Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1914)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA LIGNE DE TERRE ET LE SECOND BISSECTEUR
Autor: Halphen, Ch.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15533

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

droite est donc celle qui joint les deux points T_{12} et $U''^{\star}_{2}$; le problème est ainsi résolu, sans qu'on ait eu besoin de distinguer les différents cas auxquels donne lieu la situation du plan τ par rapport aux plans de projection. Le lecteur remarquera que, si B est le point de la bissectrice b où se coupent les parallèles menées de U''_2 à t_{12} et de $U''^{\star}_{2}$ à $t^{\star}_{12}$, les deux triangles rectangles $U'_2U''_2B$ et $U'_2U''^{\star}_{2}B$ sont égaux entre eux ; cette observation suffit pour établir l'accord de la construction que nous avons proposée avec celle qu'on trouve dans les traités.

Les constructions que nous venons d'exposer dans ce paragraphe trouvent des applications très importantes ; car, par exemple, c'est par un changement d'un des plans de projection qu'on résout de la manière la plus simple les problèmes de déterminer les intersections avec un plan d'un polyèdre ou d'une courbe gauche quelconque.

Gênes, 28 décembre 1913. Gino Loria.

LA LIGNE DE TERRE ET LE SECOND BISSECTEUR

Notes sur certains principes de la géométrie descriptive.

Introduction.

Il est vraisemblable que la représentation des figures à trois dimensions au moyen des projections remonte à une époque très reculée. Les projections n'étaient pas seulement employées dans les plans topographiques et dans les cartes, mais aussi dans les arts de la construction. La géométrie descriptive ne peut donc être attribuée à Monge comme une création ; il est cependant certain qu'il a rassemblé des documents épars, des tracés en usage dans la pratique ; il les a améliorés, complétés, et en a fait une véritable science, branche de la géométrie.

Le point capital de la doctrine de Monge est l'emploi de deux plans de projection fixes, rectangulaires, dont l'intersection est la ligne de terre. Aussi, dans la représentation du plan — qui est fondamentale — est-il amené immédiatement à considérer les *traces* ou droites d'intersection avec les deux plans de projection. L'importance attribuée aux traces par Monge est telle que les plans ne sont *jamais* donnés autrement dans son ouvrage. Son

continuateur, HACHETTE[1], n'abandonne pas cette idée, mais se rend compte qu'un plan peut être défini autrement que par les traces ; aussi le premier problème du *supplément* est-il le suivant : « Construire le plan qui passe par trois points donnés dans l'espace » (c'est-à-dire construire ses traces).

Combien de temps durèrent ces errements ? Je ne saurais le dire avec précision. Un célèbre professeur de géométrie descriptive, KIAES, paraît avoir notablement élargi le cadre trop rigide de Monge, si l'on en croit la préface de son traité (huitième édition, 1888) : « Autrefois un plan était toujours figuré par ses traces sur deux plans de projection, et quand on avait à considérer un plan dans la résolution d'un problème, quelles que fussent les données, on construisait les traces du plan. Quand il arrivait que les traces étaient situées hors des limites de l'épure, on était arrêté et obligé de changer les données. Aujourd'hui on opère sur les plans, quelle que soit la manière dont ils sont donnés, et le plus souvent on arrive au résultat avec moins de constructions que n'en exige la détermination des traces. »

Un point est donc *pratiquement* acquis : les traces sont inutiles. La ligne de terre ne doit donc servir à rien. Il suffit cependant de feuilleter les figures du livre de KIAES pour constater l'emploi fréquent des traces et la présence continuelle de la droite xy.

A la même époque (1882), rompant avec les traditions de Monge, le colonel MANNHEIM publia dans les *Nouvelles annales de mathématiques* une série d'articles réunis ensuite en une brochure sous le titre : Premiers Eléments de la Géométrie descriptive. L'*avertissement* montre nettement à quel mobile obéissait l'auteur : « J'engageais les professeurs à introduire dans les éléments les procédés en usage dans les applications... Ces quelques pages ont simplement pour but d'introduire dans les éléments les procédés employés par les ingénieurs... Actuellement, pour résoudre les problèmes élémentaires, on emploie des solutions qui conduisent à des tracés simples, mais qui ne sont simples que grâce à la préparation des données. Ces tracés d'ailleurs ne servent plus lorsqu'on arrive aux applications. Il me paraît donc important, dès le début, de n'employer que les *solutions mêmes* que l'on retrouvera plus tard. » La méthode préconisée par le colonel Mannheim est donc celle du dessin d'architecture, de machines, des épures d'appareillage et du trait de charpente. On se sert de deux projections sur deux plans rectangulaires *dont les directions sont connues, mais dont les positions sont arbitraires;* ils sont cependant placés, par rapport à l'objet à représenter, de manière telle que les cotes et les éloignements de tous les points soient de même signe — c'est-à-dire que les plans de projection ne cou-

[1] *Géométrie descriptive de Monge.* Nouvelle édition avec un supplément, par M. Hachette, instituteur de l'Ecole Impériale Polytechnique, Paris, 1811, supplément, page 12.

pent jamais l'objet figuré. Moyennant quoi, la distance des deux projections, le plan de l'une ayant été rabattu sur le plan de l'autre, est absolument indifférente. Plus de ligne de terre, plus de traces, comme cela se passe, à vrai dire, dans la pratique ; d'où grande simplification pour les débutants qui n'ont pas besoin d'apprendre les diverses positions des points par rapport aux plans de projection, ne peuvent plus se tromper dans les constructions lorsque les points ne sont pas dans le premier dièdre, et aussi plus grande facilité dans la ponctuation des épures.

Il y avait là, sans nul doute, une idée heureuse, mais il faut constater qu'elle n'a fait fortune ni dans l'enseignement secondaire proprement dit, ni dans les cours préparatoires aux grandes écoles. A vrai dire, on a pris l'habitude de se servir moins souvent de la ligne de terre et de ne plus la tracer lorsqu'elle est inutile, c'est-à-dire de laisser aux plans de projection une certaine mobilité. Dans la partie élémentaire de son ouvrage, M. Javary fait fréquemment remarquer qu'on peut se passer de ligne de terre, sans expliquer d'ailleurs pourquoi.

L'usage des 4 dièdres des plans de projection devait attirer l'attention sur deux situations particulières des points de l'espace. Lorsqu'un point est dans l'un ou l'autre des plans bissecteurs de ces dièdres, sa cote est égale à son éloignement, en valeur absolue ; il en résulte que, sur l'épure, les projections du point sont, ou symétriques par rapport à la ligne de terre (premier bissecteur), ou confondues (second bissecteur). Toute figure du second bissecteur a donc ses projections confondues. Frappé des avantages qui en résultent au point de vue de *l'économie graphique*, si l'on peut ainsi s'exprimer, M. Picquet, alors examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique, essaya, par le moyen de certaines questions d'examen [1], de faire pénétrer dans l'enseignement l'usage du second bissecteur comme *plan auxiliaire*, à côté des cinq autres devenus classiques : plans de bout, vertical, horizontal, de front, de profil. Or il se trouve, fait paradoxal à première vue et cependant presque évident, que *le second plan bissecteur est connu sans que l'on figure la ligne de terre sur l'épure, bien qu'il la contienne.* Il n'y a, à ma connaissance, qu'un seul ouvrage classique où soit faite explicitement cette remarque très importante, c'est le *Cours de Géométrie descriptive* de MM. Martin et Pernot (tome I, page 5). Nous entrons ici dans le vif du sujet.

Le Système de Monge modifié.

