**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 16 (1914)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE APPLICATION DE LA MÉTHODE DE FAUSSE POSITION

**Autor:** Ballif, L.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-15528

# UNE APPLICATION
# DE LA MÉTHODE DE FAUSSE POSITION

Lagrange a rencontré, à propos de la construction des cartes géographiques, le problème suivant :

Etant donnés trois points R, R′, R″, trouver deux points A et B tels que les rapports $\frac{RA}{RB}$, $\frac{R'A}{R'B}$, $\frac{R''A}{R''B}$, soient entre eux dans des rapports donnés, les différences des angles ARB, AR′B, AR″B étant également données.

Nous allons d'abord essayer de donner une solution purement géométrique de cette question.

Comme première simplification, nous pouvons remarquer qu'il nous suffit de construire, au lieu de la figure donnée, une figure qui lui soit semblable. Nous pouvons alors considérer AB comme une donnée, et essayer de déterminer les points R, R′ et R″.

Donnons-nous arbitrairement le point R dans le plan : nous pouvons alors construire le triangle RR′R″ de deux manières différentes suivant que nous l'astreignons à l'une ou l'autre des conditions cherchées. En effet, dans le premier cas les rapports $\frac{R'A}{R'B}$ et $\frac{R''A}{R''B}$ deviennent connus puisqu'ils sont dans un rapport connu avec $\frac{RA}{RB}$. Les points R′ et R″ doivent se trouver sur des cercles lieux des points dont les distances à A et B sont dans un rapport connu.

Le problème revient alors à construire un triangle R R′ R″ dont le sommet R est donné, et qui soit semblable à un triangle donné. La solution de ce problème est élémentaire. Appelons $Rr'r''$ le triangle ainsi construit.

Si au contraire nous imposons la seconde condition, les lieux des points R et R′ seront deux cercles passant par A et B, puisque la connaissance de l'angle ARB entraine celle des angles AR′B et AR″B.

Le triangle construit ainsi sera $Rr'_1r''_1$, et il différera généralement de $Rr'r''$. Le problème est justement de choisir le point R de façon que ces deux triangles coïncident. Il suffit évidemment pour cela que $r'$ coïncide avec $r'_1$, car les triangles semblables $Rr'r''$ et $Rr'_1r''_1$ ayant alors un côté commun $Rr'$, le troisième sommet sera aussi commun.

Sur la perpendiculaire au plan de la figure menée par R portons des longueurs $Rm'_1$, $Rp'_1$ égales aux coordonnées rectangulaires du point $r'_1$. Si l'on fait varier la position du point R dans le plan, les points $m'_1$ et $p'_1$ vont décrire deux surfaces $(M'_1)$ et $(P'_1)$.

Portons sur la même droite les longueurs correspondantes $Rm'$, $Rp'$, coordonnées du point $r'$, nous obtiendrons deux surfaces $(M')$ et $(P')$.

Pour que $r'$ coïncide avec $r'$ il faut et il suffit que les points $m$ et $m'$ coïncident, ainsi que $p$ et $p'$.

Le point $m$ se trouvera donc sur la courbe $(\Gamma)$ d'intersection des surfaces $(M')$ et $(M'_1)$, et le point $p$ sur la courbe $(\Delta)$ d'intersection des surfaces $(P')$ et $(P'_1)$.

Si l'on construit les projections $\gamma$ et $\delta$ de ces courbes sur le plan de la figure, leurs points d'intersection seront des points R et le problème s'achèvera alors sans aucune difficulté.

Comme on le voit, cette méthode nous a seulement permis de ramener le problème à celui de l'intersection de deux surfaces construites point par point. Mais on peut remarquer que, malgré cela, elle est susceptible d'un mode d'approximation qui est exactement celui de la méthode de Newton pour déterminer une racine d'une équation, c'est-à-dire l'intersection d'une droite et d'une courbe.

Voici comment nous procéderons :

Nous nous appuierons sur ce fait qu'une surface peut être remplacée dans un certain intervalle par un plan. Comme pour déterminer un plan il faut 3 points, nous allons nous donner 3 points $R_1$, $R_2$, $R_3$, auxquels vont correspondre les 4 séries de trois points

