

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1914)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PROBLEME DES TRAJECTOIRES EN COORDONNÉES TANGENTIELLES
Autor: Turrière, Emile
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-15542>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LE PROBLÈME DES TRAJECTOIRES EN COORDONNÉES TANGENTIELLES

Dans un travail récemment publié par M. TEIXEIRA, dans ses *Annales*¹, j'ai été amené, à l'occasion de recherches sur les courbes algébrico-intersecentes, à résoudre un problème particulier de trajectoires orthogonales d'une infinité de cercles, par une méthode tangentielle; je pense que c'est là le premier exemple d'application de cette méthode au problème des trajectoires. Dès la lecture de mon travail, M. Maurice d'OCAGNE a bien voulu, dans une lettre en date du 8 février 1914, attirer mon attention sur un certain nombre de points et me signaler l'intérêt que pourrait offrir une étude plus approfondie de la question. Aussi vais-je reprendre celle-ci sous un point de vue beaucoup plus général et essayer de présenter sous une forme précise les principes de l'application des tangentielles au problème des trajectoires de courbes planes.

1. — Soit donc

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - \varpi = 0$$

l'équation par rapport à deux axes rectangulaires (Ox, Oy), de la tangente, en un point courant M , à une courbe (C) ; soit de même

$$x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1 - \varpi_1 = 0$$

l'équation, par rapport aux mêmes axes, de la tangente, au même point M , à une courbe (C_1) , supposée orthogonale à la courbe (C) en ce point M . Pour exprimer l'orthogonalité, il suffit de poser tout d'abord

$$(1) \quad \varphi_1 = \varphi + \frac{\pi}{2},$$

puis d'écrire que les coordonnées cartésiennes x et y du point M de la courbe (C) sont respectivement égales aux coordonnées x et

¹ Sur une généralisation algébrico-intersecente de la tractrice (Extrait d'une lettre adressée, le 26 mai 1913, à M. F. Gomes-Teixeira), *Annaes da Academia Polytechnica do Porto*, Publicados sob a direcção de F. Gomes Teixeira, t. VIII, 1913.

y du même point, considéré comme appartenant à la courbe (C_1) . Des expressions générales des coordonnées ponctuelles, dans la représentation tangentielle de HESSE, il résulte que l'on doit poser :

$$x = \varpi \cos \varphi - \frac{d\varpi}{d\varphi} \sin \varphi = -\varpi_1 \sin \varphi - \frac{d\varpi_1}{d\varphi_1} \cos \varphi ,$$

$$y = \varpi \sin \varphi + \frac{d\varpi}{d\varphi} \cos \varphi = \varpi_1 \cos \varphi - \frac{d\varpi_1}{d\varphi_1} \sin \varphi ,$$

c'est-à-dire :

$$\cos \varphi \left(\varpi + \frac{d\varpi_1}{d\varphi_1} \right) = \sin \varphi \left(\frac{d\varpi}{d\varphi} - \varpi_1 \right) ,$$

$$\sin \varphi \left(\varpi + \frac{d\varpi_1}{d\varphi_1} \right) = \cos \varphi \left(\varpi_1 - \frac{d\varpi}{d\varphi} \right) ;$$

il vient donc finalement :

$$(2) \quad \varpi_1 = \frac{d\varpi}{d\varphi} , \quad \frac{d\varpi_1}{d\varphi_1} = -\varpi .$$

Ces résultats étaient à prévoir, puisque ϖ_1 est la distance du pôle O à la normale de (C) et $\frac{d\varpi_1}{d\varphi_1}$ la distance du pôle à la tangente de (C) . La méthode de pur calcul, que j'ai exposée, présente l'avantage de supprimer toute hésitation relative aux signes à prendre devant ces distances, que l'on sait être égales en valeurs absolues.

Les trois formules (1) et (2) vont permettre de traiter la question posée. Mais avant d'aller plus loin, il convient de faire une vérification importante. En appliquant, en effet, à la courbe (C_1) les formules (1) et (2), on a :

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} = \varphi + \pi$$

$$\varpi_2 = \frac{d\varpi_1}{d\varphi_1} = -\varpi , \quad \frac{d\varpi_2}{d\varphi_2} = -\varpi_1 = -\frac{d\varpi}{d\varphi} ,$$

d'où

$$x \cos \varphi_2 + y \sin \varphi_2 - \varpi_2 \equiv - (x \cos \varphi + y \sin \varphi - \varpi) ,$$

$$-x \sin \varphi_2 + y \cos \varphi_2 - \frac{d\varpi_2}{d\varphi_2} \equiv - \left(-x \sin \varphi + y \cos \varphi - \frac{d\varpi}{d\varphi} \right) ;$$

ce qui prouve bien que toute courbe orthogonale à (C_1) en M est bien tangente à (C) .

