et

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha_1 l_1 = \rho\left(l_2 l_3'\right) , & \alpha_2 l_2 = \rho\left(l_3 l_1'\right) , & \alpha_3 l_3 = \rho\left(l_1 l_2'\right) , \\ \alpha_1 l_1' = \rho\left(l_2 l_3''\right) , & \alpha_2 l_2' = \rho\left(l_3 l_1''\right) , & \alpha_3 l_3' = \rho\left(l_1 l_2''\right) , \\ \alpha_1 l_1'' = \rho\left(l_2' l_3''\right) , & \alpha_2 l_2'' = \rho\left(l_3' l_1''\right) , & \alpha_3 l_3'' = \rho\left(l_1' l_2''\right) . \end{array}\right\} \quad (20)$$

Dans ce tableau les deux dernières lignes proviennent par dérivation de la première, celle-ci n'étant que la reproduction de la formule (17″) ci-dessus.

Composons avec (20) les quantités

$$\alpha_i\left(2 l_i l_i'' - l_i'^2\right) = \alpha_i\left(l_i l_i'' - l_i' l_i' + l_i'' l_i\right) , \qquad (i = 1, 2, 3)$$

nous trouvons de suite

$$\alpha_i\left(2 l_i l_i'' - l_i'^2\right) = \rho\left[l_i\left(l_j' l_k''\right) + l_i'\left(l_j'' l_k\right) + l_i''\left(l_j l_k'\right)\right] = \rho\left(l_1 l_2' l_3''\right)^{1} .$$

De là la conséquence suivante : *le polynôme* l_i *a pour discriminant la quantité*

$$-\frac{\rho}{4\alpha_i}\left(l_1 l_2' l_3''\right) . \qquad (21)$$

Empruntons encore au tableau (20) les combinaisons suivantes ; elles sont constantes comme il ressort de la valeur des seconds membres

$$\alpha_1 l_1'^2 + \alpha_2 l_2'^2 + \alpha_3 l_3'^2 = -\rho\left(l_1 l_2' l_3''\right) , \qquad (22)$$

$$\alpha_1 l_1 l_1'' + \alpha_2 l_2 l_2'' + \alpha_3 l_3 l_3'' = \rho\left(l_1 l_2' l_3''\right) . \qquad (23)$$

III. — Théorie du polynôme du quatrième degré.

7. — Avec trois polynômes conjugués l_1^2, l_2^2, l_3^2, tels que ceux qu'on a défini au § précédent, composons une forme du 4[me] degré, telle que

$$l = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 . \qquad (24)$$

L'identité (17′) qui règne entre les l_i, permet, pour une même forme l, de choisir les coefficients c_i d'une infinité de manières. On pourrait par exemple faire $c_i = 0$, en chassant complètement de

[1] On désigne ici, et plus loin, par i, j, k les indices 1, 2, 3 permutés circulairement d'une manière quelconque ; $\left(l_1 l_2' l_3''\right)$ représente le déterminant fonctionnel des trois polynômes l_i.

la représentation (24) un des polynômes l_i^2 choisi à volonté ; en réalité, malgré la présence de trois coefficients, la formule (24) ne renferme qu'une double infinité de formes l.

Il importe de remarquer que les seuls carrés contenus dans le faisceau (24) sont précisément l_1^2, l_2^2, l_3^2. En effet, prenons un tel carré qui ne soit égal ni à l_1^2, ni à l_2^2; son expression serait donc

$$L^2 = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 , \qquad \text{avec} \qquad c_1 c_2 \neq 0 .$$

Pour chacune des racines de $L = 0$, nous aurions

$$c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 = 0 , \qquad \text{et} \qquad c_1 l_1 l_1' + c_2 l_2 l_2' = 0 .$$

On tire de là $(l_1 l_2') = 0$, ou $l_3 = 0$, condition satisfaite en même temps que $L = 0$; le dit carré L^2 est donc forcément l_3^2, sauf un facteur constant. La proposition est prouvée.

Remarquons maintenant que, les coefficients constants étant exceptés, le système l_1, l_2, l_3 renferme trois paramètres; la formule (24), nous l'avons dit, en contient deux autres. Ainsi la définition de la forme l possède précisément autant de paramètres que le polynôme le plus général de son degré ; on doit donc prévoir que *tout polynôme du* 4^{me} *degré peut revêtir la forme* (24).