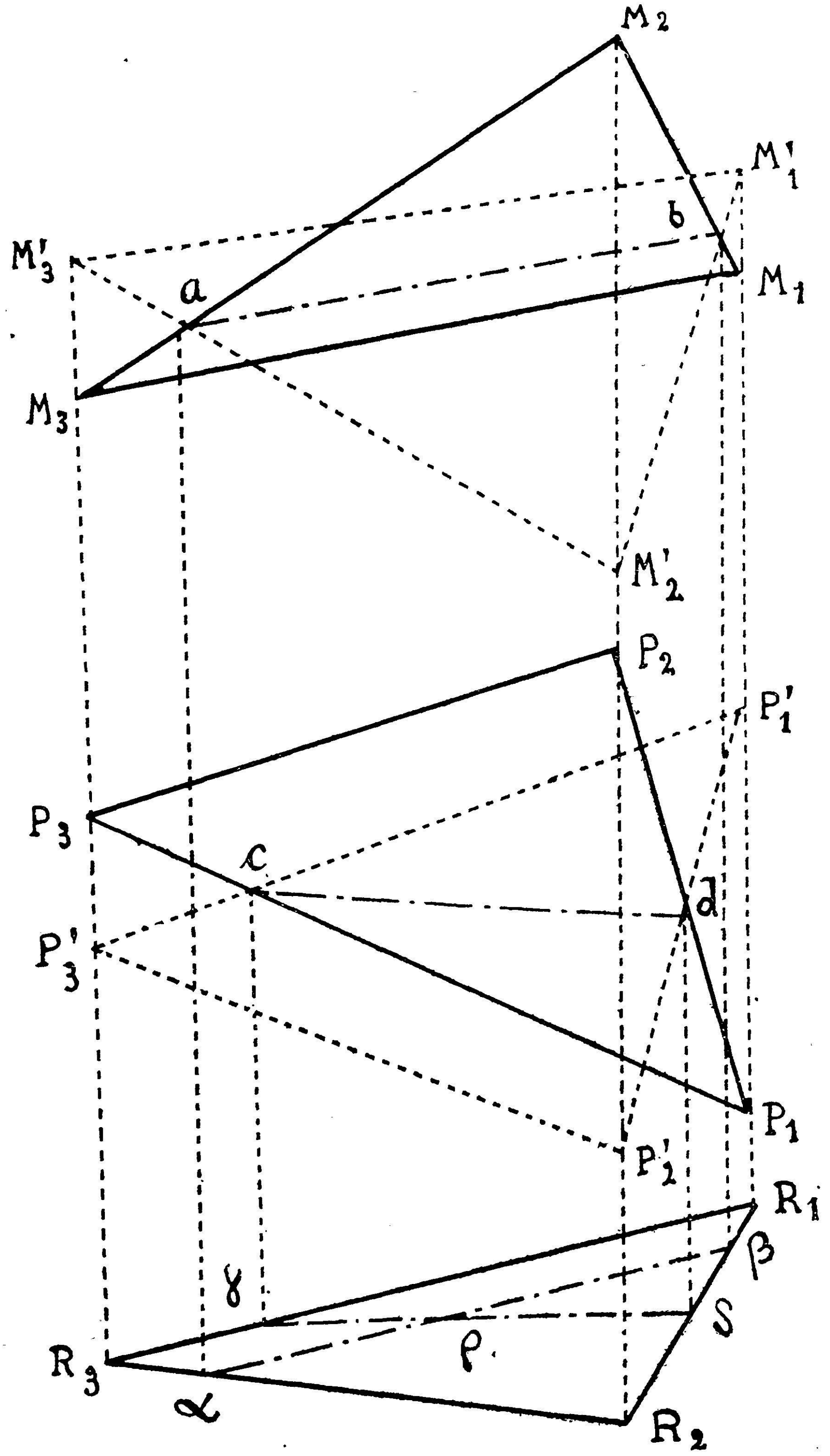
$$\begin{array}{ccc} M_1 & M_2 & M_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ M'_1 & M'_2 & M_3 \\ P'_1 & P'_2 & P'_3 \end{array}$$

Déterminons le segment $ab$ d'intersection des triangles $M_1M_2M_3$ et $M'_1M'_2M'_3$, et soint $\alpha\beta$ sa position sur le plan $R_1R_2R_3$.

Déterminons de même le segment $cd$ d'intersection des triangles $P_1P_2P_3$ et $P'_1P'_2P'_3$ et soit $\gamma\delta$ sa position sur le plan $R_1 R_2 R_3$.

Si les points $R_1 R_2 R_3$ ont été choisis avec assez d'habileté, les segments $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ aurons un point commun $\varrho$ qui sera plus approché de la solution que les points $R_1$, $R_2$, $R_3$.

C'est à partir de ce point $\varrho$ que nous pourrons partir pour appliquer la méthode de Newton.




Considérons la parallèle aux projetantes menées par $\varrho$, elle coupe les surfaces (M) et (M′) en deux points $\mu$ et $\mu'$. Les plans tangents à (M) et (M′) en ces points ont pour intersection une droite $\Delta\mu$.

De même les points d'intersection $\pi$ et $\pi'$ de la même projetante avec les surfaces (P) et (P′) donnent une droite $\Delta_\pi$.

La parallèle aux projetantes qui s'appuie sur $\Delta_\mu$ et $\Delta_\pi$ fournit un point $\varrho_1$, plus approché que $\varrho$ et l'on peut continuer ainsi indéfiniment.

La détermination des plans tangents aux surfaces (M) ou (P) est assez simple. On peut l'obtenir en effet en construisant sur la surface en un point deux tangentes particulières correspondant au déplacement du point R sur le cercle RAB ou sur le cercle lieu des points tels que $\frac{\mathrm{RA}}{\mathrm{RB}}$ soit constant.

L. Ballif (Angoulème).

---

## SUR LES TRIANGLES HÉRONIENS

*Nouvelles formules.*

---

1. — Soient $p$, $q$, $r$ les trois côtés et $s$ le demi-périmètre d'un triangle héronien.

Si F représente la surface, on a :

$$\mathrm{F} = \sqrt{s(s-p)(s-q)(s-r)} .$$

F peut s'écrire :

$$\mathrm{F} = (s-q)(s-r)\sqrt{\frac{s(s-p)}{(s-q)(s-r)}} ,$$

ou, comme $s = s - p + s - q + s - r$,

$$\begin{aligned}\mathrm{F} &= (s-q)(s-r)\sqrt{\left[1 + \frac{s-p}{s-q} + \frac{s-r}{s-q}\right] \cdot \frac{s-p}{s-r}} \\ &= (s-q)(s-r)\sqrt{\frac{s-p}{s-q} + \frac{s-p}{s-r} + \frac{s-p}{s-q} \cdot \frac{s-p}{s-r}} .\end{aligned}$$

Posons

$$\frac{s-p}{s-q} = x , \qquad \frac{s-p}{s-r} = x' ,$$

alors on obtient :

$$\mathrm{F} = \frac{(s-p)^2}{xx'} \sqrt{x + x' + xx'} . \tag{1}$$