2. — Cela étant, je considère une famille de courbes planes C : ,
soit

$$f\left(\varpi, \frac{d\varpi}{dz}, z\right) = 0$$

l'équation différentielle du premier ordre définissant ou caractérisant ces courbes C . Dans ces conditions, l'équation différentielle des trajectoires orthogonales C_1 des courbes C sera :

$$f\left(-\frac{d\varpi_1}{dz_1}, \varpi_1, z_1 - \frac{\pi}{2}\right) = 0 .$$

Plus généralement, dans le cas des trajectoires obliques, sous l'angle V , on devrait poser :

$$\begin{cases} z_1 = z + V , \\ \varpi_1 = \varpi \cos V + \frac{d\varpi}{dz} \sin V , \\ \frac{d\varpi_1}{dz_1} = -\varpi \sin V + \frac{d\varpi}{dz} \cos V , \end{cases}$$

formules qui permettraient de déduire sans difficulté l'équation différentielle des trajectoires de celle des courbes imposées.

La méthode pourrait cesser de s'appliquer dans le cas où les courbes C sont des droites, puisque cette méthode est tangentielle. Mais dans ce cas, on se trouve en présence des diverses développantes d'une courbe donnée, s'il s'agit du problème des trajectoires orthogonales. Si ϖ_0 et g_0 sont les éléments qui caractérisent la droite, c'est-à-dire encore la développée imposée, les formules

$$\begin{cases} \Phi = z_0 \pm \frac{\pi}{2} , \\ \Pi = \int \varpi_0 dz_0 + \text{const} , \end{cases}$$

résolvent, on le sait, le problème des développantes. Dans le cas des trajectoires obliques, on se trouve en présence d'un problème qui se rattache à la théorie des développées des courbes planes : c'est le problème inverse de celui des développées. On est amené au système d'équations

$$\begin{cases} z_0 \mp V = \Phi \\ \Pi \cos V + \frac{d\Pi}{d\Phi} \sin V = \varpi_0 , \end{cases}$$

dont la seconde est du premier ordre, linéaire et à coefficients

constants; son intégration donne l'équation des développantes généralisées cherchées

$$\sin V \cdot \Pi = e^{-\Phi \cotg V} \times \left(A + \int \varpi_0(\Phi + V) \times e^{\Phi \cotg V} d\Phi \right)$$

en fonction d'une constante arbitraire A.

Pour illustrer les considérations générales qui précèdent, je vais prendre l'étude d'une question d'apparence purement théorique et qui est pourtant susceptible de réalisation pratique. Elle est due à M. H. BROCARD.

3. — Les cisailles de tôle se composent de deux branches dont l'une, rectiligne, est fixe et dont l'autre, curviligne, est mobile autour d'un point fixe O. On suppose que la partie mobile, qui doit trancher le métal, est assujettie à rencontrer la branche rectiligne sous un angle constant. Théoriquement, une spirale logarithmique, tournant autour de son pôle, représente la courbe désirée. Pour plus de généralité, on doit supposer que l'axe de rotation est en dehors de la ligne droite fixe et alors la courbe devient un peu plus compliquée. C'est là précisément l'objet de la question posée par M. H. BROCARD (*Nouvelle Correspondance mathématique*, 1877, question n° 308, résolue en 1879, p. 54-55 par BOMBLED) : *Trouver une courbe qui, tournant autour d'un point fixe O, rencontre une droite fixe sous un angle constant*. La courbe a été définie par BOMBLED comme trajectoire oblique des tangentes à une courbe fixe et représentée par l'équation (à une rotation près autour du pôle)

$$\theta = m \cdot \log [\sqrt{r^2 - 1} - m] + \arccos \frac{1}{r}$$

en coordonnées polaires; O est le pôle; la droite fixe est l'axe polaire, le cercle fixe ayant l'unité pour rayon.

On peut définir le même problème comme un cas particulier de celui du problème inverse des développoïdes, que je considère ici : la courbe désirée, généralisation de la développante de cercle, est la courbe la plus générale qui admet un cercle pour développoïde particulière¹.

