

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 16 (1914)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR L'ORTHOGONALISATION DE FONCTIONS  
**Autor:** Broggi, Ugo  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-15540>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

La somme

$$(e_2 - e_3) \sigma_1 u \sigma_1 v \sigma_1 w + (e_3 - e_1) \sigma_2 u \sigma_2 v \sigma_2 w + (e_1 - e_2) \sigma_3 u \sigma_3 v \sigma_3 w , \quad (95)$$

qui est nulle pour  $u = v = w = 0$ , le reste quand  $u + v + w = 0$  ; en outre, à cause de la parité des  $\sigma_i(u)$ , la même relation est satisfaite pour toutes les combinaisons des signes  $\pm$  dans la formule

$$u \pm v \pm w = 0 .$$

Ce résultat est conforme de tout point à l'équation bien connue dans la théorie des fonctions  $\sigma$

$$\sum (e_j - e_k) \sigma_j(u) \sigma_j(v) \sigma_j(w) = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \Pi \sigma \left( \frac{u \pm v \pm w}{2} \right) ; \quad (96)$$

il valait la peine de noter ici combien cette formule se rattache étroitement à l'équation d'Euler et aux polynômes doublement quadratiques.

C. CAILLER (Genève).

---

## SUR L'ORTHOGONALISATION DE FONCTIONS

---

1. — Considérons le système

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$$

de fonctions arbitraires et linéairement indépendantes de la variable réelle  $x$ . Exprimons pareillement par  $\psi_r$  celle parmi les expressions de forme

$$a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + \dots + a_{r-1} \varphi_{r-1} + \varphi_r ,$$

où les  $a$  sont des constantes réelles, qui rend l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} (a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + \dots + a_{r-1} \varphi_{r-1} + \varphi_r)^2 dx$$

égale à un minimum. On a évidemment (nous écrirons partout  $\int$ ) au lieu de  $\int_{x_1}^{x_2}$

$$\int \varphi_0 \psi_r dx = \int \varphi_1 \psi_r dx = \dots = \int \varphi_{r-1} \psi_r dx = 0$$

et pourtant, pour  $s < r$ , puisque  $\psi_s$  est une expression linéaire de  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_s$

$$\int \psi_r \psi_s dx = 0, \quad (s < r)$$

d'où l'on tire en général

$$\int \psi_r \psi_s dx = 0. \quad (s \neq r)$$

Les fonctions  $\psi$  sont orthogonales dans l'intervalle  $(x_1 x_2)$ , arbitrairement choisi.

En particulier, si nous posons

$$x_2 = -x_1 = 1, \quad \varphi_r = x^r$$

nous arrivons à la définition de fonctions qui ne diffèrent des fonctions sphériques que par un facteur constant. C'est un résultat connu<sup>1</sup>.

2. — M. GOURSAT<sup>2</sup> arrive à la définition de fonctions orthogonales  $\Phi_0, \Phi_1, \dots$  déduites des fonctions données  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  en posant d'abord

$$\varphi_0 = \Phi_0, \quad \bar{\varphi}_i = \varphi_i + c_i \Phi_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

la constante  $c_i$  étant déterminée de façon que

$$\int \Phi_0 \bar{\varphi}_i dx = 0.$$

<sup>1</sup> RUNGE, *Theorie und Praxis der Reihen*, Leipzig, 1904, p. 14.

<sup>2</sup> *Annales de la Faculté de Toulouse*, Tome 10, 2<sup>e</sup> série, 1908. L'auteur cite, d'après LALESCO, *Introduction à la Théorie des Equations Intégrales*, Paris 1912.

Les fonctions  $\bar{\varphi}_i$  sont orthogonales à  $\Phi_0$ . Nous définissons d'une façon analogue des fonctions  $\bar{\varphi}_i$  ( $i = 2, 3, \dots$ ) orthogonales à  $\Phi_0$  et à  $\Phi_1$

$$\Phi_1 = \bar{\varphi}_1$$

en formant les expressions

$$\bar{\varphi}_i = \bar{\varphi}_i + \gamma_i \Phi_1 \quad (i = 2, 3, \dots)$$

et en déterminant la constante  $\gamma_i$  de façon, que

$$\int \Phi_1 \bar{\varphi}_i dx = 0$$

La répétition du procédé indiqué nous donne toutes les fonctions  $\Phi_r$  telles que

$$\int \Phi_r \Phi_s dx = 0. \quad (r \neq s)$$

3. -- Nous nous proposons de démontrer que

$$\psi_r \equiv \Phi_r.$$

Il est avant tout évident, que  $\Phi_r$  est une expression de la forme

$$a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + \dots + a_{r-1} \varphi_{r-1} + \varphi_r.$$

En réalité, si nous exprimons en général par  $D_\Phi f(x)$  la transformation linéaire

$$D_\Phi f(x) = f(x) - \frac{\int f(x) \Phi(x) dx}{\int \Phi(x) \Phi(x) dx} \Phi(x),$$

et si nous posons

$$D_{\Phi_1 \Phi_2}^2 f(x) = D_{\Phi_2} [D_{\Phi_1} f(x)]; \quad D_\Phi^0 f = f,$$

nous obtenons de suite

$$\Phi_r = D_{\Phi_0 \Phi_1 \dots \Phi_{r-1}}^r \varphi_r = \varphi_r + \text{expression linéaire de } \varphi_0, \dots \varphi_{r-1}.$$

On a avant tout

$$\int \Phi_r \varphi_0 \, dx = \int \Phi_r \Phi_0 \, dx .$$

Mais l'égalité

$$\int \Phi_r \varphi_{s-1} \, dx = 0$$

entraîne l'autre

$$\int \Phi_r \varphi_s \, dx = 0 ,$$

dès que, si l'on suppose

$$\Phi_s = \alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_{s-1} \varphi_{s-1} + \varphi_s ,$$

on a aussi

$$\begin{aligned} \int \Phi_r \Phi_s \, dx &= \alpha_0 \int \Phi_r \varphi_0 \, dx + \alpha_1 \int \Phi_r \varphi_1 \, dx + \dots \\ \alpha_{s-1} \int \Phi_r \varphi_{s-1} \, dx + \int \Phi_r \varphi_s \, dx &= \int \Phi_r \varphi_s \, dx = 0 . \quad (s < r) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\int \Phi_r \varphi_0 \, dx = \int \Phi_r \varphi_1 \, dx = \dots = \int \Phi_r \varphi_{r-1} \, dx = 0 .$$

Ce sont les équations qui découlent du problème de minimum

$$\int (\alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_{r-1} \varphi_{r-1} + \varphi_r)^2 \, dx = \text{minimum}$$

formulé au commencement et qui définissent la fonction  $\psi_r$ .

(Février 1914).

Ugo BROGGI (Buenos-Aires).