Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1914)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: I RAPPORT GÉNÉRAL
Autor: Beke, E.

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 19.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

COMPTE RENDU

DE LA

Conférence internationale de l'enseignement mathématique.

Paris, 1-4 Avril 1914.

(suite et fin)

LES RÉSULTATS OBTENUS DANS L'INTRODUCTION DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL DANS LES CLASSES SUPÉRIEURES DES ÉTABLISSEMENTS SECONDAIRES

I

RAPPORT GÉNÉRAL

présenté à la séance du 2 avril 1914

PAR

E. BEKE

Professeur à l'Université de Budapest.

Introduction.

L'activité de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique est presque sans pareille parmi les activités internationales intellectuelles du XXe siècle. Pourtant, il est incontestable que ce ne sont ni les lacunes de l'enseignement, ni l'insuffisance des résultats qui ont provoqué la réclamation énergique des réformes. En effet, en comparant le fruit des études mathématiques avec celui d'autres études, on avait raison, dans le monde entier, de ne pas être trop mécontent. Des considérations d'ordre plus élevé ont déclanché le mouvement réformiste. Il faut en chercher la vraie origine dans la transformation, survenue au XXe siècle, des idées sur la culture générale et dans les efforts de l'enseignement secondaire tendant à suivre la transformation de ces idées.

La tendance à être exact, dans toutes les recherches, dans la pensée et dans l'action, a rehaussé la valeur des études scientifiques. Il semble que c'est l'avis, parmi les personnalités dirigeantes de l'enseignement secondaire, de celles même qui n'ont pas varié dans leur jugement sur la valeur de l'enseignement des lettres. « Les lettres sont et resteront — dit M. *Liard,* vice-recteur de l'Académie de Paris, dans une réunion tenue au Musée pédagogique en 1904 — comme par le passé, des institutrices éprouvées qu'il serait impossible de suppléer dans leur domaine. Mais dans le domaine qui est celui des sciences positives, on attend des sciences plus d'effets que par le passé, pour la formation des

esprits. » Ce changement de la valeur éducative, attribuée aux Sciences, exige que l'enseignement des Mathématiques, clef de toutes les études scientifiques, devienne plus conforme aux idées nouvelles sur la formation des esprits. Il y a des sciences qui, ayant passé ce que M. *Picard* appelle, d'une expression heureuse, la phase « prémathématique » de leur histoire, viennent de franchir le seuil où les Mathématiques cessent d'être un ornement sans utilité, pour devenir la langue naturelle de la pensée et des déductions scientifiques et, par conséquent, l'instrument du progrès. Il suit de là que l'habitude des Mathématiques et la connaissance de certains éléments des sciences mathématiques qui étaient, jusqu'à présent, le privilège d'un petit nombre d'esprits, doivent pénétrer, désormais, dans des couches plus vastes de l'Humanité. Ce sont probablement ces réflexions qui ont conduit les maîtres de l'enseignement à reviser les matières de l'enseignement mathématique, et ce sont ces pensées ou des pensées analogues qui ont conduit des hommes de valeur, au Congrès des mathématiciens à Rome, à émettre et à réaliser l'idée d'une Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Peut-être y a-t-il, dans le subconscient, d'autres raisons encore qui nous déterminèrent à venir, de toutes les parties du monde, nous réunir pour réformer l'enseignement mathématique et à publier, avec l'aide de toutes les nations et dans un laps de temps relativement court, un ouvrage de 200 fascicules, monument sans précédent d'un effort et d'un esprit international. Je crois pouvoir affirmer, sans crainte de me tromper, que c'est un haut idéal d'internationalisme qui nous a réunis ici. Nous avons senti que l'éducation de la jeunesse n'a pas seulement pour but de former, d'accroître et de maintenir les forces vives d'une nation et l'esprit national, de doter du patrimoine commun les ouvriers actifs de la civilisation nationale; elle a aussi la tâche encore plus noble de créer et de faire vivre un idéal commun à toute l'Humanité. Ce n'est pas par un pur hasard que ce travail international a été entrepris par les représentants de l'enseignement mathématique. M. *Félix Klein,* notre président d'un zèle infatigable, a fait ressortir dans son allocution présidentielle prononcée à la conférence de Bruxelles, que les Mathématiques, n'ayant aucun rapport avec les aspirations nationales, sont prédestinées à être le sujet de discussions internationales.

Quand notre Commission délibère sur la transformation de l'enseignement mathématique en vue de l'adapter aux exigences accrues de la civilisation et de l'idéal de culture de notre temps, elle fait aussi un premier pas dans la voie qui s'élève au-dessus des aspirations nationales, vers des aspirations de l'Humanité. Espérons qu'elle trouvera en cela de dignes continuateurs. C'est de ce point de vue élevé, embrassant la marche de la civilisation

générale, qu'il faut considérer notre action, même si, en apparence, nous nous occupons de questions sans importance extrême, comme celle sur laquelle j'aurai l'honneur de faire un rapport aujourd'hui.

Il nous arrive souvent, à nous autres mathématiciens, de traiter en détail quelque cas particulier après avoir fait la théorie générale d'un problème ; il nous arrive aussi — et cela nous fait beaucoup plus de plaisir — de découvrir dans une question spéciale les caractéristiques d'un problème général et important. Je crois donc que le champ restreint, auquel nous bornerons notre étude, éveillera d'autant plus notre attention qu'il ouvrira une vue sur l'accomplissement de la tâche plus noble dont j'ai parlé plus haut, tâche qui est la plus digne peut-être de l'activité humaine.

I. — Place du Calcul différentiel et intégral dans l'enseignement secondaire.

La tâche que j'ai assumée, sur l'invitation gracieuse de la Présidence de la Commission internationale, est de vous tracer un tableau des résultats produits par l'introduction du Calcul différentiel et intégral, objet principal de notre mouvement réformiste, et — en dehors des résultats des projets — des tendances et des expériences, le temps ayant été trop court pour que les résultats puissent être considérés partout comme définitifs.

Dans les pays où quelques écoles ou quelques types d'écoles enseignent depuis longtemps le Calcul différentiel et intégral, des méthodes et des procédés sont en voie de formation et les résultats peuvent être considérés comme définitivement acquis. Nous aurons le plaisir d'entendre, dans le rapport suivant, un compte rendu des résultats définitifs acquis en France.

Là, depuis 12 ans déjà, l'enseignement secondaire des éléments du Calcul différentiel et, en partie, ceux du Calcul intégral ont pénétré dans les institutions. Nous pouvons dire avec Faust que là « au commencement fut l'action ». L'action réfléchie, fruit du concours de forces organisées. Ce n'est pas seulement le plan d'études officiel qui introduit ces notions dans certaines branches de l'enseignement secondaire, mais on a mis tout de suite des outils parfaits, nécessaires au travail, à la disposition des écoliers et des maîtres. Si l'on trouve quelque part des résultats rapidement acquis, cela doit être bien là, où les célébrités mondiales de notre science, nos maîtres à nous tous, dans leurs ouvrages de Mathématiques et dans leurs écrits philosophiques, ont su se pencher sur l'école secondaire et élever à eux ceux qui y enseignaient les Mathématiques. J'accomplis un devoir agréable en rendant hommage aux esprits dirigeants de cette grande nation

qui, tant dans le passé tout proche que dans le présent, ont pris une part active, par la parole et par l'exemple, à rénover l'enseignement mathématique et qui ont porté haut le flambeau de notre mouvement international.

L'étude des documents et informations reçus m'a convaincu — comme je l'ai déjà dit — que notre mouvement réformiste a déjà produit partout un immense effet en donnant une impulsion aux aspirations rénovatrices. Cela ressort surtout des réponses faites à la première question. Cette question était ainsi rédigée :

« Dans quelle mesure a-t-on introduit les premiers éléments de Calcul différentiel et intégral dans les écoles moyennes de notre pays? »

Les brochures publiées et les informations permettent de constater que *dans tous les pays où, pendant les 12 dernières années, un nouveau plan d'études des écoles secondaires est entré en vigueur, une place plus ou moins grande y a été réservée à la notion de fonction et aux éléments du Calcul différentiel et intégral.* — La notion de fonction a été presque entièrement négligée il y a douze ans, ce que le Président de notre Commission a constaté pour son propre pays [1]; ses paroles s'appliquant à presque tous les autres pays. Aujourd'hui, au contraire, il n'existe plus de pays où la notion de fonction ne trouve place dans l'enseignement secondaire et même — à très peu d'exceptions près — les éléments du Calcul différentiel et intégral figurent dans le plan d'études. Si l'on voit le changement rapide des choses, on ne peut ne pas être frappé d'admiration devant l'étendue du succès de notre mouvement international. Comment est-il arrivé que l'école, institution conservatrice s'il en fut, s'est transformée si rapidement dans le monde entier, sous l'impulsion de l'énergie du professeur anglais, M. *Perry,* sous la suggestion de l'action française, sous l'influence de la propagande active et multiple de M. *Félix Klein?* Cela ne peut être que grâce aux idées latentes qui vivaient dans l'esprit des pédagogues et qui n'attendaient qu'une impulsion. Cette transformation n'est pourtant pas encore ce que M. *Klein* avait souhaité et nous tous avec lui; elle n'a pas encore mis la notion de fonction au centre de tout l'enseignement secondaire, pour que cette notion y agisse comme ferment et vivifie toute la matière enseignée [2]; pourtant nous avons le droit d'être fiers de ce que, partout, l'école secondaire a largement ouvert ses portes devant les idées nouvelles. Pour le faire voir en détail, nous allons passer en revue les états de la question dans les divers pays. Je crois remplir le mieux mon devoir de rapporteur général en faisant parler, le plus souvent possible, MM. les rapporteurs eux-mêmes ou en puisant

[1] Klein-Schimmack, p. 27.
[2] Klein-Riecke, p. 4.

mes informations dans les documents publiés par la Commission internationale ; exceptionnellement, je demanderai la permission d'exprimer mon propre avis.