Tel est le nom que MM. Martin et Pernot ont donné à l'épure faite au moyen de deux plans rectangulaires de projection, l'un

[1] Cf. Lucien Lévy, *Examens et Examinateurs*, Revue du Mois, 1re année (1906), p. 147.

d'eux (vertical) ayant été rabattu sur l'autre (horizontal) comme d'habitude, mais sans que la ligne de terre ait été tracée. On connaît seulement les directions des plans de projection, par suite la direction de la ligne de terre, ou, ce qui revient au même, celle des lignes de rappel. Les deux projections d'un point, a et a', sont sur une même ligne de rappel, *à une distance supposée invariable*, ceci est essentiel. Supposons (fig. 1) le point A, projeté en a et a', invariable dans l'espace tandis que les plans de projection se déplacent parallèlement à eux-mêmes; la somme de sa cote et de son éloignement est constante et égale à aa'. Si donc le plan horizontal H s'abaisse de x pour venir en H_1, le plan vertical V devra se rapporter de la même quantité x pour venir en V_1; par suite la ligne de terre O viendra en O_1; elle décrira un plan incliné

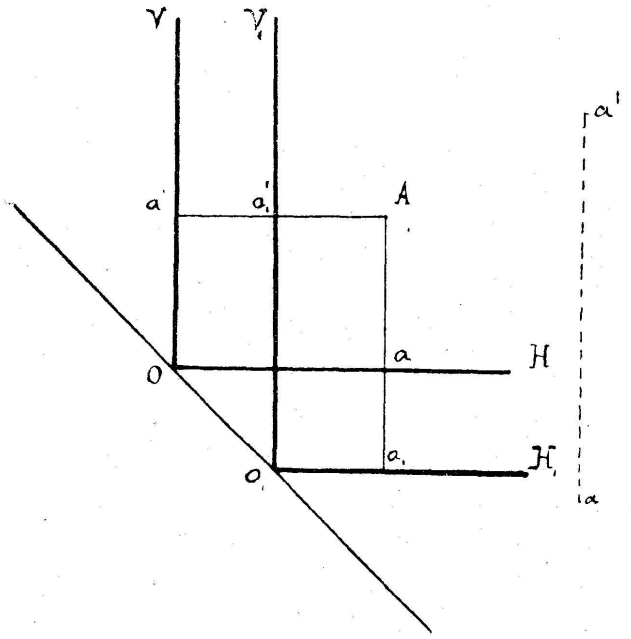

Fig. 1.

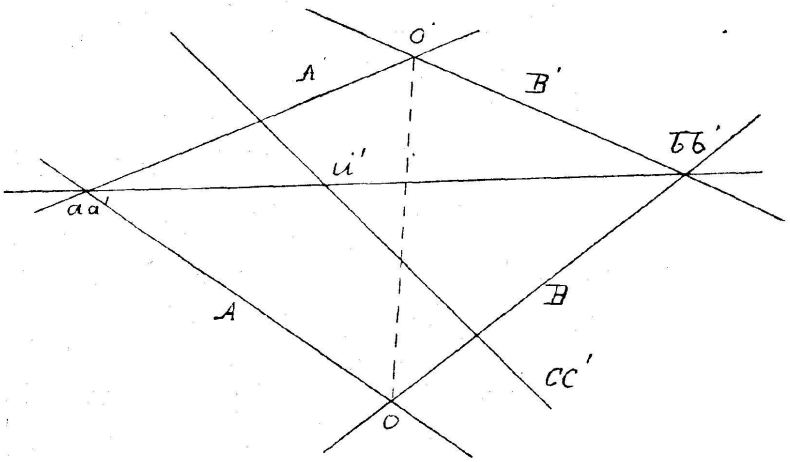

Fig. 2.

de 45 degrés sur H, V, H_1, V_1 : c'est le SECOND BISSECTEUR du dièdre (HV) aussi bien que du dièdre (H_1V_1), IL EST FIXE. On peut encore démontrer l'invariabilité du second bissecteur de la façon suivante, très simple, mais moins claire : quelle que soit la position de la ligne de terre, si la distance aa' est nulle, le point A est dans le second bissecteur et ce plan est donc fixe. Ainsi, dans une figure aussi simple que celle de l'épure du point A, le second bissecteur existe, tout en n'étant représenté par aucune ligne; et son usage sera commode et économique (au point de vue graphique) dans bien des cas.

Avant d'y insister, remarquons que la différence entre ce système et celui proposé par le colonel Mannheim, où la distance aa' n'intervient pas, est plus apparente que réelle. Dans la pratique

(Mannheim), on fait souvent diverses projections verticales, afférentes à diverses parties, ou morceaux, de la même projection horizontale, afin de pouvoir tracer l'épure sur une aire de dimensions restreintes; on ne tient donc compte que des cotes relatives des points dans chacune de ces projections, et non pas de leurs cotes réelles. Tel est par exemple le cas des épures d'escaliers. Cela n'empêche que dans chacune de ces épures partielles, les distances des deux projections d'un certain groupement de points sont invariables, une fois le tracé commencé, de sorte que l'on revient au cas que nous étudions. Le second bissecteur sera-t-il pratique à employer? J'avoue n'en rien savoir; mais ce qui est certain, c'est que si l'habitude est prise de se passer de ligne de

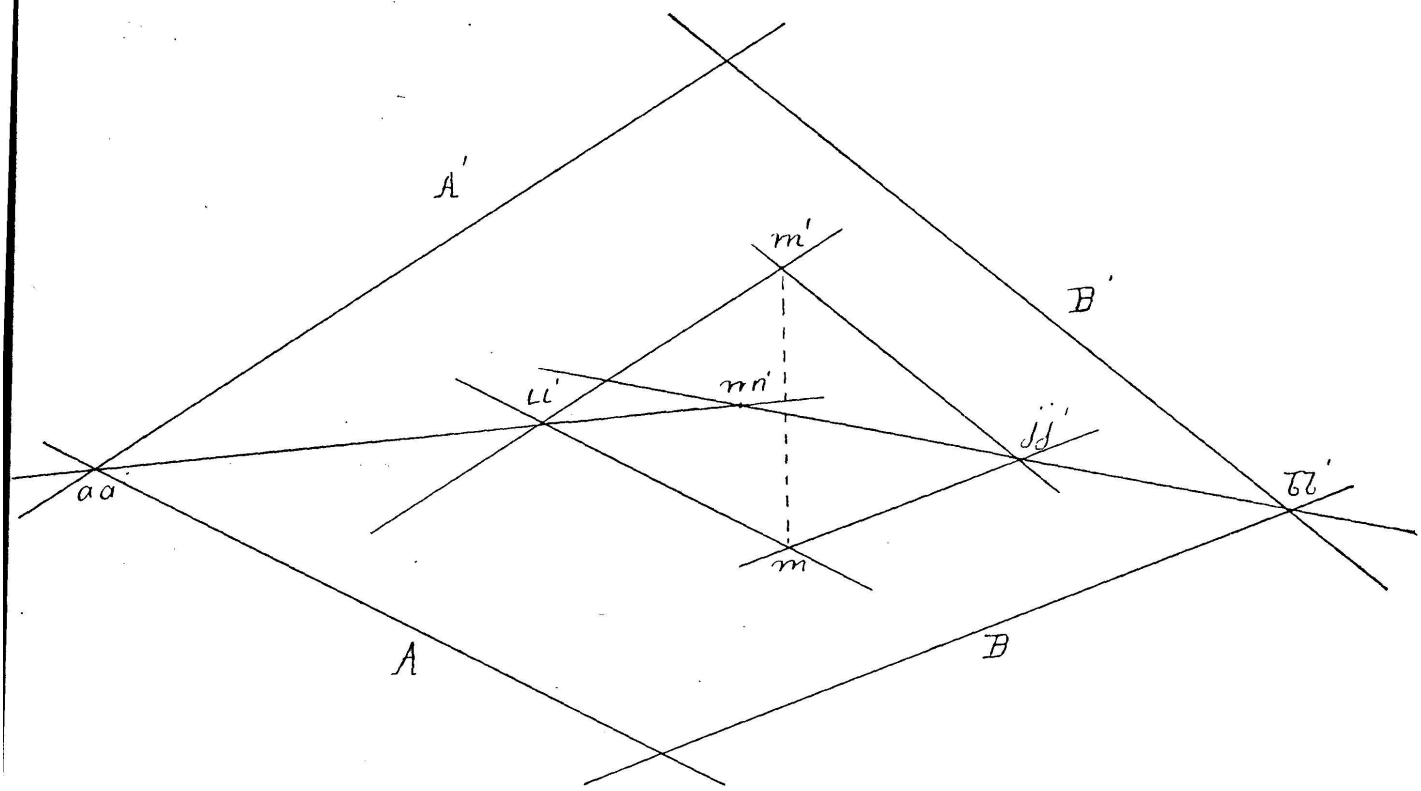

Fig. 3.

terre et des traces, on ne pourra éprouver aucune difficulté dans une épure d'arts industriels. Un excès de connaissances théoriques ne nuit peut-être pas à l'exécution d'un travail concret, en vue duquel l'enseignement ne doit pas être d'ailleurs uniquement dirigé.

