POINTS-PINCES, ARÊTES DE REBROUSSEMENT ET REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE DES SURFACES

Autor(en): **Hadamard, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1914)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-15536

B. — Maintenir dans l'esprit des élèves l'*équilibre* entre cette culture générale et les notions professionnelles.

C. — Réduire au minimum la durée des études, afin de donner aux jeunes ingénieurs les plus grandes facilités pour leur *apprentissage industriel,* et de laisser la carrière d'ingénieur aussi largement ouverte que possible.

Erratum.

Rapport général de M. E. Beke, p. 276, lignes 6 à 11.

Dans une lettre datée du 30 juin 1914, M. C. Possé, l'un des délégués russes, nous signale une modification à introduire dans un passage concernant la Russie. La phrase « Ainsi, la revision générale.... » doit être remplacée par la suivante :

« Ainsi, la revision générale du cours des classes précédentes, la discussion des équations du second degré, le dessin projectif, l'application de l'algèbre à la géométrie (homogénéité des formules, construction des formules rationnelles et des racines des équations du second degré, etc.), sont supprimés. »

POINTS-PINCES, ARÊTES DE REBROUSSEMENT ET REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE DES SURFACES[1]

Les « points-pinces » de Cayley sont assurément, en un sens, une particularité très spéciale, très exceptionnelle des surfaces. Il ne semble pas, au premier abord qu'il puisse y avoir lieu de s'y arrêter dans un cours d'Analyse destiné aux débutants.

Or je me trouve amené presque obligatoirement à y faire une brève allusion dans l'enseignement très condensé cependant que je professe à l'Ecole Polytechnique.

C'est à propos de la représentation paramétrique des surfaces que je suis conduit à opérer ainsi. Soient les équations

$$(1) \qquad x = x(u, v) , \qquad y = y(u, v) , \qquad z = z(u, v) ,$$

u et v désignant deux paramètres variables. On se borne généralement à dire que, u et v variant indépendamment de toutes les manières possibles, ces équations définissent :

---

[1] Communication présentée par M. J. Hadamard, membre de l'Institut, à la Société mathématique de France, le 1er avril 1914, à l'occasion de la Conférence internationale de l'enseignement mathématique.

a) une surface, si l'on n'a pas simultanément

$$\frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)} = \frac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)} = \frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)} = 0 \ ; \tag{2}$$

b) une courbe, si les relations (2) ont lieu ensemble quels que soient u, v.

J'ai été frappé de ce qu'il y avait d'antiscientifique et, par contre coup, de vicieux au point de vue éducatif, dans cette énumération volontairement incomplète, faussée, des cas possibles.

Il tombe sous le sens, en effet, que ces cas ne sont pas au nombre de deux, mais de quatre, savoir (outre *a* et *b*):

c) Ces trois déterminants (2) s'annullent ensemble en un point unique.

d) Ces trois déterminants s'annullent ensemble en tous les points d'une ligne.

En ce qui concerne ce dernier, il n'y a qu'avantage à l'introduire dans l'enseignement.

Il correspond, en effet, à une *arête de rebroussement;* et ceci permet d'établir, de la manière la plus simple, l'existence (énoncée très souvent sans démonstration) d'une telle arête.

A quoi correspond le cas *c*)? Autrement dit, quelle forme a, autour de l'origine, la surface

$$\left\{\begin{array}{l} x = x(u,\ v) = a_1 u + b_1 v + \alpha_1 u^2 + 2\beta_1 uv + \gamma_1 v^2 + \ldots \\ y = y(u,\ v) = a_2 u + b_2 v + \alpha_2 u^2 + 2\beta_2 uv + \gamma_2 v^2 + \ldots \\ z = z(u,\ v) = a_3 u + b_3 v + \alpha_3 u^2 + 2\beta_3 uv + \gamma_3 v^2 + \ldots \end{array}\right. \tag{2'}$$

si les trois formes linéaires

$$a_1 u + b_1 v\ , \qquad a_2 u + b_2 v\ , \qquad a_3 u + b_3 v \tag{3}$$

sont proportionnelles les unes aux autres ?