II. — Rapport détaillé sur l'introduction du Calcul différentiel et intégral dans les établissements secondaires des différents Etats.

1. Allemagne. — Le désir de transformer l'enseignement mathématique a depuis longtemps préoccupé l'opinion publique en Allemagne, mais le courant d'opinion ne s'est dessiné que le jour où M. *Félix Klein,* notre président actuel, s'est mis à la tête des réformateurs. Dans son article de 1902, dans son cours de vacances de 1904 à Göttingue et depuis, dans ses écrits et dans ses leçons, il ne se lassait pas de démontrer la nécessité de la réforme de l'enseignement mathématique. Son collaborateur dévoué, M. *Lietzmann* nous a informé des résultats acquis : en *Prusse,* où l'on n'a pas fait un nouveau plan d'études dans les dernières années, l'enseignement du Calcul différentiel et intégral n'est pas introduit officiellement, pourtant il a trouvé place dans presque toutes les écoles réales, dans beaucoup de gymnases réaux et dans un bon nombre de gymnases ; en *Bavière,* il figure déjà dans le plan d'études des écoles réales et il y a lieu d'espérer qu'il entrera dans le plan d'études qu'on prépare pour les autres genres d'écoles ; en *Saxe,* le nouveau plan d'études des écoles réales l'autorise pourvu que l'état de la classe en fasse prévoir des fruits ; il est porté sur le programme de tous les genres d'écoles par le plan d'études de 1912 en *Wurtemberg* et en *Bade.* Dans d'autres Etats, où il n'y a pas un nouveau plan d'études, il est donné dans presque toutes les écoles réales et dans nombreux gymnases. A *Hambourg,* comme un autre membre zélé de notre Commission, M. le directeur *Thaer,* nous en informe, le Calcul différentiel et intégral est facultatif dans les gymnases depuis 6 ans, le Calcul différentiel est obligatoire et le Calcul intégral facultatif dans les gymnases réaux depuis 40 ans, et les Calculs différentiel et intégral sont tous les deux obligatoires dans les écoles réales depuis 1897. On mesure l'étendue de la conquête qu'a faite la notion de fonction dans les Etats allemands, si l'on jette un regard sur les récents livres de classe. Je ne veux citer que la 2e partie du 1er volume du *Mathem. Unterrichtswerk,* par MM. Schwab et Lesser (Ausgabe A), Leipzig, 1909 et *Lehrbuch der Mathematik,* par MM. Behrendsen et Götting (Ausgabe B), Leipzig, 1912 ; les représentations graphiques et les chapitres du Calcul différentiel qu'on y trouve sont la preuve que tout l'enseignement mathématique a profondément changé dans les dernières années.

2. Australie. — M. le professeur *Carslaw* nous a informé que

dans les classes supérieures des écoles de New-South-Wales on enseigne le Calcul différentiel et intégral à ceux des élèves qui montrent une aptitude spéciale pour les mathématiques

3. Autriche. — Les mathématiciens autrichiens, surtout les professeurs appartenant à l'enseignement supérieur, M. *Czuber*, actuellement l'un des membres du Comité central, et M. *Hočevar* ont adhéré dès le commencement au programme de M. *Klein* et préparaient l'opinion publique à accepter la réforme de l'enseignement mathématique. Au Congrès de Rome, M. le professeur *Suppantschitsch*, le rapporteur actuel, ne put rendre compte que du fait que les élèves bien doués avaient le moyen de connaître à l'école les éléments du Calcul différentiel et intégral, pourtant il parut juger les circonstances propices puisqu'il ajouta à la fin de sa conférence : « En résumé, j'espère qu'en Autriche les expériences actuelles finiront par nous convaincre qu'il ne faut pas trop insister sur le programme invétéré, lorsqu'on veut que les jeunes gens aient, en sortant, le goût des sciences et la faculté de comprendre la vie moderne [1]. » Et, en effet, avant qu'une année se fût écoulée, le nouveau plan d'études officiel fit une réalité de l'espérance des mathématiciens : il prescrit l'enseignement du Calcul différentiel pour les gymnases et les gymnases réaux et celui du Calcul différentiel et intégral pour les écoles réales, le Calcul intégral trouvant place aussi dans l'enseignement d'un grand nombre de gymnases. La notion de fonction pénètre toutes les parties de l'enseignement depuis les procédés de calcul élémentaire ; on tire parti de l'étude des grandeurs directement et inversement proportionnelles pour rendre familière l'idée de fonction et l'on s'élève progressivement au cours de l'enseignement de l'Algèbre par le moyen de représentations graphiques nombreuses.

4. Belgique. — Le plan d'études date de 1888 ; la représentation graphique d'une fonction et le Calcul différentiel et intégral n'y figuraient naturellement pas ; et l'enseignement mathématique n'a guère varié depuis 1888, sauf en ce qui concerne l'enseignement de l'Arithmétique qui est devenu plus pratique. Dans son rapport adressé à la Commission internationale, M. Ploumen, inspecteur de l'enseignement moyen, nous dit que son gouvernement a constitué récemment une commission qui s'occupe des réformes à introduire dans l'enseignement secondaire. M. *Ploumen* choisit la matière de l'enseignement mathématique en se laissant conduire par des vues pédagogiques générales et par les nécessités des différentes carrières. Il attribue une importance capitale à la représentation graphique des fonctions et, en général, au rôle de l'idée de fonction, sur laquelle il désire qu'on insiste dès le commencement et il réserve une place relativement grande au Calcul diffé-

[1] Atti del IV. Congresso, etc., t. III, p. 478.

rentiel et intégral. La fin de son rapport définit nettement l'importance et les méthodes des matières nouvelles.

« La puissante impulsion, dit-il, conséquence probable de la réalisation de ces tendances rénovatrices, ne peut manquer d'être salutaire à l'influence des mathématiques sur l'esprit et le caractère de nos élèves, ainsi que sur leurs chances d'avenir. Mais il faut, pour cela, que les méthodes actives restent en honneur dans nos classes, que les diverses branches scientifiques se rapprochent pour se prêter un mutuel appui et que la série de nos déductions rigoureuses et abstraites gardent comme source et point de départ l'intuition et l'observation concrètes. » Peut-être aurons-nous l'occasion, dans une des prochaines séances, d'entendre exposer l'état actuel de la question par des personnes compétentes.

5. Brésil. — Le Calcul différentiel et intégral a été enseigné avec la Géométrie analytique depuis 1891 jusqu'à 1901 ; à cette époque, malgré les résultats satisfaisants, il fut supprimé, de sorte qu'actuellement il ne figure pas sur le programme de l'enseignement secondaire ; seule la dérivée est définie dans certaines écoles. Notre informateur, M. *Eugenio de Barros Raja Gabaglio,* nous fera peut-être le plaisir de présenter un Mémoire sur l'enseignement du Calcul différentiel et intégral.

6. Danemark. — Le récent plan d'études résout la question de telle manière qu'il laisse entière liberté aux écoles de mettre le Calcul différentiel et intégral à la place des chapitres suivants : déterminants ; fractions continues ; équations indéterminées ; étude détaillée de l'équation des coniques ; icosaèdre, dodécaèdre et projection orthogonale.

M. *P. Heegaard,* qui a bien voulu nous renseigner sur ces questions, remarque qu'en 1913, toutes les écoles autorisées ont opté pour le Calcul différentiel et intégral.

7. Etats-Unis. — Comme M. D. E. Smith, réformateur zélé et l'un des initiateurs de la Commission nous en informe, le Calcul différentiel et intégral ne figure pas dans l'enseignement secondaire ; on ne peut même pas le rendre facultatif, puisque les élèves des classes supérieures sont trop absorbés par la préparation de l'examen d'admission des Collèges. Tant qu'il ne sera pas porté sur le programme de cet examen, il y a peu de chances pour qu'il entre parmi les matières de l'enseignement secondaire. Pourtant M. Smith garde l'espoir qu'avant peu d'années le Calcul différentiel et intégral sera introduit dans les établissements secondaires professionnels. Connaissant l'activité énergique déployée par nos collègues américains, dans le passé et dans le présent, sur le terrain de la réforme de l'enseignement mathématique (nous n'avons qu'à rappeler l'œuvre de MM. D. E. Smith, Moore, Young) et voyant l'immense essor de l'activité mathématique d'outre-mer qui éblouit nos yeux et qui n'est pas assurément

sans exercer une influence heureuse sur les professeurs de l'enseignement secondaire ; en prenant confiance enfin du contact qui existe, malgré la distance, entre les travailleurs des deux continents : nous ne pouvons pas douter qu'avant peu de temps le développement libre de l'enseignement mathématique aura fait le pas décisif.