De la remarque fondamentale qui précède résultent tout de suite les faits suivants :

1° Une droite étant donnée par ses deux projections AA′ (fig. 2), le point où elle rencontre le second bissecteur est le point *aa′* où se coupent ses deux projections.

Un plan étant donné par deux droites AA′ et BB′ se coupant en

OO′, sa *trace* sur le second bissecteur est la droite ab, $a'b'$, à projections confondues.

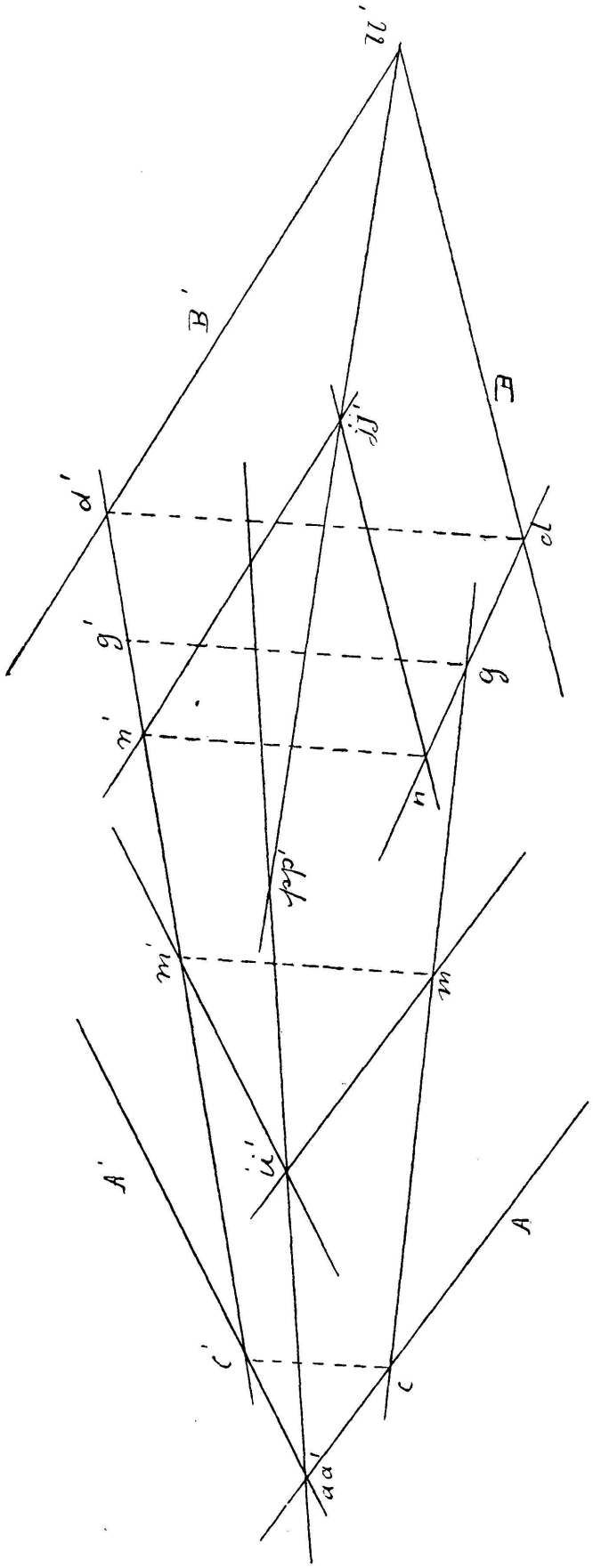

Fig. 4.

Si on donne une droite CC′ du second bissecteur, elle coupe le plan précédent au point ii', intersection de ab avec C.

2° Si un plan est donné par une droite AA′ et un point mm' (fig. 3), sa trace sur le second bissecteur passe par aa' ; pour en avoir un second point, on peut mener une seconde droite du plan en joignant mm' à un point quelconque de AA′. Choisissons le point à l'infini de AA′, c'est-à-dire menons par mm' la parallèle mi, $m'i'$ à AA′ ; nous obtenons le second point cherché ii' en traçant seulement 2 droites ; il en eût fallu 3 (ligne de rappel en plus) en prenant sur AA′ un point quelconque.

3° Soient (fig. 3) deux plans contenant respectivement les droites AA′ et BB′ et ayant mm' comme point commun. Pour trouver un second point de l'intersection je mène par mm', dans chacun d'eux, la parallèle à la droite connue ; les traces de ces plans sur le bissecteur sont ai et bj, se coupant en nn'. Au total, 6 droites de

second construction. En employant l'un des classiques plans auxiliaires (debout, vertical, horizontal, ou de front), il en eût fallu 11.

Remarque. — D'une façon générale, lorsqu'un plan est donné par une droite et un point, il est avantageux d'employer la parallèle menée par le point à la droite comme seconde droite du plan.

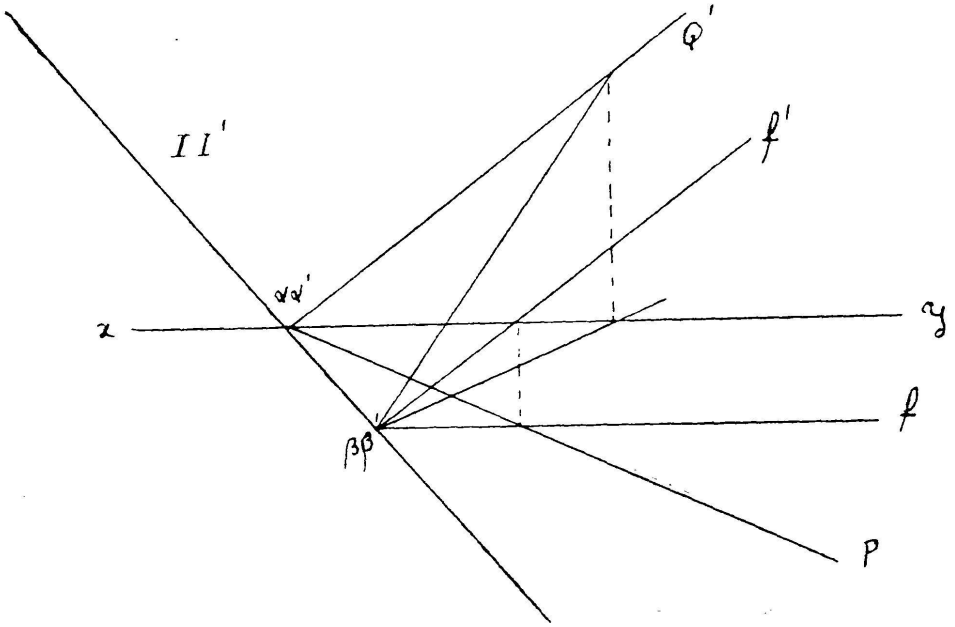

Fig. 5.

Exception si la droite donnée est de profil ou parallèle à la ligne de terre (on peut employer cette expression la ligne de terre n'étant pas figurée, puisque sa direction est connue). Je signalerai plus loin une autre exception très particulière.

4° Si les deux plans (fig. 4) sont donnés chacun par une droite

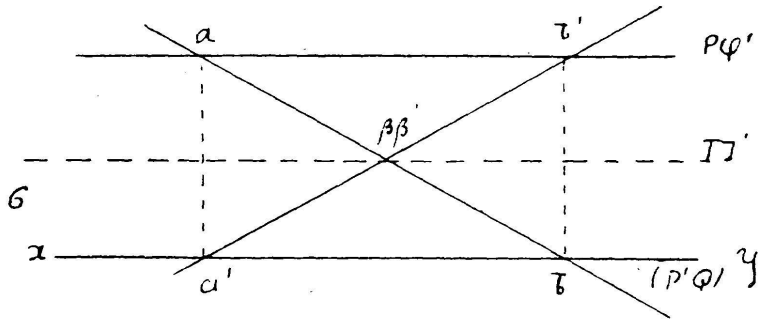

Fig. 6.

et un point, AA' et *mm'* le premier ; BB' et *nn'* le second, la même construction s'applique pour trouver un point de l'intersection *pp'* : 6 droites à tracer. Il en faudrait 9 en employant un plan horizontal ou de front, mais 6 seulement avec le plan debout projetant *m'n'* qui donne le point *qq'*, ou le plan vertical projetant

mn. Le second bissecteur n'est, dans ce cas, ni plus ni moins avantageux. Il faudra tracer au moins 3 nouvelles droites pour trouver un second point d'intersection.