Pour justifier cette présomption, désignons par a_0 le premier coefficient d'une biquadratique X, par γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 ses racines supposées distinctes ; employons les notations (xi) et (ij) pour représenter les différences $x - \gamma_i$ et $\gamma_i - \gamma_j$, et posons

$$\left.\begin{aligned} l_2 + l_3 &= a_0 (12)(x4)(x3) , & l_2 - l_3 &= a_0 (43)(x1)(x2) , \\ l_3 + l_1 &= a_0 (14)(x3)(x2) , & l_3 - l_1 &= a_0 (32)(x1)(x4) , \\ l_1 + l_2 &= a_0 (13)(x2)(x4) , & l_1 - l_2 &= a_0 (24)(x1)(x3) . \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Le calcul direct montre immédiatement que ces six relations sont compatibles ; d'ailleurs les trois polynômes $l_1\, l_2\, l_3$ sont premiers entre eux deux à deux puisque tout facteur commun à l_2 et l_3, par exemple, divisant $l_2 + l_3$ et $l_2 - l_3$, ne peut exister que si les racines γ_i ne sont pas toutes distinctes, cas exclu.

Je dis que ces polynômes l sont conjugués ; en effet, en égalant les trois valeurs de

$$X = a_0 (x1)(x2)(x3)(x4) = \frac{l_2^2 - l_3^2}{a_0 (12)(43)} = \frac{l_3^2 - l_1^2}{a_0 (14)(32)} = \frac{l_1^2 - l_2^2}{a_0 (13)(24)} , \qquad (26)$$

nous obtenons une seule identité entre les carrés l_1^2, l_2^2, l_3^2. En faisant

$$\alpha_1 = a_0 (12)(43) , \qquad \alpha_2 = a_0 (14)(32) , \qquad \alpha_3 = a_0 (13)(24) ,$$

quantités qui vérifient l'équation

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \ ,$$

la dite identité s'écrit

$$\alpha_1 l_1^2 + \alpha_2 l_2^2 + \alpha_3 l_3^2 = 0 \ . \tag{27}$$

Les l_i sont donc conjugués; il importe de remarquer qu'ils ne sont pas ordinairement réduits à la forme normale et que, à moins que le contraire ne soit expressément indiqué, nous en déterminerons toujours les coefficients constants conformément au tableau (25) ci-dessus.

Pour exprimer X en fonction de l_1^2, l_2^2, l_3^2, il est préférable d'employer, au lieu des formes dissymétriques (26), la forme symétrique

$$3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 X = \alpha_1(\alpha_3 - \alpha_2) l_1^2 + \alpha_2(\alpha_1 - \alpha_3) l_2^2 + \alpha_3(\alpha_2 - \alpha_1) l_3^2 \ , \tag{28}$$

que l'on en déduit immédiatement.

On vient donc de démontrer que, *étant donné un polynôme du* 4[me] *degré* X, *il existe toujours trois polynômes orthogonaux* l_i^2 *tels que* X *soit un polynôme de leur faisceau.*

Une telle représentation est unique, car si on avait, par exemple, de deux manières différentes

$$X = l_1^2 - l_2^2 \ , \qquad \text{et} \qquad X = m_1^2 - m_2^2 \ ,$$

on aurait aussi, en changeant éventuellement le signe de m_2,

$$l_1 + l_2 = a(m_1 + m_2) \ , \qquad l_1 - l_2 = \frac{1}{a}(m_1 - m_2) \ ;$$

et alors le conjugué $l_3 = (l_1 l'_2)$ des polynômes l_1, l_2 serait, à un facteur constant près, égal à celui $m_3 = (m_1 m'_2)$ des polynômes m_1, m_2. On démontrerait de même les égalités $l_1 = m_1$ et $l_2 = m_2$ qui ont lieu, bien entendu, seulement sous réserve des coefficients constants.

C'est donc d'une manière parfaitement déterminée que les polynômes l_i^2 correspondent à X; en outre, sous l'angle de la définition (24), X peut être considéré comme un individu extrait d'un faisceau de formes biquadratiques qui possèdent en commun les mêmes polynômes conjugués l_i^2, et se trouve étroitement uni avec ces derniers.

Nous avons trouvé plus haut les l_i, correspondant à X, et construit le faisceau en partant de l'élément X décomposé en ses facteurs; c'est un problème fondamental que d'opérer la même construction à l'aide des seuls coefficients de X. Il suffit pour le résoudre de déterminer, en fonction de X, une seconde forme appartenant au même faisceau.