8. France. — La conférence suivante nous donnera un exposé complet sur l'enseignement du Calcul différentiel et intégral dans les écoles françaises. Je me borne à rappeler qu'on y attribue, depuis 1902, plus d'importance à l'étude des fonctions et des dérivées qu'auparavant.

Le rapporteur français M. *Ch. Bioche,* qui a bien voulu nous fournir les informations, fait observer que dans la classe de *Mathématiques spéciales,* aujourd'hui comme avant, on fait une étude approfondie du Calcul différentiel et intégral. Je ne peux passer sous silence l'influence extraordinairement heureuse qu'ont exercé, dans le sens de nos aspirations, les excellents ouvrages de M. *Tannery,* M. *Borel,* M. *Bourlet,* M. *Grévy* et M. *Commissaire.* Nous devons une reconnaissance particulière à deux hommes qui, précurseurs avant tous, n'ont pas eu la joie de voir leur labeur porter des fruits. J'entends en premier lieu *Jules Tannery,* bien connu de tous les mathématiciens, éducateur des futurs professeurs. Dans son premier Mémoire scientifique, publié en 1875 dans les Annales de l'Ecole Normale où il expose la théorie, alors toute nouvelle, de Fuchs sur les équations différentielles linéaires, il définit l'idéal de sa vie, avec sa grande modestie élevée, en disant : « Ceux qui aiment la Science et qui ont trop de raisons pour se défier de leurs facultés d'invention, ont encore un rôle utile à jouer : celui d'élucider les recherches des autres et de les répandre ; c'est ce que j'ai essayé de faire dans ce travail. »

Cet idéal, il l'a bien servi dans les travaux scientifiques et pédagogiques de toute sa vie. Non content d'écrire pour le public mathématique proprement dit, tant pour le public mathématique français que pour celui de tous les pays, des traités excellents qui captivent le lecteur par le fond et par la forme et j'ajouterai, par la force inspiratrice du Maître, il a montré aux professeurs de l'enseignement secondaire par son ouvrage didactique, publié dans la Collection de M. *Darboux,* quels trésors se cachent dans les connaissances élémentaires qui s'enseignent tous les jours et quel vaste champ de réflexions s'ouvre dans ce qu'on croit fermé par une muraille de Chine, les mathématiques d'école. Ce n'est pas tout. Il s'est mis à la tête des réformateurs et il a écrit un livre à l'usage des élèves pour leur apprendre les connaissances mathématiques, indispensables à qui aspire à la culture générale de l'esprit et à ceux surtout qui, naturalistes, médecins ou économistes, veulent mettre les méthodes exactes au service de la

Science. Cette tentative fut des plus heureuses au point de vue pédagogique. Les professeurs allemands qui ne peuvent pas lire ce livre de Tannery dans l'original doivent être reconnaissants à leur maître, M. *Félix Klein*, pour avoir encouragé une traduction allemande, le rendant ainsi accessible à tous ses compatriotes.

Nous devons un hommage particulier à la mémoire d'un des réformateurs français les plus actifs, *Carlo Bourlet*, qui, par son activité et son zèle inlassables et par l'exemple de ses ouvrages didactiques, a largement contribué à la propagation des idées nouvelles. Quelques semaines avant l'accident déplorable dont il fut la victime, au grand dommage de la science française et surtout du mouvement réformiste, nous avons causé, à Heidelberg, du programme de la Conférence internationale de Paris et des préparatifs qu'il restait à faire. De toutes ces paroles se dégageait une confiance dans le mouvement réformiste et dans l'expansion des méthodes scientifiques exactes. Il avait de beaux projets : des projets d'ordre scientifique et pédagogique. Sa perte irréparable les empêchera de se réaliser.

9. Hollande. — Sans qu'il figure dans le plan d'études actuel, on espère, suivant M. *Cardinaal*, qui a bien voulu mettre à notre disposition les renseignements nécessaires, que le Calcul intégral et différentiel sera introduit dans le prochain plan d'études. M. *Cardinaal* nous écrit que, dans certaines bonnes classes, on a déjà fait des tentatives et elles ont été couronnées de succès.

10. Hongrie. — Le dernier plan d'études date de 1899, mais déjà le plan d'études de 1879 mentionne les éléments de la Géométrie analytique, l'étude analytique et la représentation graphique des fonctions du second degré et la solution, par des moyens élémentaires, de certains problèmes de maximum et minimum. Cela prouve que les éléments de la notion de fonction avaient figuré sur le programme des études secondaires en Hongrie bien avant que le mouvement réformiste ait pris naissance. Il y a lieu d'espérer que le prochain plan d'études en embrassera davantage et notamment les éléments du Calcul différentiel et intégral. Nous fondons cet espoir sur le Décret de M. le Ministre de l'Instruction actuel, décret instituant les travaux préparatoires d'un nouveau plan d'études, où M. le Ministre insiste particulièrement sur la place importante que doit recevoir dans l'enseignement mathématique la notion de fonction.

Le rapporteur hongrois se croit autorisé à déclarer que M. le Ministre souhaite qu'on entende aussi par là l'introduction des éléments du Calcul différentiel et intégral. Dans un avenir prochain, le plan des études mathématiques aura donc subi une réforme complète et officielle ; mais on enseigne dès maintenant les éléments du Calcul différentiel et intégral dans un tiers à peu près des établissements secondaires. La représentation graphique

des fonctions a pénétré presque partout, on l'emploie dans la plupart des écoles. Quelques livres de classe récemment parus donnent déjà les éléments du Calcul différentiel et intégral.

11. Iles Britanniques. — M. *C. Godfrey,* qui nous renseigne dans un rapport détaillé sur toutes les questions posées, fait observer que les jeunes gens de 17 à 19 ans se préparant aux études mathématiques reçoivent, d'après une pratique en honneur depuis 20 à 25 ans, un enseignement spécial et relativement étendu du Calcul différentiel et intégral, enseignement qui s'appuie sur des méthodes rigoureuses. Une pratique un peu moins ancienne mais vieille d'au moins 15 ans fait donner aussi un enseignement spécial aux élèves se destinant à la carrière militaire ou au génie civil. Cet enseignement est, dans beaucoup d'établissements, commun aux deux groupes mentionnés. Là, où ces groupes sont séparés, on a moins d'égard à la rigueur pour le second groupe que pour le premier. La nouvelle tendance paraît être, d'après M. *Godfrey :* « Calculus for the avarage boy ». Dans certaines écoles, le plan d'études général embrasse le *Calculus ;* dans d'autres, on fait des tentatives. Pour juger le progrès en Angleterre, point n'est besoin d'analyser les nombreux cours élémentaires de Calcul différentiel et intégral, tel que les ouvrages très répandus de MM. *Mercer* et *Gibson,* qui embrassent un vaste domaine du Calcul infinitésimal et font usage parfois de méthodes élémentaires intéressantes ; il suffit de comparer, parmi les anciens ouvrages excellents, l'Algèbre de *Todhunter,* que je prends aujourd'hui même avec piété en main et qui m'était d'un usage de tous les jours à l'époque où j'appartenais à l'enseignement secondaire ; il suffit de comparer ce livre, dis-je, avec n'importe lequel des manuels aujourd'hui en usage, par exemple avec celui de MM. *Godfrey* et *Siddons* que notre éminent informateur ne mentionne point. Dans l'Algèbre de *Todhunter* qui, pour la richesse des matières, pour la clarté et la brièveté de l'exposition, était un modèle, nous ne trouvons pas une figure, pas un mot sur la représentation graphique des fonctions ou sur la notion de dérivée. Par contre, nous ne doutons pas que l'ouvrage de MM. *Godfrey* et *Siddons* ne transforme complètement le monde des idées mathématiques de l'« avarage boy », tant l'introduction et l'utilisation de la notion de fonction, la représentation graphique, les principes bien groupés du *Calculus* y sont clairs, précis et présentés sans artifice.

12. Italie. — M. *Castelnuovo,* délégué italien, a bien voulu nous informer que dans le nouveau plan d'études du *Liceo moderno,* qui entrera en vigueur cette année, le Calcul différentiel et intégral est porté sur le programme des deux classes supérieures. Actuellement il n'est enseigné qu'exceptionnellement dans certaines écoles. Nous fondons de grands espoirs sur la transforma-

tion de l'enseignement mathématique secondaire en Italie. Il ressort clairement du plan d'études que, tout en se bornant à un programme minimum, on veut y apporter une entière précision en suivant les traditions de l'enseignement mathématique italien. Les instructions insistent particulièrement sur ce point que l'enseignement doit éviter avec un égal soin l'empirisme grossier qui obscurcit le caractère logique de la formation mathématique et le criticisme subtil pour lequel l'esprit des élèves n'est pas suffisamment mûr. Nous attendons avec un vif intérêt comment, dans le pays de la critique mathématique où *Dini, Genocchi* et *Peano* ont traité des principes du Calcul infinitésimal d'une façon modèle, comment, dans ce pays, on présentera ces principes aux élèves. Nous pouvons être sûr que si ce travail est fait par les mêmes hommes qui, dans leurs manuels de géométrie, si intéressants, mais si difficiles à suivre dans d'autres pays, ont cherché avec virtuosité à concilier une exposition scientifique rigoureuse avec le but que se propose l'enseignement secondaire : notre mouvement réformiste sera infiniment redevable à nos compagnons de lutte italiens.