Si les plans sont donnés chacun par deux droites parallèles, AA′ *mi*, *m′i′*, et BB′ *nj*, *n′j′*, il ne faudra que deux droites pour obtenir un point *pp′* de l'intersection en utilisant le second bissecteur; 4 au moins en employant un autre plan (un plan projetant l'une des droites données). On obtiendra un second point de l'intersection en coupant par un tel plan ; 3 droites de construction seulement en utilisant les traces sur le second bissecteur, au lieu de 4 (voir exemple 6).

5° Lorsqu'un plan (fig. 5) est donné par ses traces PQ′ (P′ et Q étant confondues avec la ligne de terre), le point $\alpha\alpha'$ où elles coupen *xy* est un point de l'intersection du plan avec le second

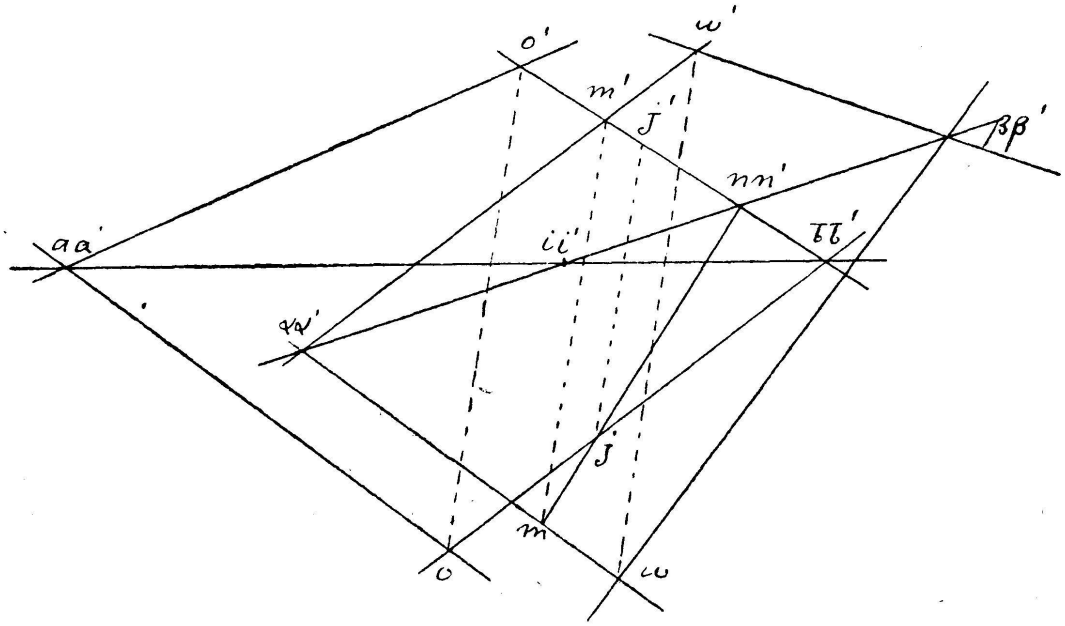

Fig. 7.

bissecteur. Pour en avoir un second, il suffit de tracer dans ce plan une droite quelconque, par exemple la frontale *ff′* (3 droites); le point $\beta\beta'$ est le point cherché.

Si le plan est parallèle à *xy*, comme dans la figure 6 où P et Q′ sont confondues (plan parallèle au 1er bissecteur), c'est une droite quelconque *ab*, *a′b′* qu'on tracera pour obtenir le point $\beta\beta'$, le point $\alpha\alpha'$ étant à l'infini sur *xy*. On voit que II′ est équidistant de P et *xy*.

Dans tous les cas, il est donc très facile d'obtenir la trace d'un plan sur le second bissecteur, et il est souvent avantageux de s'en servir. Pour ne pas trop multiplier les exemples, je me bornerai à citer en dernier lieu une élégante construction devenue classique :

6. Trouver l'intersection de deux plans donnés chacun par 2 droites, en ne traçant que 5 lignes de construction (fig. 7).

Soient oa, $o'a'$; ob, $o'b'$ - $\omega\alpha$, $\omega'\alpha'$; $\omega\beta$, $\omega'\beta'$, les droites qui définissent les deux plans. Leurs traces sur le second bissecteur se rencontrent en un point de leur intersection ii'. Coupons maintenant par le plan projetant l'une des droites, $o'b'$, sur le plan vertical, par exemple. Il rencontre la droite $\omega\alpha$, $\omega'\alpha'$ en $m'm$, et la droite $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ en nn' : mn est donc la projection horizontale de l'intersection du plan de bout auxiliaire $o'b'$ avec le second plan $(\alpha\omega\beta)$. mn rencontre ob en j, rappelé en j', second point de l'intersection cherchée, qui est ij, $i'j'$. 5 droites seulement ont été tracées. Si le point oo' ou $\omega\omega'$ sont séparément ou simultanément à l'infini, la solution est la même, comme il a déjà été dit (exemple 4).

La représentation canonique du plan.

Toutes les représentations du plan actuellement employées exigent au minimum le tracé de 3 droites sur l'épure. Si on donne le plan par deux droites qui se coupent (à distance finie), la figure

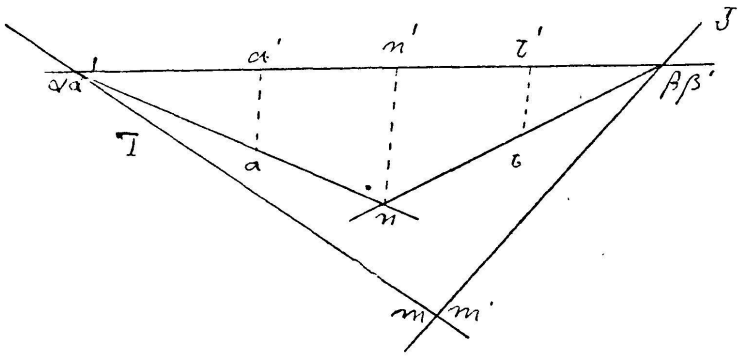

Fig. 8.

formée par les 2 projections se compose de 5 droites; si les droites du plan sont parallèles, il y en a 4; si l'on donne les traces, 3 droites suffisent (P, Q', xy). Il n'y a également que 3 droites sur la figure si l'on donne le plan par une droite et un point, ou par 3 points (lignes de rappel).

Monge, qui considérait les deux plans fixes de projection comme indispensables, adoptait la représentation du plan par ses traces de façon systématique. Le paragraphe précédent a essayé de mettre en lumière l'importance du second bissecteur, qui est, lui, FIXE PAR DÉFINITION pour ainsi dire, dans une épure donnée avec ou sans ligne de terre. Son emploi nécessite tout d'abord la recherche des traces sur le second bissecteur des plans de la figure, de même qu'Hachette cherchait pour commencer les traces horizontale et verticale d'un plan donné d'une façon quelconque.

Les problèmes seraient donc simplifiés d'autant, si les plans étaient donnés au moyen de leur trace sur le second bissecteur

et d'un autre élément. Et si ce second élément est un point aa', la figure ne présentera que 2 droites (fig. 8) : la *trace* II' ou I pour abréger, et la ligne de rappel aa'. C'est en quelque sorte l'*épure canonique* du plan.

Si l'on a besoin d'une seconde droite du plan, il suffit de joindre aa' à un point quelconque $\alpha\alpha'$ de sa trace. Il n'y a pas avantage, dans ce cas, à mener par (A) la parallèle à I, puisque la ligne de rappel $\alpha\alpha'$ étant supprimée, on n'économise aucune droite (voir remarque du 2e paragraphe).

Lorsque les projections verticales a' de *tous* les points du plan sont sur I, le plan est de bout ; si I est perpendiculaire aux lignes de rappel, il est horizontal.

Si les projections horizontales a de *tous* les points du plan sont sur I, le plan est vertical, — et en particulier de front si I est parallèle à la direction de la ligne de terre.

Si I est parallèle aux lignes de rappel et contient toutes les projections a, a', des points du plan, il est de profil.

Ces plans se reconnaissent donc comme dans la figuration habituelle.