En appliquant la méthode générale que je viens d'indiquer quelques lignes plus haut, il vient pour $\varpi_0 = 1$:

$$\Pi = \frac{1}{\cos V} + B \cdot e^{-\Phi \cotg V}; \quad (B = \text{const})$$

et sous cette forme, on reconnaît que la *partie mobile de la cisaille*

¹ H. BOUASSE et E. TURRIÈRE, Exercices et compléments de Mathématiques générales, Paris, 1912, p. 352-353.

doit avoir pour profil une courbe parallèle à une spirale logarithmique, propriété dont il est aisé de se rendre compte géométriquement.

4. — Reprenons le cas général des trajectoires, orthogonales par exemple. Il est souvent avantageux de procéder de la manière suivante. La famille donnée de courbes (C) est supposée représentée par une équation

$$(3) \quad F(\varpi, \varphi, \lambda) = 0,$$

dans laquelle figure le paramètre λ . Par dérivation en φ , il vient :

$$(4) \quad \frac{\partial F}{\partial \varpi} \frac{d\varpi}{d\varphi} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0.$$

Dans ces équations (3) et (4), substituons les éléments de la courbe orthogonale (C_1), définis par les équations (1) et (2); on obtient :

$$(5) \quad \left\{ F\left(-\frac{d\varpi_1}{d\varphi_1}, \varphi_1 - \frac{\pi}{2}, \lambda\right) = 0, \right.$$

$$(6) \quad \left. \varpi_1 \frac{\partial F}{\partial \varpi} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0; \right.$$

dans ces deux dernières équations, $\frac{d\varpi_1}{d\varphi_1}$, qui n'est point la dérivée de la fonction ϖ , est la valeur que prend en M cette dérivée. En d'autres termes, il faut actuellement considérer λ comme une certaine fonction de φ_1 . Posons, pour abréger :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{\partial F}{\partial \varpi}, \quad F_2 = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}, \quad F_3 = \frac{\partial F}{\partial \lambda}; \\ F_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial \varpi^2}, \quad \text{etc.} \dots; \end{array} \right.$$

il vient :

$$F = 0, \quad \varpi_1 F_1 + F_2 = 0,$$

et par dérivation :

$$-\frac{d^2 \varpi_1}{d\varphi_1^2} F_1 + F_2 + \frac{d\lambda}{d\varphi_1} F_3 = 0,$$

$$\frac{d\varpi_1}{d\varphi_1} F_1 + \varpi_1 \left[-\frac{d^2 \varpi_1}{d\varphi_1^2} F_{11} + F_{12} + \frac{d\lambda}{d\varphi_1} F_{13} \right]$$

$$- \frac{d^2 \varpi_1}{d\varphi_1^2} F_{12} + F_{22} + \frac{d\lambda}{d\varphi_1} F_{23} = 0.$$

Éliminons alors $\frac{d^2\varpi_1}{d\varphi_1^2}$ entre ces deux dernières équations. Puis, entre l'équation obtenue et les équations (5) et (6), éliminons ϖ , et $\frac{d\varpi_1}{d\varphi_1}$. Le résultant est une équation différentielle du premier ordre entre $\frac{d\lambda}{d\varphi_1}$, λ et φ_1 .

Soit alors λ une intégrale particulière de cette équation différentielle. Après substitution de l'expression de λ en fonction de φ , dans l'équation (5), on obtient une relation entre $\frac{d\varpi_1}{d\varphi_1}$ et λ . *C'est précisément la représentation analytique de la développée de la trajectoire orthogonale* (C_1) particulière qui correspond à cette intégrale λ .

Portant enfin cette même expression de λ et celle de $\frac{d\varpi_1}{d\varphi_1}$, déduite de (5), dans l'équation (6), on obtient la fonction ϖ_1 de φ_1 , caractéristique de la trajectoire (C_1), elle-même.

Les calculs qui précèdent se simplifient considérablement dans le cas où le faisceau imposé (C_1) est défini par une équation résolue en ϖ :

$$\varpi = f(\varphi_1, \lambda) ,$$

on a alors

$$\varpi_1 = \frac{\partial f}{\partial \varphi} , \quad \frac{d\varpi_1}{d\varphi_1} = - f' ;$$

d'où l'équation différentielle :

$$\frac{d\lambda}{d\varphi_1} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_1 \partial \lambda} \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}, \lambda \right) + f \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}, \lambda \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_1^2} \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}, \lambda \right) = 0 .$$

Je vais appliquer cette méthode à l'étude des trajectoires orthogonales des familles de cercles, en commençant naturellement par le cas, tout particulièrement intéressant des cercles ayant leurs centres sur une ligne droite.