13. Norvège. — Le plan d'études n'est changé dans ce pays que graduellement, avec précautions. Celui de 1911, comme M. *Alfsen* nous l'écrit, n'innove dans le sens des idées nouvelles qu'en ce qu'il introduit la représentation graphique des fonctions ; il ne touche pas aux autres parties de l'enseignement mathématique et ne fait pas mention du Calcul différentiel et intégral. Mais les professeurs qui se déclarent prêts à enseigner les éléments du Calcul différentiel et intégral sont autorisés à le faire. Cependant, jusqu'ici, aucun d'eux n'a déclaré vouloir faire une tentative ce que M. *Alfsen* attribue aux circonstances que ce nouvel ordre des choses n'a commencé que cette année et qu'il manque encore des manuels scolaires. Un manuel qui paraîtra prochainement changera peut-être la face des choses.

14. Roumanie. — La brochure publiée par M. *Tzitzéica* sur les mathématiques dans l'enseignement secondaire nous permet de constater que le Calcul différentiel et même la différentiation des fonctions de plusieurs variables sont inscrits dans le récent plan d'études de la section réale.

15. Russie. — Suivant le rapport détaillé et complet de M. *C. Possé,* le Calcul différentiel et intégral figure dans les plans d'études de 1907 des écoles réales et de quelques écoles particulières de jeunes filles, ainsi que dans celui datant de 1910 des écoles militaires, mais il n'est pas enseigné, ni même les éléments de la Géométrie analytique, dans les gymnases où un plan d'études plus ancien est encore en vigueur.

16. Serbie. — M. *Petrovich,* délégué serbe, nous apprend que des personnes compétentes ont élaboré depuis longtemps un pro-

gramme détaillé pour l'enseignement du Calcul différentiel et intégral, mais, à la suite des circonstances politiques, les réformes ont dû subir un retard.

17. Suède. — D'après le rapport de M. *D.-E. Goransson*, délégué suédois, le plan d'études de 1905 embrasse, tant pour les gymnases que pour les écoles réales, la notion de fonction et la représentation graphique; pour les écoles réales, il prescrit en outre la différentiation de quelques fonctions simples, mais non l'intégration; cependant, dans la plupart des écoles, on introduit la notion de l'intégrale indéfinie et on l'applique à la détermination des aires et des volumes.

18. Suisse. — Il n'y a pas un plan d'études uniforme pour tout le pays, chaque canton étant autonome dans les affaires de l'instruction publique. Cependant le programme officiel de l'examen de maturité (baccalauréat) et celui de l'examen d'admission à l'Ecole polytechnique exercent une certaine influence dans le sens de l'uniformisation. Ces programmes ne mentionnent pas les éléments du Calcul différentiel et intégral; néanmoins, on les enseigne dans 84 pour cent des écoles réales et dans 21 pour cent des gymnases. On les enseignait dans certaines écoles bien avant que les tendances rénovatrices se fissent jour, par exemple à l'école réale de Bâle depuis 50 ans, comme l'a remarqué M. *Fehr*, l'âme de notre Commission, dans sa conférence au Congrès de Rome. Nous apprenons dans cette conférence que l'Association suisse des professeurs de mathématiques a adopté, à l'unanimité des voix, en 1904, la proposition du rapporteur (M. *Fehr*), déclarant que, « en raison de leur importance et de leur portée, la notion de fonction et les problèmes fondamentaux qui s'y rattachent appartiennent au programme de l'enseignement mathématique des écoles moyennes ». Une telle déclaration a plus d'importance en Suisse qu'ailleurs, car la Suisse est le pays heureux où, d'après M. *Brandenberger* qui nous a aimablement informé, la conférence des professeurs détermine elle-même le plan d'études et les autorités se bornent à en prendre connaissance. C'est donc à la réunion des professeurs de 1904 ou plutôt au conférencier de cette réunion que revient le mérite d'avoir contribué à développer le rôle de la notion de fonction dans les gymnases et les écoles réales de la Suisse.

Résumé.

Pour avoir une vue d'ensemble, nous pouvons ranger les Etats dont il a été question plus haut en deux catégories :

I. Les éléments du Calcul infinitésimal figurent sur le programme officiel des écoles ou sur le plan d'études établi par les

écoles elles-mêmes dans les pays suivants : Parmi les Etats allemands : Bavière, Wurtemberg, Bade, Hambourg ; parmi les autres Etats : Autriche, Danemark, France, Iles Britanniques, Italie, Roumanie, Russie, Suède, Suisse.

II. Les éléments du Calcul infinitésimal ne figurent pas sur le plan d'études, mais ils sont enseignés dans un grand nombre d'écoles : en Prusse, Saxe, Hongrie, Australie, et ils le seront probablement avant peu de temps en : Hollande, Norvège, Belgique et Serbie.

Nous pouvons, je crois, conclure qu'il n'existe pas d'Etats, ni parmi les Etats mentionnés ni parmi les autres, où les aspirations tendant à introduire dans l'enseignement la notion de fonction et la représentation graphique, n'aient acquis une force considérable. Il n'existe peut-être pas de manuel scolaire récent, ni d'école où les réformes n'aient trouvé quelques applications. En constatant ce fait comme un des succès les plus éclatants de notre propagande, nous pouvons dire que nos personnalités dirigeantes ont compris l'esprit des temps nouveaux et elles ont donné l'impulsion à la marche naturelle du progrès. J'ai la conviction ferme que le progrès ultérieur, en surmontant peut-être plus d'obstacles encore dans sa marche lente, mais sûre, assurera partout une place au Calcul différentiel et intégral dans l'enseignement secondaire, et aussi dans la conscience des classes instruites. Notre conception du monde deviendra, par la connaissance du Calcul infinitésimal, science générale des variations, plus mathématique que par les connaissances enseignées jusqu'ici à l'école. *Pour cela, il faut, par une action méthodique et constante, soutenir l'intérêt éveillé, soumettre à un examen approfondi les matières de l'enseignement mathématique et, surtout, perfectionner sans relâche les méthodes de l'enseignement.*

III. — Etendue et applications du Calcul différentiel et intégral.

Nous avons maintenant à rechercher, dans quelle étendue le Calcul différentiel et intégral est enseigné ?

Nos conclusions d'aujourd'hui, comme j'ai déjà eu l'occasion de le remarquer, ne sauraient être définitives. Dans une institution si lente à se transformer, comme l'école, et après l'intervalle de temps si court, écoulé depuis l'introduction des matières nouvelles, les résultats sont nécessairement sujets à varier ! Il fallait des siècles et des génies comme *Euler* et *Lagrange*, sans compter les excellents esprits méthodiques du milieu du dernier siècle, auteurs des manuels scolaires — pour que les Mathématiques enseignées aux écoles secondaires eussent pris une forme achevée. Et encore, cela ne s'applique qu'à l'Algèbre et à une partie de la

Géométrie, en premier lieu, à la Trigonométrie. Il ne s'agit donc aujourd'hui que de nous rendre compte des différentes méthodes employées et d'amener les conceptions diverses à se placer sur un terrain commun. Nous pouvons espérer qu'avec le concours des maîtres de l'enseignement supérieur et de ceux de l'enseignement secondaire, ce terrain aussi sera conquis en peu de temps pour l'école. Nous avons pu constater ce qui suit :

a) *Fonctions d'une et de plusieurs variables.* Le Calcul infinitésimal n'est appliqué presque partout qu'aux fonctions d'une variable; exceptionnellement, nous trouvons des fonctions de deux variables sur le programme des écoles réales de Wurtemberg, de Hambourg, de Lugano en Suisse et dans le projet serbe. Nous ne prenons pas en considération ici l'enseignement dépassant le niveau moyen et donné à certains élèves ou à certains groupes.

b) *Fonctions différentiées.* Partout, où l'on enseigne la différentiation, on l'applique naturellement aux polynomes et aux fonctions rationnelles — ou au moins, parmi les dernières, au quotient de deux polynomes linéaires. Là, il n'y a aucune difficulté dans le passage à la limite. Par contre, pour différentier les fonctions trigonométriques et exponentielles, il faut connaître les valeurs de $\lim\limits_{x=0} \frac{\sin x}{x}$ et de $\lim\limits_{z=0} (1+z)^{\frac{1}{z}}$ ou des limites d'expressions équivalentes. On conçoit donc que dans les écoles où la notion de limite n'est pas approfondie, et là où l'âge des élèves ne permet pas de suivre les raisonnements conduisant à ces deux limites, on ne s'occupe pas de la différentiation des fonctions trigonométriques et exponentielles. Tel est le cas des écoles françaises (il ne s'agit pas, bien entendu, des classes de *Mathématiques spéciales*[1]), des manuels scolaires anglais et du nouveau plan d'études de l'Italie. Par contre nous la trouvons enseignée dans les écoles allemandes, autrichiennes, russes, suisses, danoises et dans certaines écoles hongroises.