Si I est parallèle à la ligne de terre, sans autre condition, le plan considéré est parallèle à la ligne de terre. Si (fig. 9) les pro-

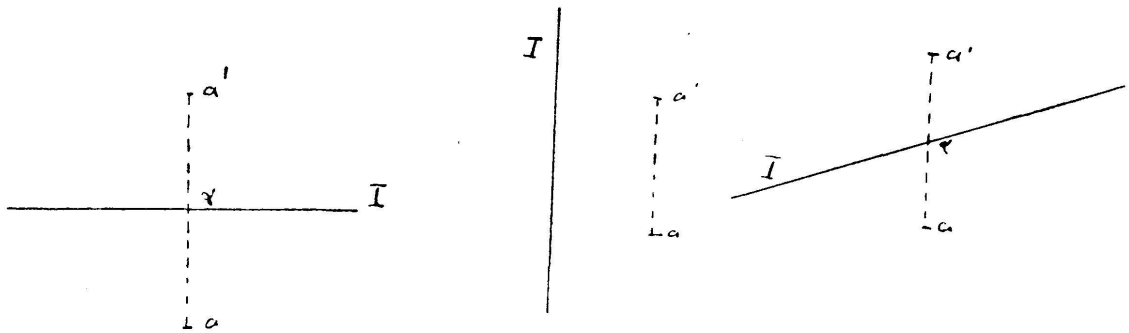

Fig. 9*a*. Fig. 9*b*.

jections de tous les points sont respectivement symétriques par rapport à I, le plan est parallèle au 1er bissecteur (2e paragraphe, exemple 5). Si I est de profil, ou parallèle aux lignes de rappel, sans autre condition, le plan considéré est perpendiculaire au premier bissecteur.

On reconnaîtra sans peine que dans un plan perpendiculaire au second bissecteur, la trace I est un *diamètre* des lignes de rappel, c'est-à-dire divise en deux parties égales la distance aa' des deux projections de tout point du plan. Enfin, les plans parallèles au second bissecteur seront caractérisés par ce fait que I est à l'infini, et que les projections horizontale et verticale de toute droite du plan sont parallèles.

Rien n'est donc plus simple que de distinguer au moyen de

l'*épure canonique* les plans remarquables, parallèles ou perpendiculaires aux plans de projection ou aux bissecteurs. Indiquons maintenant quelques exemples des deux problèmes fondamentaux.

Intersection de deux plans. — Si les deux plans (fig. 8) sont

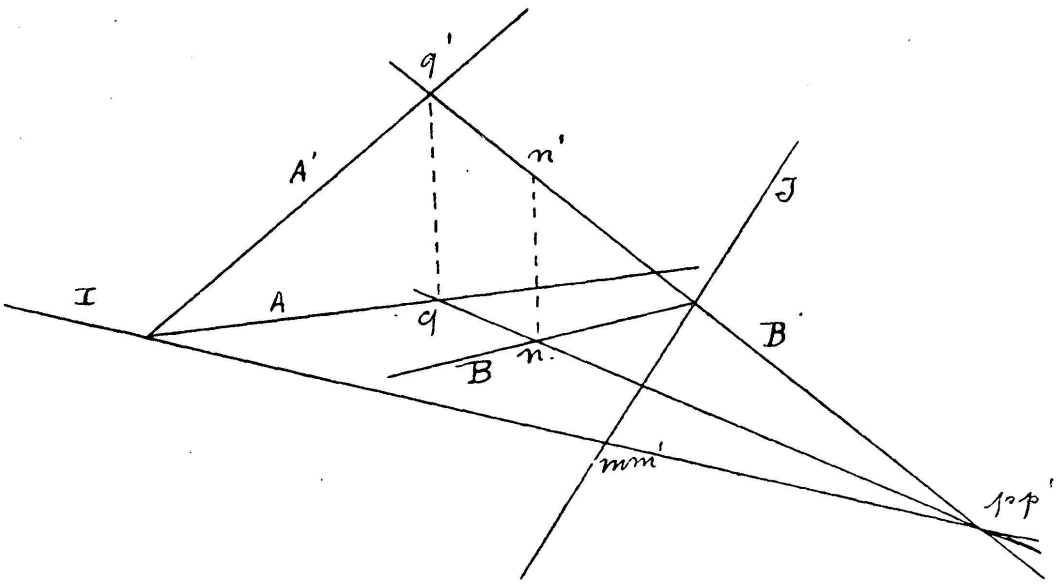

Fig. 10.

donnés par leurs traces I, J, et un point commun nn', l'intersection a pour projection nm, $n'm'$, mm' étant le point d'intersection de I et J.

Si les deux plans sont définis chacun par leurs traces et un

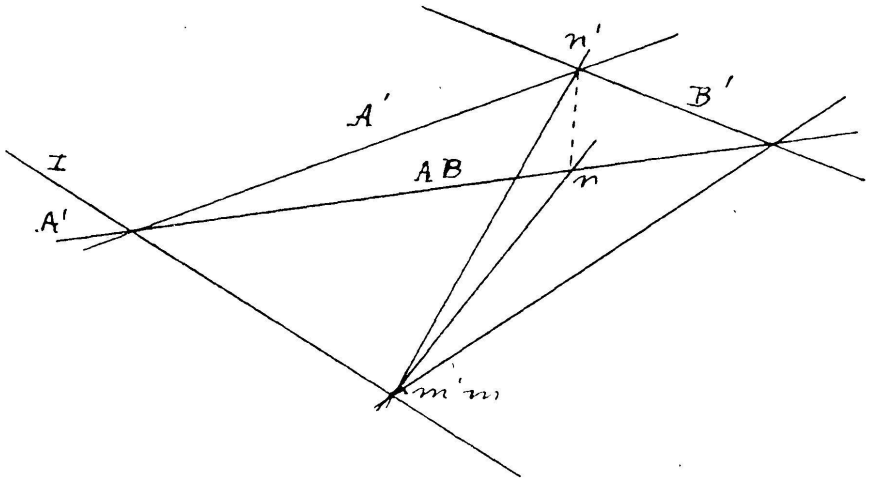

Fig. 11.

point, Iaa', Jbb', en coupant par le plan de bout $a'b'$, on obtient un point de l'intersection nn' au moyen de 4 droites de construction. Si le point mm' d'intersection des traces est en dehors de l'épure, on aura un second point en coupant par le plan vertical ab, ce qui exigera encore le tracé de 4 droites. Au cas où ces

droites ne donneraient pas de constructions praticables, en égard aux données, il sera toujours facile de tracer dans les plans de nouvelles droites sur lesquelles on pourra opérer.

Si chaque plan est donné (fig. 10) par une droite et sa trace, IAA′, JBB′, en coupant par le plan projetant l'une d'elles, le plan de bout B′ par exemple, on a dans le premier plan la droite pq, $p'q'$ qui rencontre BB′ en nn'; on obtient ce point d'intersection par 3 droites seulement. Cette intersection est mn, $m'n'$.

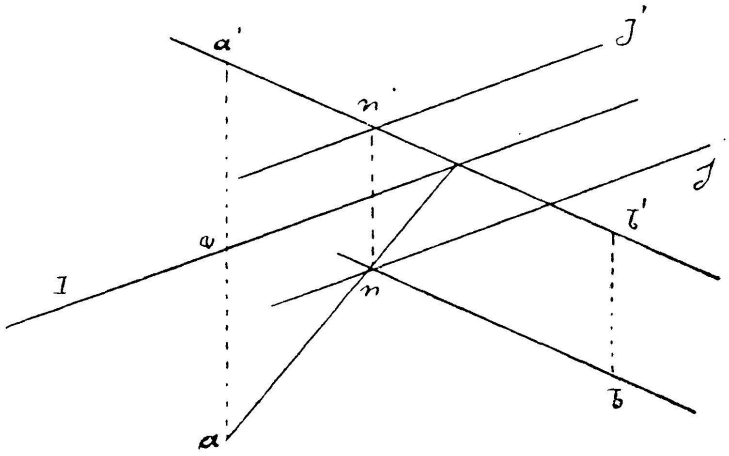

Fig. 12.

Mais si les droites A et B sont dans un même plan de front, vertical, horizontal ou de bout (fig. 11), on aura l'intersection en traçant *une seule* droite de construction, la ligne de rappel $n'n$. Ce cas est comparable au cas classique où les plans sont donnés par leurs traces se rencontrant dans l'épure, et où l'on obtient l'intersection par 2 droites de construction.

