Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 16 (1914)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES TRIANGLES HÉRONIENS

Autor: Gennimatas, N.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15529

De même les points d'intersection π et π' de la même projetante avec les surfaces (P) et (P') donnent une droite Δ_π.

La parallèle aux projetantes qui s'appuie sur Δ_μ et Δ_π fournit un point ϱ_1, plus approché que ϱ et l'on peut continuer ainsi indéfiniment.

La détermination des plans tangents aux surfaces (M) ou (P) est assez simple. On peut l'obtenir en effet en construisant sur la surface en un point deux tangentes particulières correspondant au déplacement du point R sur le cercle RAB ou sur le cercle lieu des points tels que $\frac{\mathrm{RA}}{\mathrm{RB}}$ soit constant.

L. Ballif (Angoulème).

SUR LES TRIANGLES HÉRONIENS

Nouvelles formules.

1. — Soient p, q, r les trois côtés et s le demi-périmètre d'un triangle héronien.

Si F représente la surface, on a :

$$\mathrm{F} = \sqrt{s(s-p)(s-q)(s-r)}\ .$$

F peut s'écrire :

$$\mathrm{F} = (s-q)(s-r)\sqrt{\frac{s(s-p)}{(s-q)(s-r)}}\ ,$$

ou, comme $s = s-p+s-q+s-r$,

$$\mathrm{F} = (s-q)(s-r)\sqrt{\left[1+\frac{s-p}{s-q}+\frac{s-r}{s-q}\right]\cdot\frac{s-p}{s-r}}$$

$$= (s-q)(s-r)\sqrt{\frac{s-p}{s-q}+\frac{s-p}{s-r}+\frac{s-p}{s-q}\cdot\frac{s-p}{s-r}}\ .$$

Posons

$$\frac{s-p}{s-q} = x\ , \qquad \frac{s-p}{s-r} = x'\ ,$$

alors on obtient :

$$\mathrm{F} = \frac{(s-p)^2}{xx'}\sqrt{x+x'+xx'}\ . \tag{1}$$

Or, puisque F doit être un nombre rationnel, l'expression $x + x' + xx'$ représente un carré parfait. On a

$$x + x' + xx' = y^2 ,$$

où y est un nombre rationnel ; on en tire

$$x' = \frac{y^2 - x}{1 + x} . \qquad (2)$$

Par conséquent (1) devient :

$$F = \frac{(s - p)^2}{x(y^2 - x)} (1 + x) y . \qquad (3)$$

On trouve ensuite pour les côtés du triangle :

$$p = s - q + s - r = (s - p) \left[\frac{s - q}{s - p} + \frac{s - r}{s - p} \right] = (s - p) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} \right) ,$$

ou d'après (2) :

$$p = (s - p) \left[\frac{1}{x} + \frac{1 + x}{y^2 - x} \right] ,$$

c'est-à-dire

$$p = \frac{s - p}{x(y^2 - x)} (x^2 + y^2) ; \qquad (4)$$

$$q = \frac{s - p}{y^2 - x} (1 + y^2) ; \qquad (5)$$

$$r = \frac{s - p}{x} (1 + x) . \qquad (6)$$

Or, nous pouvons remplacer le triangle (p, q, r) par un triangle semblable (a, b, c), où :

$$a = \frac{x(y^2 - x)}{s - p} \cdot p , \qquad b = \frac{x(y^2 - x)}{s - p} \cdot q , \qquad c = \frac{x(y^2 - x)}{s - p} \cdot r .$$

La surface de ce triangle est par conséquent :

$$F = \left[\frac{x(y^2 - x)}{x - p} \right]^2 . F .$$

On obtient à l'aide de (3), (4), (5) et (6) :

$$a = x^2 + y^2 \qquad \text{I}$$

$$b = (1 + y^2) x \qquad \text{II}$$

$$c = (1 + x)(y^2 - x) \qquad \text{III}$$

et

$$F = (1 + x)(y^2 - x) x y , \qquad \text{ou} \qquad F = cxy . \qquad \text{IV}$$

Dans ces formules x et y sont des nombres positifs rationnels et $y^2 > x$ (à cause de III).