S'il m'est permis d'exprimer une opinion personnelle, je dirai que la différentiation ne doit pas être considérée comme un but absolu ; son importance dans l'enseignement secondaire vient des applications géométriques et physiques qui s'y rattachent; il est donc indispensable en vue des applications de savoir différentier les fonctions trigonométrique et exponentielle et leurs fonctions inverses. La première ne présente aucune difficulté grave, puisque la seule limite nécessaire ou, si l'on veut, la dérivée de $\sin x$ pour

[1] Il ne faut pas confondre la classe de *Mathématiques*, qui est la dernière classe de l'enseignement secondaire proprement dit, et la classe de *Mathématiques spéciales* qui prépare les élèves au concours pour l'Ecole polytechnique et quelques autres grandes écoles.

$x = 0$ peut s'obtenir facilement au moyen des connaissances trigonométriques. Le calcul de $\lim_{z=0} (1 + z)^{\frac{1}{z}}$ est autrement ardu et plus éloigné des connaissances élémentaires des élèves. C'est probablement la raison pour laquelle plusieurs auteurs voudraient le supprimer ou le faire par des moyens plus faciles que ceux ordinairement employés dans les Cours. J'avoue qu'aucun des récents manuels scolaires — et j'ai examiné plusieurs des manuels allemands, français ou anglais que MM. les rapporteurs m'ont signalés — ne m'a satisfait à cet égard. Parmi les procédés cherchant à faciliter la marche, le plus recommandable est peut-être celui qu'on trouve dans le Cours autographié de M. *Félix Klein*, procédé qui consiste à calculer l'expression $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pour quelques valeurs suffisamment grandes de n, se bornant ensuite à dire que le raisonnement par induction manque de rigueur

c) *Notation des dérivées*. Il est à remarquer que, dans la plupart des cas, on préfère la notation de *Lagrange* ou la notation $Df(x)$ à celle de Leibniz; en France, en Italie, dans certains manuels scolaires anglais et dans plusieurs écoles suisses, cette dernière est complètement abandonnée. Là, où elle est employée, on invoque des raisons historiques en évitant jusqu'à l'apparence même de définir un véritable quotient. *Poincaré* dit à ce sujet : « Sans doute, il faut connaître la notation différentielle; il faut pouvoir manier ce langage qui est celui de tout le monde, de même qu'il faut savoir l'allemand... parce qu'elle [la langue allemande] est parlée par 60,000,000 d'hommes, dont beaucoup sont des savants. Mais c'est une science dangereuse qu'il ne faut aborder que quand on a appris à penser en dérivées... Pour donner cette habitude aux élèves, il faut dans les commencements employer exclusivement la notation de *Lagrange*... Ce sera donc la dérivée que l'on définira d'abord; je voudrais que cette définition soit préparée par des exemples concrets. Il y en a deux, celui des tangentes, celui de la vitesse ; et ils ne sont pas à dédaigner puisque le premier a été le point de départ de *Fermat* et de *Roberval*, le second celui de *Newton*... (Conférence du Musée pédagogique, 1904, p. 22; l'*Enseign. mathém.*, numéro de juillet 1904, p. 276-277).

d) *Introduction de la notion d'intégrale*. Dans la plupart des Etats, on ne se contente pas de définir la dérivée, on introduit aussi l'intégrale. Et cela s'explique aisément. Nous savons bien qu'il importe de connaître la dérivée pour exécuter avec une méthode unique et déterminée tous les calculs relatifs aux tangentes qu'on rencontre en Mathématiques et les calculs relatifs aux vitesses et aux accélérations qu'on rencontre en Physique, pour se faire une idée précise de la mesure de la variation d'une fonction, pour aborder directement et avec méthode les problèmes

de maximum et de minimum traités jusqu'à présent par des artifices et des moyens détournés. Il importe tout autant de déterminer les aires et les volumes qui figurent sur le programme de l'enseignement mathématique et les quelques intégrales cachées qui interviennent au cours de l'enseignement physique par la méthode de l'intégration; méthode plus simple, plus économique, plus naturelle et surtout plus honnête et plus digne de l'esprit de l'enseignement mathématique que les anciennes méthodes d'exhaustion ou le principe indémontré de Cavalieri. Pourtant, dans plusieurs Etats où les matières nouvelles n'apparaissent que dans les classes supérieures, le programme de l'enseignement mathématique entier n'ayant pas été remanié, les calculs relatifs à la Stéréométrie précèdent les méthodes infinitésimales et, par conséquent, celles-ci ne peuvent plus être utilisées dans le but indiqué plus haut. Cela explique que, dans certains Etats, seul le Calcul des dérivées est enseigné. Tels sont : la France, mais ici les Classes de Mathématiques font connaître l'intégrale comme fonction primitive; la Prusse, où le Calcul différentiel est enseigné dans presque toutes les écoles réales, tandis qu'on est réservé relativement au Calcul intégral; la Bavière où le plan d'études embrasse le Calcul différentiel sans le Calcul intégral; l'Autriche où, dans certaines écoles, il n'y a pas de Calcul intégral. Par contre, le Calcul intégral est introduit en Russie, en Danemark, dans un grand nombre d'écoles anglaises, dans la plupart des écoles prussiennes et autrichiennes, en Wurtemberg, en Suisse, en Hongrie, dans le plan d'études italien qui va entrer en vigueur (mais là, seule l'intégrale définie est admise) et dans le projet du plan d'études serbe.

D'après mon avis, l'introduction de la fonction primitive avec utilisation de considérations géométriques ne se heurte à aucune difficulté de la part des élèves et elle a, au point de vue philosophique, autant d'importance que l'introduction des dérivées. Elle en a plus encore au point de vue de l'économie de l'enseignement, et cela n'est pas à dédaigner quand il est question de ne pas allonger le programme des études pour des élèves menacés déjà de surmenage. J'ose exprimer l'opinion que le développement réformiste interdira de s'arrêter à mi-chemin.

Partout où la notion d'intégrale est enseignée, elle suit celle de dérivée, quoique, au point de vue de la méthode et même de l'histoire, le contraire puisse aussi bien s'imaginer. Dans le cours de vacances de l'Université de Gœttingue, M. le professeur *Runge* a recommandé cette voie, comme M. *Lietzmann* m'en a aimablement informé. Mais il n'existe pas, à ma connaissance, de manuel scolaire qui ait pris ce parti. Dans son cours déjà mentionné, M. le professeur *Klein* pose en même temps le problème des tangentes et celui de la quadrature, ce qui l'amène à ne pas séparer

le Calcul différentiel et le Calcul intégral. L'introduction simultanée des deux notions fondamentales ne présente que des avantages, même dans l'exposition du Calcul différentiel.

Les commencements du Calcul intégral sont divers ; dans certaines écoles, l'intégrale définie est enseignée avant l'intégrale indéfinie, dans d'autres, la marche est inverse. Les écoles allemandes pratiquent les deux méthodes; en France, seule la fonction primitive est enseignée ; en Autriche, l'intégrale définie précède l'intégrale indéfinie, sauf dans certaines écoles de Bohême où, d'après le rapport envoyé par M. le professeur *Bydzovsky,* les notions de dérivée et d'intégrale sont introduites simultanément. En Suisse aussi, on enseigne l'intégrale définie d'abord, l'intégrale indéfinie ensuite; en Russie et en Danemark, la marche inverse est suivie. Le plan d'études italien ne fait introduire que l'intégrale définie et cela à propos de la détermination des aires (qui se fait d'abord sur papier quadrillé) ; mais je crois que cela ne doit pas exclure la définition de la fonction primitive, d'autant plus que les instructions mentionnent la détermination des chemins parcourus dans un mouvement uniformément accéléré. Parmi les ouvrages anglais les plus répandus, ceux de MM. *Mercer* et *Gibson* commencent par la fonction primitive et celui de M. *Edwards* par l'intégrale définie.