Soit (fig. 12) un plan Iaa' perpendiculaire au second bissecteur

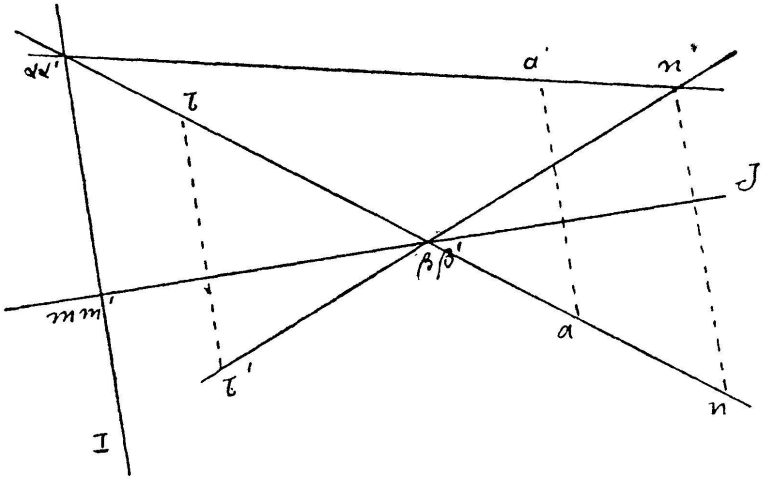

Fig. 13.

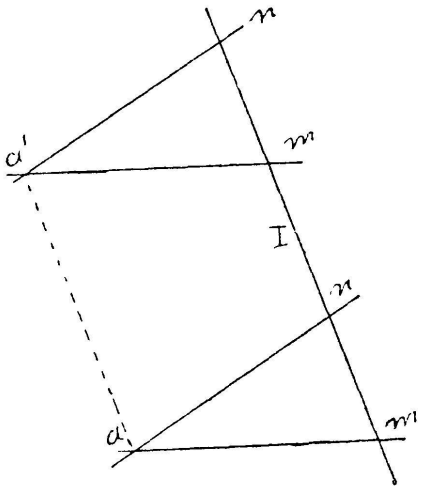

Fig. 14.

($\alpha a = \alpha a'$), et un plan parallèle au second bissecteur passant par bb'. On obtient un point nn' de leur intersection au moyen du plan de bout $a'b'$ par exemple. Le point mm' est à l'infini sur I; l'intersection nj, $n'j'$ des deux plans est donc parallèle à I et ses projections sont équidistantes de I (4 droites de construction).

Soit (fig. 13) un plan perpendiculaire au premier bissecteur Iaa'

et un plan parallèle à la ligne de terre Jbb'. Le plan vertical aq les coupe suivant deux droites dont les projections verticales sont $\alpha'a'$ et $b'\beta'$ se rencontrant en nn' ; d'où l'intersection cherchée mn, $m'n'$ (4 droites).

Soit (fig. 14) un plan de profil I et un plan parallèle au second bissecteur passant par aa' ; $n'n$ est un point de leur intersection, an étant parallèle à $a'n'$; et de même $m'm'$. Il n'y a aucune droite à tracer pour les trouver ; il suffit de porter sur I des longueurs $mm' = nn' = aa'$.

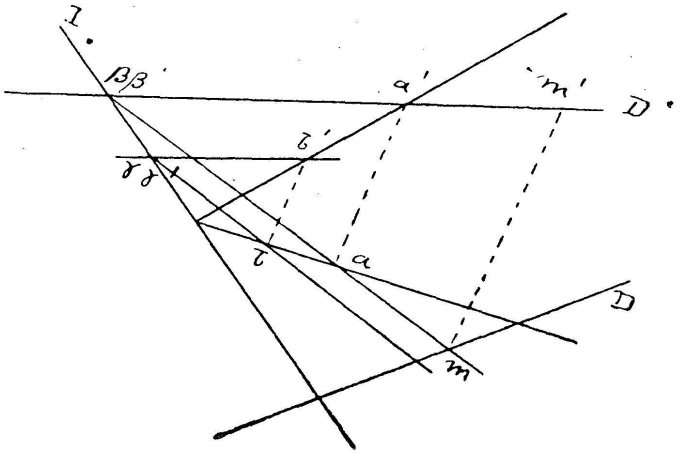

Fig. 15.

Les exemples qui précèdent sont suffisants, je pense, pour montrer que cette manière de figurer le plan n'introduit aucune difficulté nouvelle et conduit à des tracés d'une extrême simplicité et d'une réelle économie graphique.

Intersection d'une droite et d'un plan. — Le plan étant donné (fig. 15) par sa trace et une droite l, $a'\alpha'$, $a\alpha$, et la droite par ses

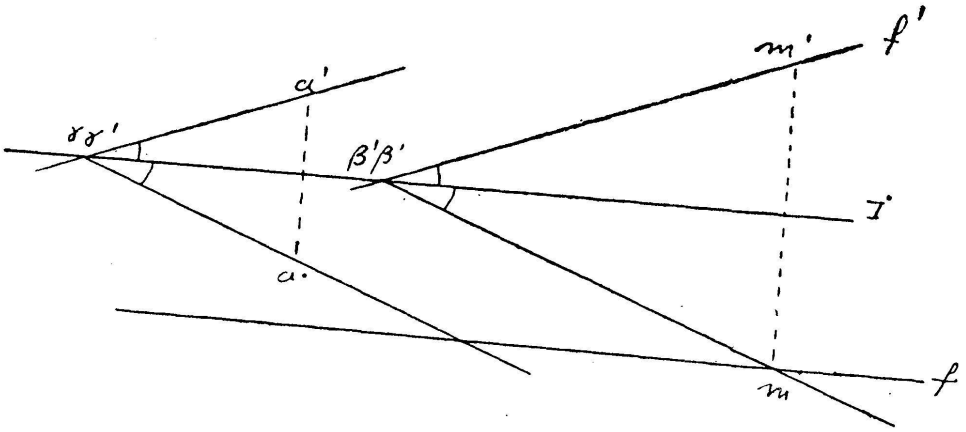

Fig. 16.

projections DD', le plan de bout D' coupe le plan donné suivant la droite $\beta'a'$, βa, rencontrant D en m, d'où m' sur D'. 3 droites de construction.

Si le plan est donné par sa trace I et un point bb', il faut commencer par y tracer une droite pour être ramené au cas précédent ; on aura donc 5 droites de construction. Mais il est possible de n'en tracer que 4 en opérant comme suit. Choisissons comme droite du plan la droite $b\gamma$, $b'\gamma'$, dont une projection, verticale

par exemple, est parallèle à la projection de même nom D′ de la droite donnée. Le plan de bout D′ coupe I en $\beta\beta'$ et $b\gamma$, $b'\gamma'$ à l'infini ; βm est donc parallèle à $b\gamma$ et coupe DD′ au point cherché mm'.

Soit (fig. 16) laa' un plan parallèle au premier bissecteur ($\alpha a = \alpha a'$) et une droite de front ff'. Le plan de bout f' coupe I en $\beta\beta'$ et à l'infini la droite du plan $a\gamma$, $a'\gamma'$ dont la projection verticale $a'\gamma'$ serait parallèle à f'. La parallèle βm à $a\gamma$ (c'est-à-dire la symétrique de $\beta f'$ par rapport à I) rencontre f en m, d'où m' ; mm' est le point d'intersection cherché (2 droites).