Remarque. — On peut démontrer immédiatement que les expressions

$$x^2 + y^2 , \qquad (1 + y^2)x , \qquad (1 + x)(y^2 - x) ,$$

où x, y et $y^2 - x$ sont des nombres positifs, peuvent toujours être les côtés d'un triangle, car les trois différences

$$s - (x^2 + y^2) , \qquad s - (1 + y^2)x , \qquad s - (1 + x)(y^2 - x) .$$

où

$$s = \frac{1}{2}[x^2 + y^2 + (1 + y^2)x + (1 + x)(y^2 - x)] ,$$

sont positives.

En effet, on trouve :

$$s - (x^2 + y^2) = x(y^2 - x) ,$$

$$s - (1 + y^2)x = y^2 - x ,$$

$$s - (1 + x)(y^2 - x) = x(1 + x) .$$

Mais, si ces trois différences sont positives, chacune des quantités I, II, III est plus petite que la somme et plus grande que la différence des deux autres; par conséquent I, II, III peuvent être considérés comme les trois côtés d'un triangle.

2. — De la formule IV on reconnaît que la hauteur h correspondante à la base c est égale à $2xy$.

La question est maintenant de savoir dans quelles conditions cette hauteur se confond avec le côté a ou b.

1) $h = a$. Alors

$$x^2 + y^2 = 2xy , \qquad \text{c'est-à-dire que} \qquad x = y ,$$

d'où il suit que :

$$a = 2x^2 , \qquad b = x(x^2 + 1) , \qquad c = x(x^2 - 1) ;$$

par conséquent x doit être plus grand que 1.

Quand $x = 2$, on a :

$$a = 8 , \qquad b = 10 , \qquad c = 6$$

triangle rectangle, semblable au plus petit triangle pythagoricien (3, 4, 5).

2) $h = b$. Alors

$$2xy = (1 + y^2)x , \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad y = 1 :$$

donc, seulement quand $y = 1$, $h = b$.

Ici x est plus petit que 1 (puisque $y^2 = 1 > x$). Les côtés du triangle sont alors :

$$a = 1 + x^2 \,, \qquad b = 2x \,, \qquad c = 1 - x^2 \,.$$

Prenons $x = \frac{1}{2}$, nous obtenons :

$$a = \frac{5}{4} \,, \qquad b = 1 \,, \qquad c = \frac{3}{4} \,:$$

triangle rectangle, semblable au plus petit triangle pythagoricien.

3. — Nous allons maintenant démontrer la proposition suivante :

Les côtés a et b ne sont égaux entre eux que quand $x = 1$. Si l'on a, au contraire, $x \gtrless 1$, on aura $a \lessgtr b$.

En effet, il suit de la formule III que

$$y^2 > x \,,$$

donc :

1) $$y^2(x-1) > x(x-1) \,,$$

si

$$x - 1 > 0 \,, \qquad \text{ou} \qquad x > 1 \,; \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad xy^2 + x > x^2 + y^2 \,;$$

donc :

$$b > a \,;$$

2) $$y^2(x-1) < x(x-1) \,, \qquad \text{si} \qquad x < 1 \,;$$

ou

$$xy^2 + x < x^2 + y^2 \,;$$

donc

$$b < a \,;$$

3) quand $x = 1$, il suit de I et II que :

$$a = 1 + y^2 \,, \qquad b = 1 + y^2 \,; \qquad \text{c'est-à-dire que} \qquad a = b \,.$$

Mais en outre on a, comme il est facile de le reconnaître :

$$c \gtreqless a \,, \qquad \text{suivant que l'on a} \qquad y^2 \gtreqless 2x + 1 \,,$$

et

$$c \gtreqless b \,, \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad y^2 \gtreqless (2 + x)x \,.$$

Si donc $a = b$ (et par conséquent $x = 1$), on a :

$$c \gtreqless a = b \,, \quad \text{selon que } y^2 \text{ est} \gtreqless 3 \,.$$

D'où il suit que $a = b = c$ n'est pas possible, car alors y serait égal à $\sqrt{3}$, c'est-à-dire à un nombre irrationnel et le triangle (a, b, c) ne serait plus un triangle héronien. D'ailleurs, qu'un triangle dont les trois côtés sont égaux ne peut pas être un triangle héronien, c'est ce qui suit immédiatement de la formule de l'aire: $F = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$; alors F est un nombre irrationnel, lorsque le côté a est rationnel.