Pour y parvenir, reprenons les définitions (25) des l_i, et écrivons pour eux les relations (20) du § précédent. Un calcul rapide donne

$$\rho = 1 \,, \qquad \text{et} \qquad \left(l_1 l'_2 l''_3\right) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \,,$$

on a donc

$$\alpha_i l_i = \left(l_j l'_k\right) \,, \qquad \alpha_i l'_i = \left(l_j l''_k\right) \,, \qquad \alpha_i l''_i = \left(l'_j l''_k\right) \,, \tag{29}$$

et, pour le discriminant de l_i, la valeur

$$-\frac{\alpha_j \cdot \alpha_k}{4} \,. \tag{30}$$

Soit maintenant une forme quelconque

$$l = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 \,, \tag{30'}$$

du faisceau en question; il s'agit de calculer la valeur des deux combinaisons suivantes

$$c_1 l_1'^2 + c_2 l_2'^2 + c_3 l_3'^2 \,, \qquad \text{et} \qquad c_1 l_1 l''_1 + c_2 l_2 l''_2 + c_3 l_3 l''_3 \,,$$

qu'on a trouvées au § 6 pour le cas $c_i = \alpha_i$.

Pour les déterminer dans le cas général, tirons de (30') les égalités

$$\left.\begin{aligned} l = \sum c_i l_i'^2 \,, \qquad \frac{l'}{2} = \sum c_i l_i l'_i \,, \qquad \frac{l''_i}{2} = \sum c_i l_i'^2 + \sum c_i l_i l''_i \,, \\ \frac{l'''}{2} = 3 \sum c_i l'_i l''_i \,. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Intégrons la dernière, et comparons le résultat avec l'avant-dernière formule; nous avons

$$\left.\begin{aligned} \frac{l''}{6} &= \sum c_i l_i l''_i + c \,, \\ \frac{l''}{3} &= \sum c_i l_i'^2 - c \,. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Pour déterminer la constante c d'intégration, éliminons l'', et remplaçons les discriminants $\frac{1}{4}\left(l_i'^2 - 2 l_i l''_i\right)$ par leurs valeurs (30), il vient

$$3c = \sum c_i\left(l_i'^2 - 2l_i l_i''\right) = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \sum \frac{c_i}{\alpha_i} ,$$

ou

$$c = -\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{3} \sum \frac{c_i}{\alpha_i} . \tag{33}$$

Appliquons ce résultat général au cas particulier $l = \mathrm{X}$, qui donne, d'après (28), $c_i = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_k}\right)$; dans ce cas on a $c = 0$, et les formules (31) et (32) deviennent

$$\frac{\mathrm{X}''}{3} = \sum c_i l_i'^2 , \qquad \frac{\mathrm{X}'}{2} = \sum c_i l_i l_i' , \qquad \mathrm{X} = \sum c_i l_i^2 .$$

On tire de là

$$\frac{\mathrm{XX}''}{3} - \frac{\mathrm{X}'^2}{4} = \sum c_i l_i^2 \sum c_i l_i'^2 - \left(\sum c_i l_i l_i'\right)^2 = \sum c_j c_k \left(l_j l_k'\right)^2 . \tag{34}$$

Enfin cette dernière relation s'écrit encore, à cause des formules (29)

$$\frac{\mathrm{XX}''}{3} - \frac{\mathrm{X}'^2}{4} = \sum c_j c_k \alpha_i^2 l_i^2 .$$

Voici donc formé un nouveau polynôme $\mathrm{H} = \frac{4\mathrm{XX}'' - 3\mathrm{X}'^2}{48}$, appartenant au même faisceau que X; c'est lui qu'on nomme le *Hessien* de X, et dont la valeur en fonction des coefficients de

$$\mathrm{X} = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 ,$$

est

$$\begin{aligned} \mathrm{H} = (a_0 a_2 - a_1^2)x^4 &+ 2(a_0 a_3 - a_1 a_2)x^3 \\ &+ (a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_2^2)x^2 + 2(a_1 a_4 - a_2 a_3)x + a_2 a_4 - a_3^2 . \end{aligned} \tag{35}$$