Soit encore (fig. 17) un plan Iaa' parallèle à la ligne de terre et une droite de profil pq, $p'q'$ définie par deux points. Nous pou-

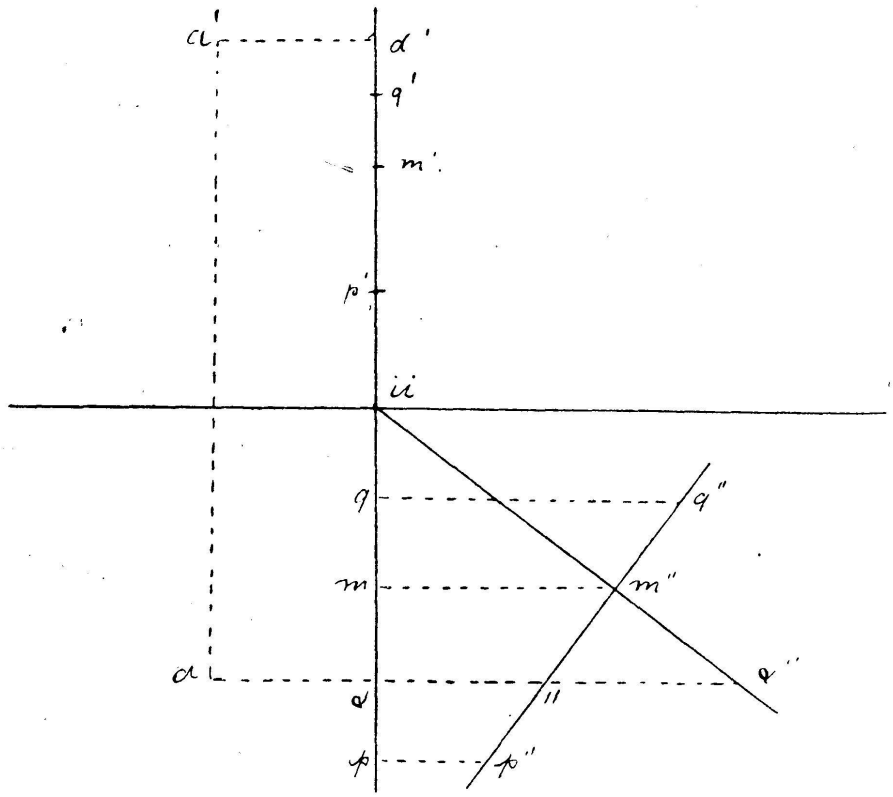

Fig. 17.

vons couper par le plan de profil contenant pq ; il rencontre I en ii' et la parallèle $a\alpha$, $a'\alpha'$ menée par aa' à I en $\alpha\alpha'$; $i\alpha$, $i'\alpha'$ est l'intersection du plan donné et du plan de profil. Rabattons ce dernier sur le plan horizontal passant par I (ou changeons de plan vertical en prenant pq pour ligne de terre et mesurant les cotes à partir de I) ; sur des parallèles à I, nous portons $a\alpha'' = i'\alpha'$, $pp'' = i'p'$, $qq'' = i'q'$; les rabattements $i\alpha''$ et $p''q''$ se coupent en m'' projeté horizontalement en m et verticalement en m' : $i'm' = mm''$. mm' est le point cherché.

On peut (fig. 18) éviter le rabattement ou changement de place en faisant passer par pq, $p'q'$ un plan quelconque défini par les

droites parallèles pr, $p'r'$ et qs, $q's'$; sa trace sur le second bissecteur est rs, $r's'$ qui coupe l en tt'. Le plan de bout $p'r'$, par exemple, coupe la droite $a'p'\alpha'$, $a\alpha$ en b, et l en c, donc le plan donné suivant bc, qui rencontre pr en v. La droite tv coupe enfin

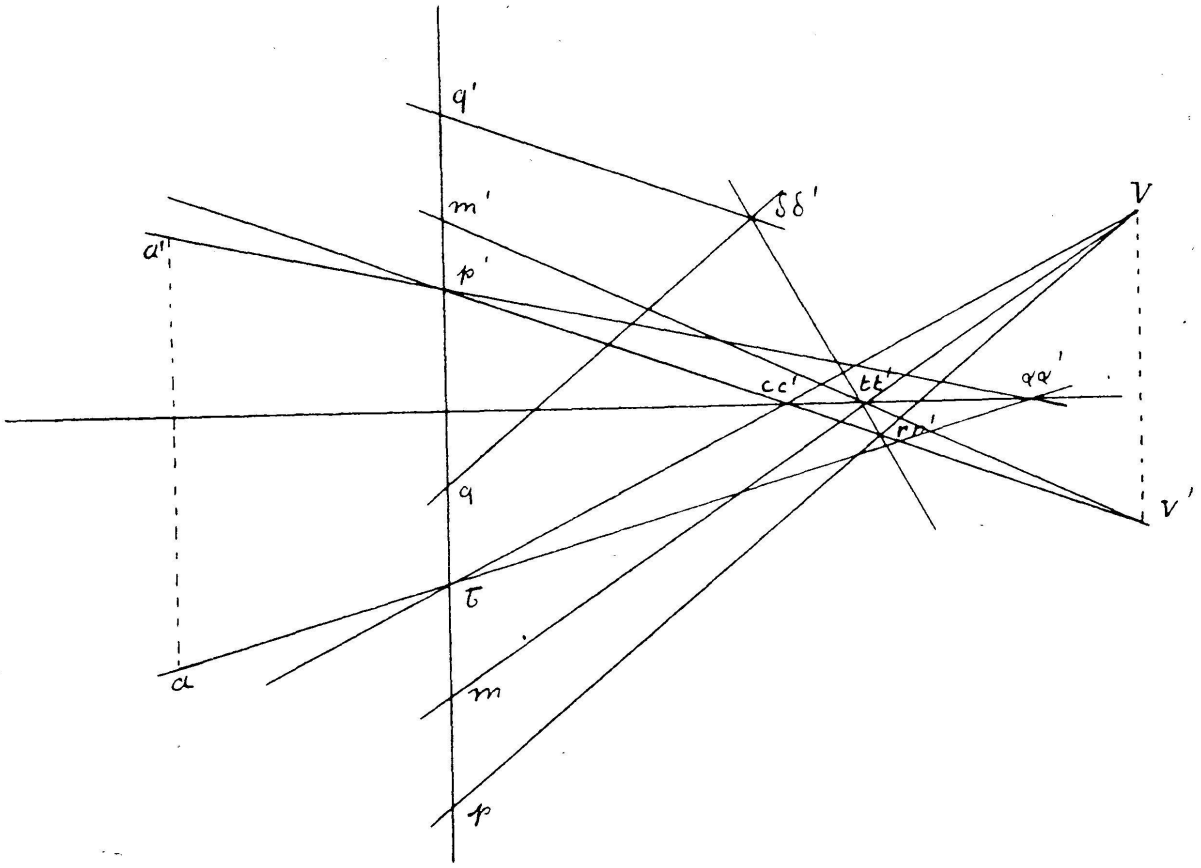

Fig. 18.

pq au point m cherché. v étant rappelé verticalement en v' sur $p'r'$, $t'v'$ rencontre $p'q'$ en m', projection verticale de m.

Je me bornerai à ces exemples déjà trop nombreux pour aborder une remarque qui me paraît intéressante.

Comparaison avec le trait de perspective.

On a pris l'habitude, en France, de représenter les points A de l'espace (fig. 19), en perspective conique, par leurs perspectives a' sur le tableau T (ou plan vertical), et les perspectives a sur le même tableau de leurs projections orthogonales α sur un plan G perpendiculaire à T, dit plan horizontal ou géométral. Le plan T étant celui de l'épure, celle-ci se compose, comme en géométrie descriptive ordinaire, des deux perspectives aa' situées sur une même ligne de rappel. Dans un grand nombre de questions uniquement descriptives, la ligne de terre xy, intersection de G et T,

la ligne d'horizon, les points de fuite et de distance sont inutiles; nous ne voulons parler que de ces questions.

