativité ? M. Varicák semble l'interpréter par une anisotropie géométrique de l'espace, qui rendrait compte en particulier, de la contraction de Lorentz. Mais l'espace est un continuum amorphe ; il est dénué par lui-même d'efficace et de forme, et seuls les corps qui y sont plongés, ou le réseau de lignes

[1] C. R., 20 janvier 1913.

et de surfaces qu'on convient d'y tracer, lui en donnent une par métaphore. La géométrie métrique est, non pas l'étude des propriétés de l'espace, mais celle de la structure du groupe des mouvements des corps solides et des groupes dérivés que l'on peut former avec ce groupe fondamental. Alors, à s'en tenir au point de vue purement descriptif d'Einstein, on voit que la notion du corps solide ordinaire disparaît dans la physique de la relativité. Le groupe de transformations de Lorentz-Einstein correspond non à des déplacements euclidiens, mais à des déplacements hyperboliques. Au point de vue explicatif de Lorentz, les corps se contractent dans le sens de leur mouvement et la variation de leur forme est entraînée par l'équilibre entre les actions électromagnétiques des électrons qui les composent et la pression constante et uniforme de l'éther sur eux.

Est-ce à dire que la géométrie de Lobatschéfski soit physiquement vraie et celle d'Euclide fausse ? La proposition n'a pas de sens. On peut conserver la géométrie ordinaire pour traiter de la physique de la relativité, et c'est ce qu'ont fait Lorentz et Einstein ; on peut aux trois coordonnées d'espace habituelles ajouter une quatrième dimension imaginaire, et c'est ce qu'a fait Minkowski ; on peut enfin se servir, si bon semble, de nouvelles géométries comme celle que MM. Wilson et Lewis [1] se sont accordés à construire. Chacune de ces interprétations a ses avantages particuliers. Celle de M. Varicák, à l'aide de la géométrie de Lobatschefski, sauvegarde le parallélisme entre les énoncés euclidiens de l'ancienne physique et ceux de la nouvelle. Le langage d'univers de Minkowski révèle des analogies insoupçonnées : il y a bien des manières de projeter l'espace à quatre dimensions $(x, y, z, t)$ sur l'espace à trois dimensions $x, y, z$, et le temps $t$ ; des phénomènes ambigus et contradictoires dans un certain mode de projection deviennent simples et harmonieux avec un autre. Enfin, l'interprétation même de Minkowski conduit naturellement à la géométrie de MM. Wilson et Lewis, qui permet de retrouver comme autant de théorèmes, en partie, les invariants physiques dont la présence en mécanique et en électromagnétisme est entraînée par le principe de relativité.

Il y a là une confirmation surprenante, après coup, des thèses philosophiques d'Henri Poincaré sur la commodité géométrique. Les axiomes de la géométrie ne sont pas des vérités nécessaires qui s'imposeraient analytiquement à l'esprit ou synthétiquement *a priori* à l'expérience, mais ce sont des conventions commodes en vertu de certaines particularités de notre corps et de notre

[1] Proceedings of the american Academy of Arts and Sciences, nov. 1912. — Cf., à un autre point de vue, l'article de M. Cailler (Genève) sur les équations du principe de Relativité et de la Géométrie : *Archives des Sciences physiques et naturelles*, t. XXXV, fév. 1913.

milieu. Or, précisément, une approximation plus poussée des sciences physiques a conduit récemment certains savants à préférer d'autres géométries à celle d'Euclide, parce qu'elles expriment plus commodément encore — dans certains cas du moins — les phénomènes de notre univers. C'est ainsi qu'une même question de physique mathématique est traitée par les uns et les autres à l'aide des géométries réelles ou imaginaires, à trois ou quatre dimensions, d'Euclide, de Lobatschefski, de Minkowski, de MM. Wilson et Lewis. On ne saurait mieux montrer qu'il n'y a là qu'une question de pure commodité ; et, en présence des conceptions nouvelles, le tranquille philosophe géomètre est en droit de conclure : « Nous avions adopté une convention parce qu'elle nous semblait commode et nous disions que rien ne pourrait nous contraindre à l'abandonner. Aujourd'hui certains physiciens veulent adopter une convention nouvelle; ils jugent cette convention nouvelle plus commode, voilà tout; et ceux qui ne sont pas de cet avis peuvent légitimement conserver l'ancienne pour ne pas troubler leurs vieilles habitudes [1] ».

L. Rougier (Lyon).

---

# ÉGALITÉS MULTIPLES [2] DE G. TARRY

*Par suite de l'abondance des matières, nous avons dû retarder la publication de cette intéressante Note du regretté* G. Tarry. *En nous envoyant le manuscrit, M. Aubry nous écrit : « J'ai l'honneur de vous adresser ci-joint une étude de M. G. Tarry qui me paraît des plus intéressantes et résultant de fragments d'une correspondance active que nous avons depuis quelque temps, fragments que j'ai réunis, coordonnés et présentés aussi clairement que j'ai pu. M. Tarry étant malade se désintéressait de cette étude et j'ai jugé qu'il serait regrettable qu'elle restât inconnue, aussi je lui ai demandé de m'autoriser à en solliciter l'insertion dans l'« Ens. math... » — On sait que M. Tarry mourut le 21 juin 1913.* N. de la Réd.

Définition. — L'égalité de plusieurs quantités est dite $n^{\text{uple}}$ quand elle a lieu, en même temps pour les carrés de ces quantités,

---

[1] H. Poincaré, *Dernières pensées*, p. 54.

[2] Toute cette théorie est due à M. G. Tarry, dont on connaît les beaux travaux, si originaux et si suggestifs, sur la géométrie générale, la géométrie de situation, les carrés magiques, la géométrie modulaire et les imaginaires de Galois. Je n'ai fait que rédiger, sous forme didactique et avec son autorisation, ces curieuses démonstrations, aux résultats à la fois si élémentaires et si généraux, dont il avait bien voulu me faire part. J'y ai en outre ajouté, à titre d'application, le cas particulier des égalités doubles (Note .I.) A. Aubry, Dijon.