La relation (34) nous en donne l'expression en l_i^2; quelques réductions faciles, où intervient la condition $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, amènent le Hessien à la forme

$$12\mathrm{H} = -l_1^2 - l_2^2 - l_3^2 . \tag{36}$$

§ 8. — *Propriétés d'invariance.* Nous savons que le faisceau l_i^2 contient les deux formes X et H; ces polynômes étant certainement indépendants, au moins quand les racines de X sont distinctes, on peut les adopter comme base du faisceau, à la place des l_i^2. Nous avons donc trois équations telles que

$$H + e_i X = b_i l_i^2 . \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (37)$$

Pour déterminer ces constantes b_i et e_i, faisons d'abord x égal à la racine γ_1 de X; alors $X = 0$, $H = \frac{4XX'' - 3X'^2}{48} = -\frac{X'^2}{16}$; $l_i = \frac{X'}{2}$; on a donc, dans (37), $b_i = -\frac{1}{4}$.

Ajoutons maintenant les mêmes équations, multipliées soit par 1, soit par α_i, soit encore par $\alpha_i(\alpha_j - \alpha_k)$; il vient, à cause de $\Sigma\alpha_i = 0$, des équations (28) et (36) pour X et H, et de l'identité (27),

$$\sum e_i = 0 , \quad \sum e_i \alpha_i = 0 , \quad \sum e_i \alpha_i(\alpha_j - \alpha_k) = \frac{3}{4}\alpha_1\alpha_2\alpha_3 .$$

On tire immédiatement de là

$$e_i = -\frac{1}{12}(\alpha_j - \alpha_k) .$$

Avant de récapituler les divers résultats qui précèdent, il est opportun de changer les notations en éliminant partout les quantités α_i pour mettre à leur place les trois *invariants irrationnels* e_i du polynôme X. Voici la correspondance entre ces quantités

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{12} = \frac{a_0}{12}[(13)(24) - (14)(32)] , \\ e_2 &= \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{12} = \frac{a_0}{12}[(12)(43) - (13)(24)] , \\ e_3 &= \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{12} = \frac{a_0}{12}[(14)(32) - (12)(43)] , \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

ou bien

$$\alpha_1 = 4(e_2 - e_3) , \quad \alpha_2 = 4(e_3 - e_1) , \quad \alpha_3 = 4(e_1 - e_2) . \qquad (39)$$

Les invariants irrationnels e_i, dont la somme est nulle, vérifient une équation cubique telle que

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0 , \qquad (40)$$

avec les conditions

$$-\frac{1}{4}g_2 = e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 , \qquad \frac{1}{4}g_3 = e_1 e_2 e_3 .$$

Ces dernières quantités, évidemment symétriques par rapport aux racines du polynôme X, sont exprimables rationnellement par les coefficients de X : voici la valeur de ces invariants rationnels

$$\left.\begin{aligned} g_2 &= a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2 \, . \\ g_3 &= a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 \, . \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Rappelons d'ailleurs que la combinaison

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2(e_1 - e_2)^2 = \Delta \qquad (42)$$

joue le rôle du *discriminant* de X.

La théorie générale conduit donc au résumé suivant où se trouvent récapitulées les propriétés les plus essentielles du polynôme du 4^{me} degré.

a) Désignons toujours par l_i les polynômes conjugués, tels qu'ils sont définis au tableau (25) ; l_i a pour discriminant

$$\frac{-\alpha_j \alpha_k}{4} \, , \qquad \text{ou} \qquad 4(e_i - e_j)(e_i - e_k) \; . \qquad (30'')$$

Alors, si H représente le Hessien de X, les trois combinaisons suivantes sont des carrés, à savoir

$$H + e_i X = -\frac{1}{4} l_i^2 \; ; \qquad (37')$$

ce sont les seuls carrés contenus dans le faisceau $H + eX$.

