Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 16 (1914)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE LEÇON D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE SUR LES POLYNOMES

BIQUADRATIQUES ET DOUBLEMENT QUADRATIQUES

Autor: Cailler, C.

Kapitel: V. — Les Intégrales elliptiques.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15539

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

V. — Les Intégrales elliptiques.

14. — Les résultats précédents s'appliquent immédiatement aux intégrales elliptiques de première espèce. Convenablement interprétés ils contiennent la théorie complète de la réduction de ces intégrales à la forme normale de Weierstrass sans aucune résolution d'équations de degré supérieur; en outre, et du même coup, ils conduisent au théorème d'addition des intégrales elliptiques. Cette fusion en une seule formule de deux théories qui sembleraient de prime abord être bien éloignées l'une de l'autre est des plus remarquables; elle découle tout naturellement des théorèmes concernant les équations doublement quadratiques.

Soit F un polynôme doublement quadratique que je suppose d'abord non symétrique

$$F = X_{2}y^{2} + 2X_{1}y + X_{0} = Y_{2}x^{2} + 2Y_{1}x + Y_{0}.$$
 (78)

Posons F = 0, et différentions, il vient

$$(X_2 y + X_1) dy + (Y_2 x + Y_1) dx = 0 ;$$
 (78')

ou bien, à cause de $X_2y + X_1 = +\sqrt{X_1^2 - X_0X_2} = \sqrt{X}$, et $Y_2x + Y_1 = \sqrt{Y}$,

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0^{1} . ag{79}$$

Cette formule (78) donne donc une transformation algébrique d'une intégrale elliptique $\frac{dx}{\sqrt{X}}$ en une autre $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$. Pour obtenir cette transformation explicitement, il faut, X étant donné, retrouver la forme F (78), c'est-à-dire décomposer X sous la forme $X = X_1^2 - X_0 X_2$. Une semblable décomposition est possible de ∞ manières, puisque X_1 contient trois paramètres et qu'un coefficient arbitraire peut passér de X_0 à X_2 .

A chacune des décompositions ci-dessus correspond une forme F(78), partant un polynôme Z; d'après cet aperçu il semblerait que, X étant donné, il lui corresponde ∞^4 polynômes transformés Y. S'il en était ainsi, la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{X}}$ pourrait, sauf un facteur constant, se transformer par l'intermédiaire d'une équation doublement quadratique en toute autre différentielle elliptique $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$.

¹ Pour ne pas allonger, je supprime dans ce § les discussions de signe des radicaux; le lecteur fera bien d'ailleurs de leur vouer l'attention qu'elles méritent.

Mais nous savons que, en réalité, les choses se passent différemment.

Au lieu d'être quelconques les polynômes X et Y sont toujours équivalents; comme conséquence de ce fait, parmi nos ∞ ⁴ transformations de X en Y, il en existe ∞ ¹ qui transforment X en un seul et même Y. Par exemple, lorsque F est symétrique, Y ne diffère de X que par la dénomination de la variable; les dites ∞ ¹ transformations constituent l'intégrale algébrique de l'équation d'Euler (79) et correspondent au théorème d'addition, les autres ∞ ³ transformations changent X en ses équivalents.

Reprenons d'abord le cas général d'une transformation nonsymétrique F = 0, et supposons donnés les polynômes X, Y aux invariants communs g_2 , g_3 .

Il existe ∞ formes F dont les discriminants D_y et D_x coïncident respectivement avec X et Y; nous avons appris à construire toutes ces formes à la page (), et nous avons vu qu'il s'y introduit un troisième polynôme arbitraire Z possédant en commun avec X et Y les invariants g_2 , g_3 .

Les trois discriminants de la forme F, triplement quadratique ainsi constituée sont, comme nous l'avons vu,

$$D_x = 4\Delta YZ$$
, $D_y = 4\Delta ZX$, $D_z = 4\Delta XY$. (80)

Si donc on différentie, par rapport aux trois variables, l'équation F = 0, comme on l'avait différentiée en (78') par rapport à x et à y seulement, on obtient

$$\sqrt{D_x} dx + \sqrt{D_y} dy + \sqrt{D_z} dz = 0 ,$$

ou bien

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dz}{\sqrt{Z}} = 0 . \tag{81}$$

Telle est la formule générale que nous avions en vue.

Pour l'appliquer reprenons F symétrique en x et en y; donnonsnous $X = f_{xx}$ et $Y = f_{yy}$, choisissons enfin $Z = 4z^3 - g_2z - g_3$, où g_2 et g_3 sont, comme toujours, les invariants de f_{xx} .

Dans ces conditions, l'équation F=0, s'écrit sous plusieurs formes équivalentes dont nous avons vu plus haut les principales; ce sont

$$H_{xy} + z f_{xy} - z^{2} (x - y)^{2} = 0 ,$$

$$z = \frac{f_{xy} - \sqrt{f_{xx}f_{yy}}}{2(x - y)^{2}} ,$$

$$\left(\frac{\sqrt{f_{xx}} - \sqrt{f_{yy}}}{x - y}\right)^{2} = a_{0}(x + y)^{2} + 4a_{1}(x + y) + 4(a_{2} + z) .$$
(82)

Toutes ces formules donnent lieu à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{Vf_{xx}} + \frac{dy}{Vf_{yy}} = -\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}.$$
 (83)

Si en premier lieu, on suppose que dans le système (82), z représente une constante arbitraire, dz est nul; dans cette hypothèse, le système (82) nous met en possession de l'intégrale générale de l'équation d'Euler, comme on le voit dans l'équation (83) dont le second membre est nul d'après l'hypothèse. Je n'ai pas à exposer ici par quelles transformations faciles, on en conclut le théorème d'addition des fonctions elliptiques.