Les points A et O étant fixes, si l'on transporte le tableau ou le géométral parallèlement à lui-même, les perspectives a et a' changent, et il en est de même de leur distance relative aa', à moins de lier les amplitudes des deux translations par une relation assez compliquée. Si le point A est dans le géométral, $A\alpha = O$, a et a' sont confondus, et réciproquement. Ainsi, tout point dont les deux perspectives sont confondues est dans le plan horizontal. Il est bien certain que si l'on fait subir au géométral une translation, le point A n'y reste pas, et ses perspectives se séparent. Mais si l'on considère une droite AB projetée en $\alpha\beta$ sur

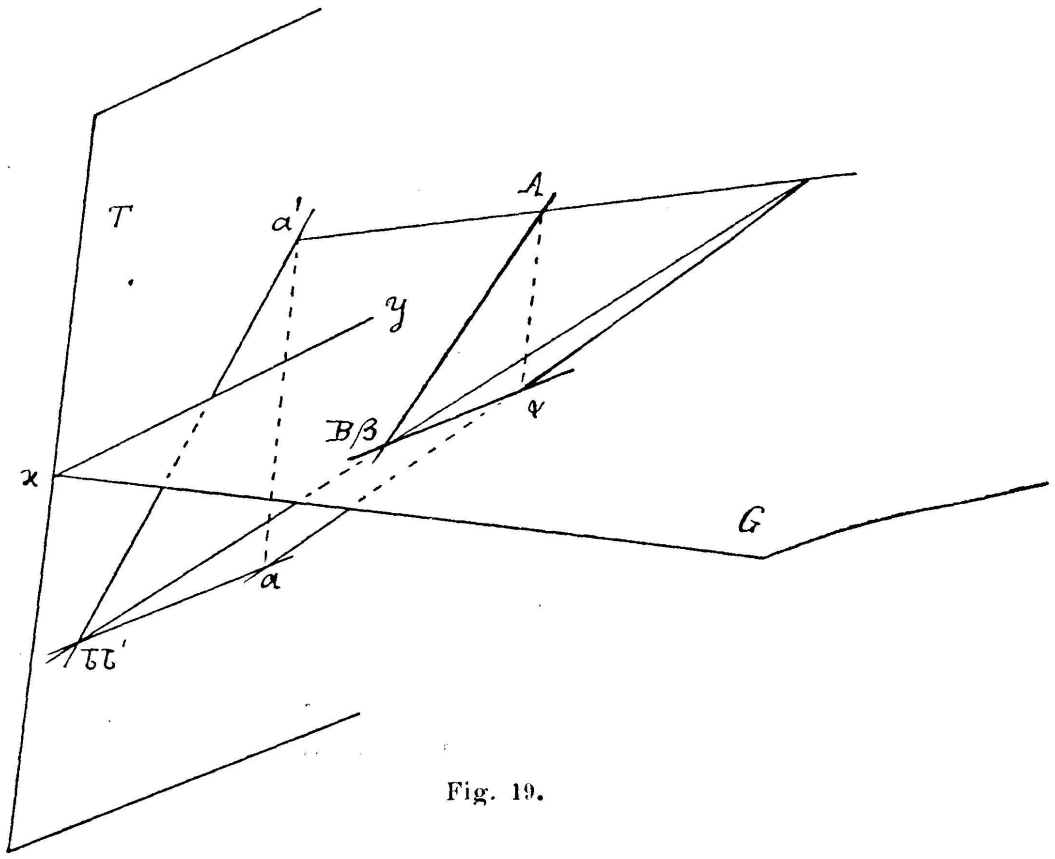

Fig. 19.

le géométral, ses deux perspectives $a'b'$ et ab se rencontrent en bb', perspective de sa trace $B\beta$ sur G. Changeons le géométral; la trace $B\beta$ va changer, mais la perspective de la nouvelle trace jouira de la même propriété. Ainsi donc, si l'on connaît (fig. 2) *les deux perspectives* A' et A d'une droite (nous parlons ainsi pour abréger), la trace horizontale de cette droite a pour perspective leur intersection aa', *sans que le géométral et l'œil soient autrement définis*. Si donc un plan est défini en perspective par deux droites AA' et BB' concourantes en OO' (c'est-à-dire dans l'espace concourantes ou parallèles — sauf le cas où elles seraient parallèles entre elles

et parallèles au tableau), on obtient sa trace horizontale ab, $a'b'$ sans aucune construction et sans connaître d'autres éléments.

Tout plan peut alors être défini par la perspective de sa trace horizontale I et les perspectives d'un de ses points aa', aussi bien que par ses traces sur le géométral et sur le tableau, comme on le fait fréquemment; c'est la représentation canonique du plan en perspective. Il est dès lors évident que les tracés précédents s'appliquent en perspective, en prenant la précaution de remplacer le second bissecteur par le géométral, et de considérer comme plans projetants ceux qui passent par le point de vue O. On ne parlera que plus tard des horizontales, réservant les notions de point de fuite et de ligne d'horizon. Au contraire, les frontales, parallèles à T, ne donnent lieu à aucune restriction.

Exemples. — 1° Intersection de deux plans Iaa' et Jbb' (fig. 8).

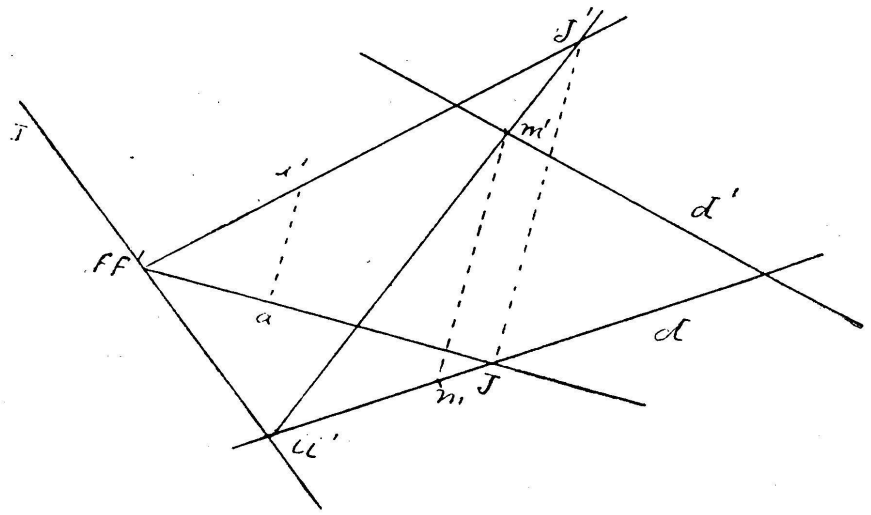

Fig. 20.

En coupant par le plan OAB projetant sur le tableau la droite AB, on obtient dans chacun des plans les droites dont les perspectives des projections sur le géométral sont $a\alpha$, $b\beta$, se rencontrant en n, d'où n' ; l'intersection a pour perspectives mn, $m'n'$.

2° Intersection de la droite dd' et du plan Iaa' (fig. 20) ; voir aussi fig. 15). Dans ce plan, je trace une droite, par exemple la frontale af, $a'f'$; le plan Oδ projetant la projection δ de la droite D sur le géométral coupe le plan donné suivant ij, $i'j'$, rencontrant la droite en mm', point cherché.

Lorsqu'on définira un plan au moyen de sa trace sur le géométral et d'une frontale, comme on vient de le faire, ou de sa trace sur le tableau (ce qui revient à dire que la ligne de terre xy est confondue avec la perspective de la projection horizontale de la frontale), définition classique, les élèves qui auront pris l'habitude des tracés précédents n'auront, me semble-t-il, aucun effort à faire pour se mettre au courant des tracés de la perspective (fig. 5) :

— une droite du plan IQ′ sera ab, $a'b'$;
— une frontale, bf, $b'f'$,
exactement comme en descriptive, I étant censément la trace du plan sur le second bissecteur. J'ajoute que sur une telle figure en perspective, on *voit* véritablement les plans, les droites dans l'espace; on les voit tout aussi bien en descriptive, malgré la déformation résultant de l'emploi du second bissecteur.

Il faudra ensuite apprendre la représentation des horizontales, l'usage des points de fuite et des points de distance. Mais les élèves ne seront pas déroutés dès le début, comme cela arrive aujourd'hui pour les notions élémentaires de perspective qui figurent aux programmes des Grandes Ecoles, notions qu'ils connaissent d'habitude très mal — ce qui ne répond pas au but que s'était proposé la Commission au moment de cette innovation.

L'emploi du second bissecteur et de la représentation du plan que j'ai signalée me paraît donc être utile parce que :

1° il donne dans un grand nombre de questions des tracés plus simples que ceux habituellement employés, et en tous cas, jamais plus compliqués ;

2° il établit une liaison entre le trait de la géométrie descriptive et le trait de la perspective.

Cependant, je dois dire en terminant que figurer *toujours* les plans à l'aide de leurs traces sur le second bissecteur me semblerait une grosse erreur. Ce serait revenir, sous une autre forme, au cadre étroit de Monge, avec tous les inconvénients de l'exclusivité, quelle qu'elle soit. Ce nouveau mode de représentation doit simplement être employé avec les autres, et au même titre qu'eux, de façon à varier les exercices et à bien faire comprendre les principes tellement simples de la géométrie descriptive.

Ch. Halphen (Paris).