b) Mettons au lieu de $4(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2) = \sqrt{\Delta}$, quantité parfaitement déterminée, on a le tableau

$$\left.\begin{aligned}
&(e_2 - e_3) l_1^2 + (e_3 - e_1) l_2^2 + (e_1 - e_2) l_3^2 = 0 \, , && (27') \\
&X\sqrt{\Delta} = e_1(e_2 - e_3) l_1^2 + e_2(e_3 - e_1) l_2^2 + e_3(e_1 - e_2) l_3^2 \, , && (28') \\
&X''\sqrt{\Delta} = 3[e_1(e_2 - e_3) l_1'^2 + e_2(e_3 - e_1) l_2'^2 + e_3(e_1 - e_2) l_3'^2] \, , && (32') \\
&H = \frac{4XX'' - 3X'^2}{48} = -\frac{1}{12}(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) \, , && (36') \\
&T = \frac{1}{2}(HX' - XH') = \frac{1}{4} l_1 l_2 l_3 \, , && (43) \\
&T^2 = -4(H + e_1 X)(H + e_2 X)(H + e_3 X) = -4H^3 + g_2 HX^2 + g_3 X^3 \, . && (44)
\end{aligned}\right\} (A)$$

Dans le tableau ci-dessus, les diverses formules sont affectées du même numéro, avec un accent, que celles dont elles ne sont qu'une simple répétition ; seules (43) et (44) sont nouvelles et ont besoin de démonstration.

Il s'y introduit un covariant T, du sixième degré, dont l'annulation caractérise les extremas du quotient $\frac{H}{X}$. Or ces extremas, à cause de

$$\frac{H + e_2 X}{H + e_1 X} = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2.$$

sont les mêmes que ceux du quotient $\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2$, à savoir les racines de l_1, les racines de l_2, celles enfin du polynôme $l_1 l_2' - l_2 l_1'$ ou l_3. La partie littérale de la formule 43 $T = \frac{1}{4} l_1 l_2 l_3$ est ainsi évidente. Quant au coefficient numérique $\frac{1}{4}$, on le trouve en comparant la valeur des deux membres pour une valeur particulière de x, $x = \gamma_1$ par exemple.

On sait par l'Algèbre élémentaire que les divers éléments du tableau (A) sont des invariants, lesquels, sauf introduction de certaines puissances de δ, se reproduisent par les transformations linéaires de déterminant δ. Mais cette propriété résulte à son tour, et immédiatement, du tableau lui-même, ainsi que d'une remarque au sujet du Hessien.

En intégrant l'équation différentielle $4XX'' - 3X'^2 = 0$, on reconnaît que le Hessien de X est identiquement nul dans le seul cas où X est une quatrième puissance exacte. Or si on opère la transformation linéaire $\left(x, \frac{ay + b}{a'y + b'}\right)$, le transformé $Y = (a'y + b')^4 X$ est une puissance quatrième en même temps que X lui-même. Le Hessien H_y de Y, s'annulant avec celui H_x de X, est divisible par ce dernier, et l'on a

$$H_y = \delta^2 (a'y + b')^4 H_x ;$$

la partie littérale de la formule est évidente, la présence du facteur δ^2, carré du déterminant de la transformation, se démontre immédiatement, par exemple par le calcul direct.

Revenons alors au tableau (A), et effectuons la transformation dont il s'agit. On voit, d'après la propriété du Hessien, que e_i acquiert le facteur δ^2, puis l_i, T, g_2, g_3 respectivement les facteurs δ, δ^3, δ^4, δ^6.

Les conditions d'invariance relatives à g_2 et g_3, qui sont nécessaires pour l'équivalence, sont aussi suffisantes. Autrement dit, *si deux formes* X et Y *ont le même invariant absolu* $\frac{g_2^3}{g_3^2}$, ou bien encore, *si deux formes ont des invariants irrationnels* e_i *propor-*

tionnels entre eux, il existe une transformation linéaire changeant X *en* Y.

En effet, dans ce cas, le système l_i d'un des polynômes est transformable dans le système l_i relatif au second ; la chose est évidente puisque le déterminant de l_i étant $4(e_i - e_j)(e_i - e_k)$, la proportionnalité des e_i implique celle des invariants fondamentaux des deux systèmes l_i. Soit δ le déterminant de la transformation T opérant le passage de l'un à l'autre ; reprenons, pour les deux polynômes les identités (31), on en conclut de suite

$$Y = (a'y + b')^4 X \ , \qquad H_y = \delta^2 (a'y + b')^4 H_x \ .$$

Ou bien, *la même transformation* T *qui transforme le premier système* l_i *dans le second, transforme aussi* X *en* Y.

Il est clair que ces questions d'équivalence se réduisent en réalité au cas $\delta = 1$ d'une transformation unimodulaire. Pour qu'une telle transformation de X en Y soit possible, il faut naturellement que les invariants rationnels g_2, g_3, ou irrationnels e_i, soient les mêmes pour X et pour Y. Supposons cette condition remplie, il est facile de trouver toutes les substitutions opérant le passage d'une forme à l'autre.