Les deux méthodes ont, sans doute, chacune leurs avantages scientifiques et didactiques propres. Dans l'exposition rigoureuse d'un cours de Faculté, où l'existence de l'intégrale définie est démontrée, celle-ci doit précéder la fonction primitive, la notion d'aire étant l'objet d'une définition spéciale. Parmi les traités d'Analyse les plus connus, celui de M. *Jordan,* par exemple, expose la théorie de l'intégrale définie avant celle de la dérivée, ce qui est légitime pour la seule raison (et il en existe d'autres) que l'ensemble des fonctions intégrables est plus étendu que celui des fonctions dérivables. Dans l'enseignement secondaire où l'aire, le volume et la longueur d'un arc de courbe doivent être considérés comme des notions primitives, il est le plus sage, je crois, de suivre le conseil de *Poincaré* qui dit *(loc. cit.)* : « Alors ce qui reste à faire est bien simple : définir l'intégrale comme l'aire comprise entre l'axe des x et deux ordonnées de la courbe ; montrer que, quand l'une des ordonnées se déplace, la dérivée de cette aire est précisément l'ordonnée elle-même. C'est le raisonnement de *Newton,* c'est comme cela que le Calcul intégral est né et, bon gré mal gré, il faut repasser par où nos pères ont passé. »

IV. — Applications du Calcul infinitésimal.

a) *Série de Taylor.* Notre questionnaire se rapportait aussi à la démonstration de la formule de Taylor, à la détermination du

reste et à l'interpolation. Il ressort des réponses que la formule de Taylor figure sur peu de programmes de l'enseignement secondaire ; elle est néanmoins enseignée dans les écoles secondaires allemandes où le plan d'études embrassait depuis longtemps les séries infinies : dans les écoles réales de Prusse, de Bavière, de Wurtemberg et de Hambourg, dans quelques écoles suisses et autrichiennes, dans les écoles danoises, dans les groupes mathématiques des écoles anglaises et dans les classes de Mathématiques spéciales en France. Là, où l'on enseigne la série de Taylor, on établit les séries de e^x, a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^m$ et $\operatorname{arc\,tg} x$ (la dernière en vue, surtout, du calcul de π). Cependant l'étude des manuels scolaires nous porte à penser que *ce terrain n'est pas encore suffisamment préparé pour l'école.* L'ancienne théorie des séries infinies, qui évite soigneusement de faire appel à la notion de dérivée et qui opère habituellement avec la méthode des coefficients indéterminés et avec certaines relations fonctionnelles, n'est pas entièrement balayée du terrain, et on aperçoit çà et là des restes de la « méthode pure » de l'Analyse algébrique qui fut très en honneur dans la seconde moitié du siècle dernier.

Je ne veux pas traiter ici en détail des questions de méthode, ni analyser minutieusement quelque manuel scolaire. J'ouvrirais ainsi des discussions portant sur la méthode de tel ou tel chapitre de l'enseignement et nous autres, professeurs, nous savons bien que ces discussions, une fois commencées, semblent ne jamais finir. Je me bornerai à faire une remarque générale, c'est que la didactique des mathématiques aurait la tâche de changer les grandes valeurs scientifiques en petites monnaies pour qu'un élève puisse rassembler petit à petit sa fortune scientifique. Le plus souvent, hélas, ce changement ne se fait pas sans perte et il entre beaucoup de fausse monnaie dans la circulation.

Tant que les vérités mathématiques n'entrent pas à l'école sans déformation ou, du moins, sans grande déformation, nous ne pouvons considérer nos méthodes comme satisfaisantes. De ce point de vue je ne dissimule pas qu'aucune des méthodes proposées dans les manuels scolaires que j'ai pu examiner ne me paraît bonne pour établir la formule de Taylor. L'un de ces manuels, par exemple, parle de la série infinie de Taylor sans définir ce que c'est que la somme d'une série infinie ; un autre affirme qu'une fonction $f(x)$ est développable en série de Maclaurin, si elle admet des dérivées de tous les ordres, finies pour $x = 0$. On pouvait lire dans un livre, c'est à M. *Klein* que je dois cette information, que toute série entière avait pour rayon de convergence l'unité. Les nombreuses méthodes graphiques qu'on a inventées dernièrement pour évaluer le reste de la formule de Taylor ne sauraient être prises pour des démonstrations rigoureuses. M. *F. Klein*, qui manie avec virtuosité le Calcul différentiel

et intégral dans son cours déjà plusieurs fois mentionné, expose la théorie générale de la série de Taylor sans s'écarter essentiellement de la démonstration rigoureuse en usage, fondée sur le théorème de *Rolle*. Naturellement il sait mettre à profit, dans certains cas, les circonstances particulières pour tourner la difficulté de la détermination du reste.

Quelque grande que soit l'importance attribuée à la série de Taylor, qui ouvre un monde nouveau devant l'élève des écoles secondaires en lui faisant voir les expressions analytiques des fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$ connues jusqu'ici par les tables seulement et en lui enseignant la formule générale du binôme établie, par des moyens élémentaires, seulement pour des exposants entiers et positifs : l'exposition de la théorie de la série de Taylor est, je crois, au point de vue des méthodes, un problème irrésolu aujourd'hui. Nous attendons des éclaircissements sur ce sujet des observations de MM. les délégués ici présents.

Cependant, la formule de Taylor, en la limitant au terme du deuxième ordre, peut s'établir facilement et à l'abri de toute objection, ce qui se voit dans plusieurs manuels scolaires. Cela est, selon mon avis, pleinement suffisant pour les besoins les plus urgents de l'enseignement secondaire : usage des tables de logarithmes et des tables de fonctions circulaires, évaluation de l'erreur, justification de l'interpolation linéaire. Pourtant on doit constater que même dans les écoles où la formule ou la série de Taylor sont enseignées, on néglige ces applications. Elles seraient pourtant utiles pour bien faire comprendre le sens de certains procédés qu'on emploie mécaniquement dans les écoles.

b) *Maximum et minimum.* On s'accorde généralement sur la méthode à appliquer pour les problèmes de maximum et de minimum. On sent partout que ces problèmes sont peut-être la partie la plus intéressante des matières nouvelles de l'enseignement secondaire et qu'ils ont, en outre, une importance universelle qui dépasse les cadres de l'enseignement. Dans plusieurs Etats, ils étaient toujours traités ou par des moyens algébriques élémentaires en se bornant aux fonctions du second degré ou par des méthodes en usage avant l'introduction de la langue du Calcul différentiel, méthodes qui cachaient, en réalité, des différentiations.

Les dérivées du premier et du second ordre apportent ici l'économie, l'unité et l'ordre de sorte que, presque partout, les anciennes méthodes sont tombées en désuétude. Il est regrettable que, dans quelques Etats, en conséquence de la manière dont on a incorporé les matières nouvelles, ces vieilles méthodes de calcul des maxima et des minima aient subsisté. C'est à regretter surtout parce qu'il faudrait éviter jusqu'à l'apparence même que les matières nouvelles soient placées à côté et au-dessus des anciennes, ne servant qu'à augmenter les matières de l'enseignement.

c) *Applications physiques.* Il va sans dire — et les réponses reçues nous apportent à ce sujet une pleine confirmation — que la dérivée une fois définie est utilisée en Physique pour définir la vitesse et l'accélération. Cachée, elle intervenait toujours dans l'enseignement de la physique; qu'elle intervienne ouvertement et c'est déjà un succès des idées nouvelles. Dans la Plupart des écoles allemandes, le Calcul infinitésimal trouve une application plus étendue : on s'en sert pour déterminer des centres de gravité, des moments d'inertie, le potentiel, le mouvement du pendule, la variation de la hauteur du baromètre avec l'altitude, etc.; on s'en sert en Autriche pour l'étude du potentiel; en Bohême et Danemark, pour déterminer aussi des centres de gravité et des moments d'inertie. Dans les écoles hongroises qui ont adopté l'enseignement du Calcul infinitésimal, on l'utilise dans une foule d'applications physiques, surtout si l'enseignement des Mathématiques et celui de la Physique sont donnés par le même professeur. Il y a cependant des chapitres de la Physique où les méthodes infinitésimales sont peu employées ; elles sont rarement employées en Optique (dans certaines écoles allemandes seulement) et en Electrodynamique (dans des écoles allemandes, autrichiennes et hongroises). Comme le remarque justement M. *Possé,* auteur du rapport sur la Russie, en Physique, on ne se sert généralement que des Mathématiques élémentaires.

Le mouvement réformiste ne peut être considéré comme achevé tant que nous voyons les notions fondamentales de la Mécanique enseignées indépendamment des éléments du Calcul infinitésimal. L'avenir fera régner certainement l'harmonie, si désirable au point de vue pédagogique, entre les enseignements qui s'occupent, l'un de l'étude des fonctions et l'autre des phénomènes physiques et chimiques. M. *Timerding,* membre de la Sous-commission allemande, a publié sur ce sujet, pour la Commission internationale, une brochure du plus haut intérêt. Après avoir tracé un tableau historique du développement des méthodes infinitésimales, il soumet à une critique sévère, mais juste, les méthodes qu'on emploie en Physique et qui font usage du Calcul infinitésimal sans l'avouer; il dénonce les défauts de ces Compléments sur le Calcul infinitésimal, écrits à l'usage des physiciens qui sont, selon lui, la honte de la littérature mathématique, et il indique sur plusieurs exemples la marche irréprochable qu'on devrait suivre en appliquant le Calcul infinitésimal à traiter des problèmes de Physique. « Le Calcul infinitésimal, dit M. Timerding[1], rend, en Physique, les services qu'on attend d'une méthode satisfaisante aux points de vue scientifique et pédagogique : notations claires où apparaît la nature des choses, et déductions simples, dénuées

[1] TIMERDING, *Die Mathematik in den physik. Lehrbüchern,* p. 108.

d'artifice ; de plus, il débarrasse la marche de l'enseignement physique des déductions mathématiques encombrantes et insuffisantes. »

Nous sommes loin de considérer la transformation de l'enseignement de la Physique, comme achevée dans tous les Etats ; mais l'intérêt de l'enseignement secondaire exige impérieusement que les idées nouvelles dont nous aspirons à la réalisation dans l'enseignement mathématique, pénètrent à fond l'enseignement physique. Celui-ci en deviendra plus vrai, plus sincère, plus simple, plus économique, plus complet par les forces et le temps gagnés et il réagira, à son tour, sur l'enseignement mathématique en le rendant plus pratique, plus facile à comprendre, plus uni et répondant mieux à l'idéal scientifique.