5. — *Trajectoires orthogonales d'une famille de cercles ayant leurs centres sur une ligne droite.* Soit

$$\varpi = R + \lambda \cos \varphi ,$$

l'équation polaire tangentielle d'un cercle de rayon R et de centre

$\alpha = \lambda$, situé sur l'axe Ox . Les formules générales deviennent alors :

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{\pi}{2}, \quad \varpi_1 = \frac{d\varpi}{d\varphi} = -\lambda \sin \varphi = \lambda \cos \varphi_1,$$

$$\frac{d^2\varpi_1}{d\varphi_1^2} = -\varpi = -R - \lambda \cos \varphi = -R - \lambda \sin \varphi_1 :$$

on devra avoir :

$$\frac{d\lambda}{d\varphi_1} \cos \varphi_1 = -R$$

condition qui donne :

$$\log \tan \left(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = - \int \frac{d\lambda}{R} + \text{const} ;$$

cette formule, associée à

$$\varpi_1 = \lambda \cos \varphi_1,$$

définit la courbe trajectoire générale désirée. La méthode qui précède n'est pas distincte de celle des coordonnées axiales de M. Maurice d'OCAGNE : λ et φ_1 sont précisément les coordonnées axiales de la trajectoire.

En prenant R constant, on retrouve ainsi l'équation de la trachée d'Huygens :

$$\varpi_1 = A \cos \varphi_1 - R \cos \varphi_1 \log \tan \left(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) :$$

la constante arbitraire A peut être réduite à 0 par un changement convenable d'axe Oy .

Pour $R = \lambda$, on retrouve les trajectoires orthogonales des cercles homothétiques à un cercle fixe. D'une manière générale, en prenant pour R un polynôme quelconque en λ à zéros distincts, on aura une trajectoire générale algébrique-interscendante ; si tous les zéros de ce polynôme R sont réels, la trajectoire sera soit algébrique soit interscendante proprement dite ; s'il y a au moins un couple de zéros imaginaires conjugués, on se trouvera en présence de trajectoires transcendentes qui pourront être considérées comme des courbes interscendantes par généralisation complexe. Si, enfin, le polynôme R admet une racine multiple, les trajectoires correspondantes seront des courbes transcendentes, associables, au titre de courbes transcendentes singulières limites, à la famille algébrique-interscendante considérée. On voit donc qu'il sera possible de constituer ainsi des familles algébrique-interscendantes complètes de courbes trajectoires orthogonales de cercles.

Un autre cas particulier présentant de l'intérêt est celui des cercles bitangents à une conique. R est alors la racine carrée d'un polynôme du second degré en λ .

6. — M. Maurice d'OCAGNE m'a signalé cette propriété très simple des trajectoires orthogonales des cercles homothétiques : *Le centre de courbure de la trajectoire orthogonale en M au cercle de centre T est situé sur la perpendiculaire menée de T au rayon vecteur OM ; ou encore : si une droite issue de O coupe l'un des cercles en M et en M', les deux trajectoires orthogonales, en ces deux points, ont pour centre de courbure commun le pôle de la droite OMM' par rapport au cercle.*

Cette propriété bien curieuse est caractéristique de la famille considérée de cercles. Le pôle de OM par rapport au cercle

$$\varpi = R + \lambda \cos \varphi ,$$

est situé sur la tangente M et sur la polaire de O, droites qui ont pour équations respectives :

$$\begin{cases} X \cos \varphi + Y \sin \varphi = \varpi \\ \lambda X = \lambda^2 - R^2 ; \end{cases}$$

les coordonnées de ce pôle sont donc :

$$X = \lambda - \frac{R^2}{\lambda} \quad Y = \frac{R}{\sin \varphi} + \frac{R^2}{\lambda} \cotang \varphi ;$$

l'équation

$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi = \frac{\partial \varpi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varpi}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\varphi} = -\lambda \sin \varphi + \frac{R}{\sin \varphi} \left(\frac{dR}{d\lambda} + \cos \varphi \right) ,$$

représente d'autre part la perpendiculaire, au centre de courbure, à la normale de la trajectoire ; la distance δ du pôle de OMM' et du centre de courbure est donc :

$$\delta = -X \sin \varphi + Y \cos \varphi + \lambda \sin \varphi - \frac{R}{\sin \varphi} \left(\frac{dR}{d\lambda} + \cos \varphi \right)$$

c'est-à-dire en substituant à x et y leurs expressions précédemment trouvées :

$$\delta = \frac{R}{\sin \varphi} \left(\frac{R}{\lambda} - \frac{dR}{d\lambda} \right) ;$$

ces deux points seront confondus pour $\delta = 0$; ce qui donne : $\frac{R}{\lambda} = \text{const.}$