En effet, soient $l_i(x)$ les polynômes conjugués relatifs à X, $m_i(y)$ ceux relatifs à Y. Nous avons

$$H_x + e_i X = -\frac{1}{4} l_i^2 \ , \qquad H_y + e_i Y = -\frac{1}{4} m_i^2 \ ,$$

et comme l_i^2 doit se transformer en m_i^2 en même temps que X en Y, il faut que

$$\frac{l_1^2}{m_1^2} = \frac{l_2^2}{m_2^2} \ , \qquad \text{ou bien} \qquad YH_x - XH_y = 0 \ ,$$

cette dernière est une conséquence de l'équation $x = \dfrac{ay + b}{a'y + b'}$, qu'on cherche pour passer de X à Y.

Si réciproquement nous avons $YH_x - XH_y = 0$, nous aurons aussi $\dfrac{l_1}{m_1} = \pm \dfrac{l_2}{m_2}$. Suivant la théorie développée au § 5, il résulte de cette équation et du fait de la concordance des deux discriminants pour l_i et m_i, que l'équation

$$F(x, y) = l_1 m_2 \pm l_2 m_1 = 0$$

se partage en deux équations linéaires. Voici donc le résultat.

Si deux polynômes biquadratiques X, Y *ont les mêmes invariants* e_i, *l'équation*

$$YH_x - XH_y = 0 ,$$

se décompose en quatre équations linéaires en x *et en* y. *A chacun des quatre facteurs correspond une transformation unimodulaire de* X *en* Y ; *il n'en existe pas d'autres.*

Remarquons enfin que, dans tout ce qui précède, le degré effectif de X peut fort bien s'abaisser au troisième par le transport à l'infini d'une des racines γ_i. Ainsi parmi les diverses formes équivalentes à X figure le polynôme $4x^3 - g_2 x - g_3$ dont les racines sont, comme nous savons, e_1, e_2, e_3. Il est intéressant de se procurer les polynômes conjugués n_i de cette forme réduite : ce sont d'après les définitions (25)

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= 2(x^2 - 2e_1 x - e_1^2 - e_2 e_3) = 2[(x-e_1)^2 - (e_1-e_2)(e_1-e_3)] ,\\ n_2 &= 2(x^2 - 2e_2 x - e_2^2 - e_3 e_1) = 2[(x-e_2)^2 - (e_2-e_3)(e_2-e_1)] ,\\ n_3 &= 2(x^2 - 2e_3 x - e_3^2 - e_1 e_2) = 2[(x-e_3)^2 - (e_3-e_1)(e_3-e_2)] . \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

Ces polynômes n_i ne dépendent ainsi que des e_i, propriété qui n'appartient pas aux conjugués l_i d'une forme X quelconque ayant les e_i pour invariants ; on trouvera d'ailleurs les l_i en opérant sur les n_i une transformation unimodulaire quelconque.

9. — *Théorème de Cayley.* — On sait que toute forme du faisceau X, H, par exemple aH + bX possède les mêmes polynômes conjugués l_i^2 que X lui-même ; il serait intéressant de se procurer, pour une telle forme, le système des invariants et covariants fondamentaux qui figurent dans le tableau (A). Nous nous bornerons à esquisser rapidement cette question en cherchant d'abord le Hessien de la forme précédente, lequel faisant partie du faisceau l_i^2, est lui aussi du type AH + BX.

Or le Hessien contient les coefficients de la forme au second degré, on a donc

$$A = \alpha_0 b^2 + 2\beta_0 ab + \gamma_0 a^2 , \qquad B = \alpha_1 b^2 + 2\beta_1 ab + \gamma_1 a^2 .$$

Pour déterminer ces polynômes, partons de la remarque que voici. Si X est un carré, ou $X = f^2$, son Hessien $H = \dfrac{4XX'' - 3X'^2}{48} = -\dfrac{(f'^2 - 2ff'')}{12} f^2$. Ce Hessien vaut donc $-\dfrac{\Delta}{3} f^2$, si Δ représente le discriminant de f.