4. — On sait que d'un triangle obliquangle héronien on obtient à l'aide de chacune de ses trois hauteurs deux triangles rectangles héroniens aussi et dont la somme ou la différence égalent le triangle donné.

Considérons le côté $c = (1 + x)(y^2 - x)$ comme la base du triangle (a, b, c); alors la hauteur $h = 2xy$ peut se trouver en dehors ou à l'intérieur du triangle : dans le premier cas le triangle apparaît comme la différence et dans le second cas comme la somme de deux triangles rectangles héroniens ayant une cathète commune, la hauteur h.

Nous démontrerons maintenant la proposition suivante :

Soit $x > y$, alors la hauteur $h = 2xy$ se trouve à l'extérieur du triangle.

On reconnaît d'abord que pour $x > y$ x doit être plus grand que 1. Car pour $x = 1$ on aurait $x^2 = 1 = x$, et, puisque $x > y$, $x^2 > y^2$ ou encore $x > y^2$, ce qui est inadmissible à cause de la formule III.

Pour $x < 1$ on aurait $x^2 < x$, et, puisque $x > y$, $x^2 > y^2$; par conséquent $x > x^2 > y^2$, c'est-à-dire $x > y^2$, ce qui n'est pas possible. Donc, x doit être plus grand que 1. Mais alors y est aussi plus grand que 1 (puisque $y^2 > x$), d'autre part a est plus petit que b (d'après le n° 3), ou

$$x^2 + y^2 < (1 + y^2)x \, .$$

Or, le triangle (a, b, c) est la différence de deux triangles rectangles ayant respectivement comme côtés

$$b = x(1 + y^2) \, , \qquad h = 2xy \, , \qquad x(y^2 - 1) \, ;$$
$$a = x^2 + y^2 \, , \qquad h = 2xy \, , \qquad x^2 - y^2 \, ;$$

h étant leur hauteur commune : donc, h se trouve en dehors du triangle, c. q. f. d.

Admettons maintenant que les valeurs de x sont plus petites que celles de y.

Il faut distinguer deux cas :

1) $$x < y \, , \qquad y > 1 \, .$$

Le triangle (a, b, c) peut se diviser en deux triangles rectangles héroniens ayant respectivement comme côtés :

$$b = x(1 + y^2), \qquad h = 2xy, \qquad x(y^2 - 1);$$
$$a = x^2 + y^2, \qquad h = 2xy, \qquad y^2 - x^2;$$

h étant leur hauteur commune : h se trouve compris dans le triangle (a, b, c).

2) $$x < y < 1 .$$

On a d'abord $y^2 < y$; d'autre part, puisque $x < y^2$ (à cause de la formule III), à plus forte raison x est plus petit que y, donc $x < 1$ et par conséquent $b < a$ (d'après le n° 3).

Or, le triangle (a, b, c) est égal à la différence de deux triangles rectangles ayant comme côtés :

$$a = x^2 + y^2, \qquad h = 2xy, \qquad y^2 - x^2;$$
$$b = x(1 + y^2), \qquad h = 2xy, \qquad x(1 - y^2);$$

h étant leur hauteur commune : h se trouve en dehors du triangle (a, b, c).

Remarque. — Dans le cas ci-dessus, comme dans celui où $x > y$, la hauteur h se trouve en dehors du triangle (a, b, c). Mais pour $x > y$ on a $a < b$, tandis que pour $x < y < 1$ le côté a est plus grand que b.

En résumé :

1) $x > y$; h se trouve en dehors du triangle en même temps que a est plus petit que b ;

2) $x = y$; h se confond avec a ;

3) $x < y$:

 α) $y > 1$; h se trouve dans l'intérieur du triangle ;

 β) $y = 1$; h se confond avec b ;

 γ) $y < 1$; h se trouve en dehors du triangle et a est plus grand que b.

N. Gennimatas (Munich).