d) *Applications géométriques.* Le Calcul intégral est appliqué partout où il est enseigné à déterminer des aires et des volumes. Cela ne pourrait pas être autrement et là est principalement le caractère économique de l'introduction des méthodes nouvelles dans l'enseignement secondaire. Si l'on songe aux difficultés de la détermination des volumes du prisme oblique, de la pyramide et de la sphère, au calcul — qu'on effectue en quelques endroits — de l'aire de l'ellipse et d'un segment de parabole, il faut saluer comme un affranchissement l'introduction du Calcul intégral dans toutes ces questions. Pourtant, il me faut constater une fois de plus qu'on continue à appliquer, pour la détermination des aires et des volumes, les méthodes anciennes et, dans la plupart des cas, le principe sans beaucoup de valeur didactique de Cavalieri, même après avoir exposé les notions fondamentales du Calcul intégral. Cela tient assurément, d'une part, à ce que le Calcul infinitésimal n'a pas pénétré entièrement la matière de l'enseignement mathématique et, d'autre part, que les transformations ne se font que très lentement dans la vie des écoles. M. *Klein* dit avec justesse[1] : « Quand il s'agit de faire entrer des développements nouveaux, la loi de l'hystérésis se manifeste plus forte dans les Mathématiques que dans d'autres Sciences. Une idée mathématique nouvelle ne trouve le chemin de l'école que si des professeurs des Facultés la mettent en relief dans leurs cours, s'ils forment des générations de professeurs de lycée qui la représentent et enfin, si ceux-là lui donnent une forme propre à favoriser la propagation ; elle tombe à la fin dans le domaine public et une place lui est désignée dans les institutions scolaires. Et cela dure le plus souvent des dizaines d'années. » Je crois que la transformation du calcul des aires et des volumes ne s'accomplira aussi que dans quelques dizaines d'années. Il n'y a là rien qui doive nous surprendre ; ce n'est pas seulement la force de l'habitude

[1] Klein-Riecke, p. 11.

qui conduit le professeur à appliquer les méthodes usuelles et, en particulier, la méthode d'exhaustion, c'est aussi, et surtout, la beauté de ces méthodes et l'admiration devant l'œuvre grandiose de l'antique esprit de la Grèce. Je crois fermement qu'un jour la situation sera complètement changée : l'enseignement secondaire utilisera, en vue de l'utilité, de l'économie et de la simplicité, le Calcul intégral et notamment la fonction primitive pour déterminer des aires et des volumes, et à l'Université on enseignera aussi les découvertes ingénieuses d'Eudoxe et d'Archimède pour perpétuer le souvenir des œuvres et des méthodes créatrices grecques et pour former la génération future des savants.

V. — La question de la rigueur.

Le Comité central désirait en outre savoir, dans quelle mesure on faisait appel à la rigueur en enseignant le Calcul différentiel et intégral dans les écoles secondaires des différents Etats ; il ne lui faisait pas de doute que c'était là le point le plus délicat. C'est surtout du côté de l'enseignement supérieur qu'on entend se plaindre que l'enseignement secondaire fait plus de mal que de bien s'il n'adopte pas les méthodes rigoureuses d'une exposition scientifique ; par contre, les représentants de l'enseignement secondaire affirment que l'intelligence moyenne des élèves ne permet pas une exposition rigoureuse du Calcul différentiel et intégral. Où est donc la vérité ? L'avènement de l'entière rigueur n'est pas accompli de longue date dans les Mathématiques supérieures. Une étude historique nous montre qu'aux commencements on n'exigeait pas une définition précise des notions, ni des déductions logiques irréprochables. C'était peut-être favorable au progrès. Comme M. *Picard* dit : « dans les époques vraiment créatrices, une vérité incomplète ou approchée peut être plus féconde que la même vérité accompagnée des restrictions nécessaires. Si, par exemple, *Newton* et *Leibniz* avaient pensé que les fonctions continues n'ont pas nécessairement une dérivée, ce qui est le cas général, le Calcul différentiel n'aurait pas pris naissance ; de même les idées inexactes de *Lagrange* sur la possibilité des développements en série de Taylor ont rendu d'immenses services et il est heureux que *Newton* ait eu, au début de ses recherches, pleine confiance dans les lois de *Képler*[1]. » Cet état primitif, précédant la critique scientifique, était peut-être propice aux progrès des Sciences ; les inventeurs n'ont pas vu des barricades se dressant de tous côtés ; ils croyaient que l'infini s'ouvrait devant eux ; ils ont mis une confiance exagérée dans leurs forces et dans la force

[1] PICARD, *La Science moderne*, p. 52.

de leurs méthodes. Mais le maintien de cet état de choses serait-il légitime et désirable, serait-il conforme à la dignité, à la vérité, à la sincérité et surtout à la valeur pédagogique et scientifique de l'enseignement mathématique?

La rigueur du Calcul différentiel et intégral ne commence qu'avec *Cauchy*, qui a reconnu, le premier, l'importance du théorème des accroissements finis. Celui qui connaît la lenteur de l'expansion des idées ne s'étonnera pas qu'à l'époque où *Gauss*, *Cauchy* et même *Weierstrass*, *Dirichlet* et *Riemann* ont agi, la plupart des mathématiciens ont appris, en Allemagne et ailleurs, les éléments de leur science dans des livres comme ceux de Lübsen, d'Autenheimer, etc. ou même dans des cours élémentaires servant d'introduction à des traités de Physique. Cette littérature sans nulle critique scientifique n'a pas nui à ceux qui étaient bien doués pour les Mathématiques, elle leur a été utile peut-être en les stimulant à préciser les notions enveloppées de brouillard métaphysique. Mais à la grande masse du public des écoles elle a été funeste : les esprits ont acquis un semblant de science qui chancelait, au lieu d'apprendre une science limpide et sûre. Cette époque est caractérisée avec justesse par M. *Klein* dans son ouvrage autographié *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, où il retrace en quelques mots brefs et décisifs le développement historique du Calcul différentiel et intégral [1]. Quelques souvenirs de jeunesse qu'on trouve dans l'ouvrage déjà mentionné, Klein-Riecke, etc. (p. 11), sont particulièrement caractéristiques. En 1865, lorsque la critique mathématique était, sinon à son apogée, du moins en pleine floraison, il entendit dire, au sortir du gymnase, par son professeur de Mathématiques : « les Mathématiques supérieures ont un tout autre caractère que les Mathématiques élémentaires ; en Mathématiques élémentaires, tout se démontre, tandis que les Mathématiques supérieures sont comme un système de Philosophie, on les croit ou on ne les croit pas. » Mais n'avait-il pas raison, ce brave professeur lorsqu'on pouvait lire dans l'ouvrage le plus répandu de l'époque que l'infiniment petit est un souffle, l'ombre d'une grandeur évanouie. Et ce Calcul différentiel et intégral sans rigueur, sans critique a longtemps vécu dans les esprits. Comme des couches géologiques à l'intérieur et sur la surface de la Terre, des couches humaines se sont conservées dans l'enseignement secondaire, couches qui ont gardé les fossiles de la Science des époques sans critique. Ne nous étonnons pas que, dans cet état des choses, le gouvernement prussien ait retiré en 1882 aux écoles réales, et en 1892 aux gymnases réaux, l'autorisation d'enseigner le Calcul différentiel et intégral [2]. Je constate

---

[1] KLEIN, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Teubner, p. 454.
LIETZMANN, *Stoff und Methode*, etc., p. 81.

anxieux que le Calcul différentiel et intégral exact n'est toujours pas universellement connu et adopté. Eh bien, quelque partisans ardents que nous soyons des réformes en vue d'un haut idéal de culture générale, nous ne voulons pas de ce Calcul infinitésimal, superficiel, dépourvu de toute précision et indigne de la Science.

Heureusement, la situation change complètement aujourd'hui. Les professeurs d'aujourd'hui de l'enseignement secondaire connaissent, dans le monde entier, le Calcul infinitésimal rigoureux. Il n'est peut-être personne parmi eux qui n'ait lu l'un ou l'autre des ouvrages sur le Calcul différentiel et intégral de MM. *Jordan, Dini, Genocchi-Peano, de la Vallée-Poussin, Hobson, Kowalewsky* ou, pour citer le plus récent, celui de M. *von Mangoldt*. Je ne peux pas m'imaginer quelque part une formation des professeurs de lycée où, au moins dans les cours les plus élevés, l'esprit de ces ouvrages ne serait pas dominant. Même en Angleterre, où l'on s'attache si fort aux traditions de l'enseignement mathématique, la situation a beaucoup varié. Comme M. le rapporteur nous le signale, à Cambridge, il y a 20 à 25 ans, on ne faisait pas entrer la rigueur parfaite dans l'exposition des Mathématiques supérieures. Mais depuis, l'enseignement a subi une transformation profonde et les générations nouvelles respirent une atmosphère tout autre.