Appliquons cette remarque à l'expression

$$H + e_i X = -\frac{1}{4} l_i^2 ,$$

dont le Hessien doit être $\frac{(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{3}$ (H + e_iX). Comparons ce résultat à la règle générale énoncée ci-dessus ; nous avons les conditions d'identification

$$\alpha_0 e_i^2 + 2\beta_0 e_i + \gamma_0 = \frac{(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{3} .$$

$$\alpha_1 e_i^2 + 2\beta_1 e_i + \gamma_1 = \frac{e_i(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{3} .$$

Remplaçons aux seconds membres

$$\frac{(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{3} , \quad \text{et} \quad \frac{e_i(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{3} .$$

par les valeurs égales

$$e_i^2 - \frac{1}{12} g_2 , \quad \text{et} \quad e_i^3 - \frac{1}{12} g_2 e_i = \frac{g_2 e_i}{6} + \frac{g}{4} ,$$

on obtient à l'instant

$$\alpha_0 = 1 , \quad \beta_0 = 0 , \quad \gamma_0 = -\frac{1}{12} g_2 ,$$

$$\alpha_1 = 0 , \quad \beta_1 = \frac{g_2}{12} , \quad \gamma_1 = \frac{g_3}{4} .$$

Voici donc le résultat

Le Hessien de la combinaison aH + bX *est un polynôme du même faisceau, égal à*

$$h = \left(b^2 - \frac{g_2 a^2}{12}\right) H + \left(\frac{g_2}{6} ab + \frac{g_3}{4} a^2\right) X . \tag{46}$$

Si on appelle E_i les invariants irrationnels de cette forme aH + bX, on trouvera E_i en exprimant que

$$h + E_i(aH + bX) ,$$

ou bien,

$$(b^2 - \frac{g_2}{12} a^2 + E_i a) H + (\frac{g_2}{6} ab + \frac{g_3}{4} a^2 + E_i b) X$$

se réduit à un carré. On a donc, pour déterminer E_i, la condition

$$e_i(E_i a + b^2 - \frac{g_2 a^2}{12}) = E_i b + \frac{g_2}{6} ab + \frac{g_3}{4} a^2 ,$$

soit, après quelques réductions

$$E_i = ae_i^2 + be_i - \frac{g_3}{6}a \ . \tag{47}$$

Quant au covariant $T = \frac{1}{2}(HX' - XH')$, c'est évidemment un *combinant* du faisceau (X, H) ; si on substitue $aH + bX$ à X, il se reproduit multiplié par le facteur

$$-\frac{1}{4}(4b^3 - g_2ba^2 - g_3a^3) \ .$$

IV. — **Formes doublement quadratiques.**

10. — On nomme *forme doublement quadratique* un polynôme tel que

$$F = \sum a_{mn}x^my^n \ ; \qquad (m, n = 0, 1, 2) \tag{48}$$

soit, en le développant suivant les puissances de l'une ou de l'autre des variables,

$$F \doteq X_2y^2 + 2X_1y + X_0 = Y_2x^2 + 2Y_1x + Y_0 \ . \tag{49}$$

Les coefficients X_i et Y_i, dans ces représentations, valent

$$X_i = a_{2i}x^2 + 2a_{1i}x + a_{0i} \ , \qquad Y_i = a_{i2}y^2 + 2a_{i1}y + a_{i0} \ . \tag{50}$$

Relativement à ces formes F doublement quadratiques, nous avons à résoudre plusieurs questions importantes qui se rattachent toutes, plus ou moins directement, au problème de l'équivalence de deux pareilles formes par transformation linéaire unimodulaire. Un rôle fondamental, dans toute la théorie, est dévolu aux discriminants de F relatifs à chaque variable ; ce sont les fonctions

$$D_y(x) = X_1^2 - X_0X_2 \ , \qquad \text{et} \qquad D_x(y) = Y_1^2 - Y_0Y_2 \ , \tag{51}$$

que nous représentons le plus souvent par les lettres X et Y.

Commençons par exclure le cas où X et Y possèdent des racines multiples ; à ce sujet on doit remarquer que les racines multiples apparaissent ensemble dans les deux polynômes, ou que si X possède une racine multiple, Y en possède une autre.

En effet, il est évident que X et Y sont des covariants de la forme. Si on opère dans F une transformation portant sur les deux variables et telle que

$$x = \frac{ax' + b}{a'x' + b'} \ , \qquad \text{et} \qquad y = \frac{\alpha y' + \beta}{\alpha' y' + \beta'} \ , \tag{52}$$