Si, en second lieu, nous donnons dans (82) à la lettre y la signification d'un paramètre constant, l'équation différentielle devient, quelle que soit la valeur de cette indéterminée,

$$\frac{dx}{\sqrt{I_{xx}}} = -\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}; (84)$$

dans cette acception, le système (82) opère la réduction d'une différentielle elliptique quelconque $\frac{dx}{\sqrt{f_{xx}}}$ à la forme normale de

Weierstrass
$$\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}$$
.

Faisons enfin x = y, la première formule (82), donne la relation entre x et z sous la forme

$$z = -\frac{H_{xx}}{f_{xx}} , \qquad (85)$$

équivalente, d'après (83), à l'équation différentielle

$$\frac{2dx}{\sqrt{f_{xx}}} = -\frac{dz}{\sqrt{4z^2 - g_2 z - g_3}}.$$
 (86)

C'est la formule de duplication obtenue, pour la première fois, par M. Hermite. Par son moyen, le même problème de la réduction à la forme de Weierstrass se trouve résolu rationnellement. Le procédé usuel, pour démontrer cette formule remarquable, consiste à la déduire des équations générales (43) et (44) relatives au polynôme du 4^{me} degré; ce procédé a le défaut de laisser dans l'ombre la parenté qui unit la transformation (85) avec le théorème d'addition.

Supposons toujours donnée la forme f_{xx} , faisons-lui correspondre un argument elliptique u tel que

$$pu = -\frac{H_{xx}}{f_{xx}}, \qquad p'u = -\frac{T_{xx}}{f_{xx}^{3/2}},$$
 (87)

qui donnent, comme on vient de voir

$$\frac{2dx}{\sqrt{f_{xx}}} = -du . ag{88}$$

Soient de même v et w des arguments elliptiques correspondant à f_{yy} ét à ${\bf Z}$; on a donc

$$pv = -\frac{H_{yy}}{f_{yy}}, \quad p'v = -\frac{T_{yy}}{f_{yy}^{3/2}}, \quad \frac{2dy}{\sqrt{f_{yy}}} = -dv, \quad (89)$$

$$pw = -\frac{K}{Z}$$
, $p'w = -\frac{U}{Z^{3/2}}$, $\frac{2dz}{\sqrt{Z}} = -dw$. (90)

De ces formules (87) à (90), nous tirons

$$pu - e_i = -\frac{H_{xx}' + e_i f_{xx}}{f_{xx}} = \frac{l_i^2}{4f_{xx}}, \text{ donc } \sqrt{pu - e_i} = \frac{l_i}{2\sqrt{f_{xx}}};$$
 (91)

on a ainsi

$$\sqrt{pu - e_i} = \frac{l_i}{2\sqrt{I_{xx}}}, \quad \sqrt{pv - e_i} = \frac{m_i}{2\sqrt{f_{yy}}}, \quad \sqrt{pw - e_i} = \frac{n_i}{2\sqrt{Z}}. \quad (92)$$

Portons ces valeurs dans l'équation doublement quadratique G=0, écrite sous sa forme trilinéaire (64), ainsi que dans l'équation différentielle correspondante (83), nous obtenons le théorème suivant;

Si trois arguments elliptiques u, v, w sont liés par la condition

$$\sum (e_j - e_k) \sqrt{(pu - e_i)(pv - e_i)(pw - e_i)} = 0 , \qquad (93)$$

on a aussi

$$d(u + v + w) = 0 , \quad \text{ou} \quad u + v + w = \text{const.}$$
 (94)

Remplaçons les $\sqrt{pu-e_i}$ etc... par leurs valeurs $\frac{\sigma_i(u)}{\sigma(u)}$; le théorème d'addition précédent prend un autre énoncé.

¹ T_{xx} représente ici le covariant T du tableau (A). K et U sont, de même, le Hessien et le covariant en question relatifs au polynôme $Z=4z^3-g_2z-g_3$.

La somme

$$(e_2 - e_3) \sigma_1 u \sigma_1 v \sigma_1 w + (e_3 - e_1) \sigma_2 u \sigma_2 v \sigma_2 w + (e_1 - e_2) \sigma_3 u \sigma_3 v \sigma_3 w , \qquad (95)$$

qui est nulle pour u = v = w = 0, le reste quand u + v + w = 0; en outre, à cause de la parité des $\sigma_i(u)$, la même relation est satisfaite pour toutes les combinaisons des signes \pm dans la formule

$$u \pm \nu \pm w = 0$$
.

Ce résultat est conforme de tout point à l'équation bien connue dans la théorie des fonctions σ

$$\sum (e_j - e_k) \,\sigma_i(u) \,\sigma_i(v) \,\sigma_i(w) = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \prod \sigma\left(\frac{u \pm v \pm w}{2}\right); \tag{96}$$

il valait la peine de noter ici combien cette formule se rattache étroitement à l'équation d'Euler et aux polynômes doublement quadratiques.

C. Cailler (Genève).

SUR L'ORTHOGONALISATION DE FONCTIONS

1. — Considérons le système

$$\varphi_0$$
. φ_1 , φ_2 , ...

de fonctions arbitraires et linéairement indépendantes de la variable réelle x. Exprimons pareillement par ψ_r celle parmi les expressions de forme

$$a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + ... + a_{r-1} \varphi_{r-1} + \varphi_r$$

où les a sont des constantes réelles, qui rend l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} (a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + \dots + a_{r-1} \varphi_{r-1} + \varphi_r)^2 dx$$