On peut voir que, dans ce cas, *la surface* (2') *peut, en général*[1], *par une transformation ponctuelle*

$$f(x,\ y,\ z) = X, \qquad g(x,\ y,\ z) = Y, \qquad h(x,\ y,\ z) = Z \tag{I}$$

[1] Plus précisément, c'est ce qui a lieu si on suppose :

1° que l'un au moins des coefficients a_i, b_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$, a_1, par exemple, est différent de zéro ;

2° que

$$\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 b_1 - \beta_1 a_1 & \beta_1 b_1 - \gamma_1 a_1 \\ a & \alpha_2 b_2 - \beta_2 a_2 & \beta_2 b_2 - \gamma_2 a_2 \\ a_3 & \alpha_3 b_3 - \beta_3 a_3 & \beta_3 b_3 - \gamma_3 a_3 \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

régulière et à jacobien non nul à l'origine, se ramener à

$$(S_0) \qquad Y^2 = XZ^2$$

Tout d'abord, il est clair que moyennant une subtitution linéaire effectuée sur x, y, z, on peut supposer nulles les deux premières des formes (3).

Puis, comme rien n'empêche d'effectuer également sur u, v n'importe quelle transformation ponctuelle

$$(II) \qquad \varphi(u, v) = U, \qquad \psi(u, v) = V$$

à jacobien non nul à l'origine, on peut (si la forme (3) restante n'est pas identiquement nulle[1]) supposer que la troisième équation (2′) se réduit à

$$(4) \qquad z = u$$

Ceci fait, nous supposerons[2] que l'un des deux coefficients γ, par exemple γ_1, est différent de zéro et peut, par conséquent être pris égal à 1.

On peut alors admettre que la première équation (2′) se réduit à

$$(4') \qquad x = v^2$$

Pour le voir, remarquons que l'équation

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial x}{\partial v} = v + \beta_1 u + \ldots = 0$$

est alors résoluble en v dans le voisinage de $u = v = 0$ et donne

$$v = \beta_1 u + \lambda_2 u^2 + \ldots = \chi(u).$$

Effectuons le changement de variable

$$v = \chi(u) + V$$

lequel est de la forme (II). Ceci revient à admettre que l'équation (5) est vérifiée (identiquement en u) pour $v = 0$, c'est-à-dire que le développement de x ne contient aucun terme linéaire en v, soit

$$x = \Phi(u) + v^2(1 + m_1 u + n_1 v + \ldots)$$

[1] C'est l'hypothèse 1° de la note précédente.
[2] Ceci est contenu dans l'hypothèse 2° de la note précédente.

Or

$$v(1 + m_1 u + n_1 v + \ldots)^{\frac{1}{2}} = V$$

est une transformation (II), et

$$x - \Phi(z) = X$$

est une transformation (I). En les effectuant toutes deux, l'expression de x est bien réduite à la forme (4').

Celle de y peut s'écrire, en séparant les termes pairs et les termes impairs en v,

$$y = v\mathrm{F}(u, v^2) + \mathrm{G}(u, v^2) = v\mathrm{F}(z, x) + \mathrm{G}(z, x)$$

Comme la transformation $y - \mathrm{G}(z, x) = \mathrm{Y}$ est de la forme (I), on peut supposer $\mathrm{G} = 0$. Les équations de la surface sont alors (4), (4') et

(4'') $$y = v\mathrm{F}(z, x),$$

d'où

(S₁) $$y^2 = x\mathrm{F}^2(z, x)$$

En général[1], F contiendra un terme en z (seul) du premier degré. Il pourra être alors pris comme nouvelle variable z et l'équation sera ramenée à la forme (S_0). Sur celle-ci, il apparaît bien que l'origine appartient à une ligne double et joue le rôle de « point pince »[2].

En laissant de côté le détail des calcul qui précèdent, on voit que l'étude très simple de la surface (S_0) suffit à rendre compte de ce qui se passe dans le cas c).

J. HADAMARD,
Membre de l'Institut, Paris.

---

[1] C'est l'hypothèse 2° mentionnée dans la note 1 de la page précédente.

[2] Un point de rebroussement non situé sur une ligne double (exemple : $y^2 = x(z^2 + x^2)$ est, à ce point de vue, une singularité plus élevée que celle du texte.