7. — *Trajectoires orthogonales d'une famille quelconque de cercles.* Le rayon R et les deux coordonnées a et b du centre C

d'un des cercles (C) sont des fonctions d'un paramètre λ ; le lieu des centres est une courbe (Γ). L'équation tangentielle du cercle quelconque (C) étant

$$\varpi = R + a \cos \varphi + b \sin \varphi ,$$

on aura :

$$\varpi_1 = -a \sin \varphi + b \cos \varphi = a \cos \varphi_1 + b \sin \varphi_1 ,$$

$$\frac{d\varpi_1}{d\varphi_1} = -R - a \cos \varphi - b \sin \varphi = -R - a \sin \varphi_1 + b \cos \varphi_1 ;$$

d'où résulte l'équation différentielle entre λ et φ_1 :

$$\frac{da}{d\lambda} \cos \varphi_1 + \frac{db}{d\lambda} \sin \varphi_1 + R \frac{d\varphi_1}{d\lambda} = 0 .$$

Pour réduire celle-ci à une forme plus simple, il suffit de représenter la courbe (Γ), qui n'est point une ligne droite, par une équation tangentielle. On posera :

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = p$$

c'est-à-dire

$$a = p \cos \alpha - p' \sin \alpha , \quad \frac{da}{d\alpha} = -p \sin \alpha ,$$

$$b = p \sin \alpha + p' \cos \alpha , \quad \frac{db}{d\alpha} = p \cos \alpha ;$$

ρ est le rayon de courbure :

$$\rho = p + \frac{d^2 p}{d\alpha^2} ;$$

on prendra enfin $\lambda = \alpha$. L'équation différentielle prend, dans ces conditions, la forme :

$$\frac{d\varphi_1}{d\alpha} + \frac{\rho}{R} \sin(\varphi_1 - \alpha) = 0 .$$

On peut encore, conformément à la théorie générale des trajectoires de cercles, transformer l'équation différentielle précédente en une équation de Riccati, en prenant pour fonction inconnue $\tan \frac{\varphi_1}{2}$.

P.-S. — La propriété, reliant la spirale d'Archimède et la cycloïde ordinaire, que j'avais signalée dans mes deux notes de l'Enseignement mathématique (*Application d'une transformation de M. BROCARD à la construction de certaines courbes transcen-*

dantes, mai 1913, t. XV, p. 234-238; *Sur la construction des courbes transcendantes planes dont les équations sont à coordonnées séparées*, janvier 1914, t. XVI, p. 31-37) avait été remarquée par M. Maurice d'OCAGNE; il l'avait signalée sous la forme suivante : « Si, sur le rayon vecteur OM d'une courbe (M) rapportée à l'axe polaire OX, on construit un losange ayant un côté OP dirigé suivant OX, le côté NP opposé à OM a pour enveloppe une courbe (M'). Lorsque la courbe (M) est une spirale d'Archimède, tangente à OX en son pôle O, la courbe (M') est une cycloïde dont O est un sommet et qui est tangente en ce point à l'axe OX. »

Puisque l'occasion s'en présente, j'ajouterai quelques lignes concernant un article de M. Gino LORIA et un extrait de lettre de M. Maurice d'OCAGNE publiés dans l'*Enseignement Mathématique* (1912, t. XIV, p. 104 et 218). Il s'agit de l'*application des coordonnées tangentielles au rayon de courbure d'une courbe plane*.

Antérieurement à MM. d'OCAGNE et LORIA, des recherches autour de cette question et la formule de la courbure, en coordonnées tangentielles, avaient été l'objet de travaux de L. PAINVIN : *Courbure d'une courbe plane donnée par son équation tangentielle* (Bulletin des Sciences Mathématiques, t. 3, 1872, p. 174-190); *Courbures en un point d'une surface définie par son équation tangentielle* (Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Paris, le 2 octobre 1871 et publié au Journal de mathématiques pures et appliquées de Liouville, 2^e série, 1872, t. XVII).

Le 12 février 1914.

Emile TURRIÈRE (Montpellier).

CHRONIQUE

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

La guerre européenne porte un coup sensible aux institutions internationales. Dans les pays belligérants et dans les pays neutres voisins tout ce que la nation compte d'hommes valides est sous les drapeaux. Il devient donc matériellement impossible de continuer les travaux faisant appel à de nombreux collaborateurs. Les œuvres de paix telles que la nôtre passent à l'arrière plan. D'ailleurs, poursuivant un idéal commun librement choisi, elles exigent une volonté d'union qu'on ne saurait demander aux savants dans une période aussi troublée que celle que nous traversons.