Nos vues sur la Science sont pénétrées d'esprit critique. Les méthodes de l'enseignement mathématique secondaire se sont améliorées. Les démonstrations à souricière de Schopenhauer, l'assemblage sans raison des théorèmes abstraits, les constructions compliquées fondées sur des artifices, la mémorisation démodée des Mathématiques ont disparu ou sont sur le point de disparaître : l'observation personnelle, les considérations d'ordre pratique, le travail simultané d'une classe entière, l'habitude du travail indépendant et l'introduction de la méthode heuristique ont transformé de fond en comble le système de l'enseignement secondaire. Il est à espérer que, si les nouvelles générations de professeurs acquièrent une vue claire et précise des principes fondamentaux du Calcul infinitésimal et de ses applications nombreuses et si elles ont une connaissance suffisante des méthodes, le travail pédagogique conscient de ces professeurs fera prendre au Calcul infinitésimal la place qui lui est due et lui donnera une forme aussi aisément maniable que celle des matières anciennes. Le travail tendant à ce but ne peut pas être considéré comme achevé là surtout, où les matières nouvelles ont trop d'étendue. C'est à nous, propagateurs des idées de réforme qu'incombe le devoir de conquérir le terrain par les armes de méthodes pédagogiques nouvelles.

Le point le plus difficile sera d'unir aux raisonnements intuitifs la rigueur au sujet de laquelle M. *Picard* dit avec raison « que la

vraie rigueur est féconde, se distinguant par là d'une autre purement formelle et ennuyeuse qui répand l'ombre sur les problèmes qu'elle touche. » Joindre l'intuition à la rigueur, un enchaînement de pensées mathématiques à des vues pratiques, faire un choix judicieux de matières et les ranger en bon ordre pour l'éducation : ce sont là des tâches pédagogiques et mathématiques que nous attendons voir accomplies dans l'avenir. A mon avis, notre devoir principal est d'introduire les notions du Calcul différentiel et intégral d'une manière intuitive, au moyen de considérations géométriques et mécaniques et de nous élever graduellement aux abstractions nécessaires. Toutes nos affirmations doivent être vraies, mais nous ne devons pas viser à atteindre la généralité parfaite. L'exposition des théories doit être naturelle ; n'acceptons pour guide que le simple bon sens et rejetons les artifices incompréhensibles. C'est aussi le moyen le plus sûr pour éveiller dans nos élèves le désir de la rigueur. Le professeur formé par l'éducation mathématique moderne, ayant des notions claires de la limite, de la dérivée, des intégrales définies et indéfinies, des séries infinies pourra aisément satisfaire le désir de rigueur s'il se manifeste. Nous n'avons qu'à songer aux paroles de M. *Hadamard* prononcées à propos de l'enseignement de la Géométrie [1] : « C'est par le bon sens que les commençants doivent comprendre les vérités qui relèvent du bon sens — quand ce ne serait que pour éviter cette erreur, si fréquente et si déplorable, de croire que les Mathématiques et le bon sens sont deux choses opposées. La rigueur viendra plus tard, lorsque la nécessité en sera apparue. »

Le Comité central désirait être éclairé à ce sujet lorsqu'il posait des questions relatives à la rigueur ; il voulait savoir, d'une manière précise, quels éléments d'une exposition scientifique exacte ont pu entrer ou ont la chance d'entrer prochainement dans l'enseignement des établissements secondaires. Il semble que le premier rang appartiendra, à cet égard, à l'Italie. M. *Castelnuovo* écrit dans son rapport : « Quelques-uns des professeurs ont introduit ces notions d'une manière rigoureuse, conforme à l'esprit qui domine l'enseignement mathématique de nos écoles moyennes. On pouvait respecter la rigueur d'autant plus que les programmes officiels des Instituts techniques comprennent la théorie des nombres irrationnels et des limites, théories qu'on développe ordinairement avec soin. La notion des irrationnelles (qui entre aussi dans les programmes des lycées) est présentée ordinairement en suivant la méthode de M. *Dedekind* ou en partant de la représentation par les nombres décimaux illimités. »

Nous pouvons nous faire une idée, sinon exacte, du moins approchée du degré de rigueur, en jetant un regard sur la marche

[1] Conférence du Musée pédagogique, 1904, p. 163.

suivie dans l'introduction des nombres irrationnels, et des limites, sur l'établissement des théorèmes relatifs aux limites, sur les éclaircissements donnés au sujet de la dérivabilité et enfin sur la définition et l'emploi des différentielles.

a) *Nombres irrationnels.* Nous avons vu dans les phrases empruntées à M. *Castelnuovo* qu'en Italie on présente une théorie complète et impeccable des nombres irrationnels en ayant recours aux coupures de M. *Dedekind.* Dans d'autres Etats, on introduit les nombres irrationnels incidemment à l'occasion de l'extraction des racines et l'on ne s'attarde pas à construire une théorie générale. Par exception, quelques professeurs insistent, dans les classes supérieures des écoles allemandes, sur le développement sciende la notion de nombre, et dans un tiers environ des écoles autrichiennes on définit le nombre irrationnel par la méthode de M. *Dedekind.*

b) *Limites.* Nous avons demandé, pour mesurer le degré de rigueur, quel rôle on attribue à la notion de limite. Nous pouvons constater que, nulle part, on ne se contente de l'intuition, pas même — d'après les manuels scolaires employés — en France, où pourtant le programme dit expressément : « Le professeur laissera de côté les questions subtiles que soulève une exposition rigoureuse de la théorie des dérivées ; il aura surtout en vue les applications et ne craindra pas faire appel à l'intuition. »

M. le rapporteur anglais résume en une formule concise la marche la plus recommandable à mon avis : « State nothing but the truth, but do not necessarly state the whole truth. » Tandis qu'une définition précise des limites ne fait nulle part défaut, les théorèmes élémentaires relatifs aux limites sont adoptés, presque partout, sans explications. Ainsi on les mentionne à peine dans les écoles allemandes et suisses, pas du tout dans les écoles anglaises, danoises et françaises ; on les enseigne dans un tiers environ des écoles autrichiennes et dans toutes les écoles russes ; on les trouve dans un manuel scolaire hongrois pour le cas où les fonctions envisagées sont de la forme $f(x) = A + (x - a)^{\alpha} \varphi(x)$, la fonction $\varphi(x)$ étant bornée en valeur absolue dans le voisinage du point a, ce cas offrant le plus de facilité. A mon avis, on ne peut qu'approuver l'introduction claire de la notion de limite ; la passer sous silence serait absolument condamnable. Sans une définition précise des limites, seules les dérivées des fonctions rationnelles pourraient se déterminer, et encore cela n'irait pas sans faire souffrir la rigueur. Mais d'autre part, la notion de limite invervient si fréquemment au cours de l'enseignement secondaire et même dans le cycle inférieur (fractions décimales illimitées, aire du cercle, logarithme, série géométrique, etc.) que sa définition générale ne doit rencontrer aucune difficulté. Sa connaissance est indispensable à qui veut acquérir une culture générale mathéma-

tique et philosophique, objet de première importance pour tout l'enseignement secondaire. Je crois même qu'il existe à peine une notion mathématique qui l'égalerait pour l'influence sur le développement et l'expansion des habitudes de raisonnements exacts.

c) *Dérivabilité.* A la question du Comité central : *Signale-t-on l'existence de fonctions non dérivables,* les réponses étaient aisées à prévoir. Dans la plupart des écoles, on ne parle pas de fonctions non dérivables et là, où il en est question, comme par exemple dans quelques écoles allemandes, dans les écoles russes, dans un cinquième environ des écoles autrichiennes, dans un manuel scolaire anglais et dans certaines écoles suisses et hongroises, on se borne à dire qu'en *certains points* il n'y a pas de dérivée, parce que la sécante n'admet pas de position limite ; mais on ne fait même pas allusion à des fonctions continues, n'admettant nulle part de dérivées. Il va sans dire, et je crois exprimer ici une opinion unanime, que « la pathologie des fonctions » — pour employer l'expression de M. *Schœnflies* — n'est pas à sa place dans l'enseignement secondaire.

d) *Différentielles.* La notion de différentielle n'est pas introduite dans les écoles françaises et dans la plupart des écoles suisses, allemandes et hongroises. Parmi les manuels scolaires allemands, celui de MM. *Behrendsen* et *Götting* est le représentant le plus répandu des idées de réforme, et ce manuel ne mentionne pas les différentielles. Notre rapporteur anglais nous informe que, parmi les ouvrages employés, celui de *Lodge* adopte pour base les différentielles pour la raison qu'elles ont une importance capitale dans les applications géométriques et physiques et dans l'intégration considérée comme processus sommatoire et parce qu'elles sont plus facilement compréhensibles que la notion de dérivée, sans compter que les considérations d'ordre historique parlent en leur faveur. — Cependant, les autres manuels anglais se placent à un point de vue différent.

D'après M. le rapporteur russe : « on définit (en Russie) la différentielle d'une fonction, comme produit de la dérivée par l'accroissement arbitraire de la variable indépendante et l'on ne considère jamais le Calcul différentiel, comme Calcul approximatif. » On voit que ces idées s'accordent avec la définition *Cauchy*. C'est ce qu'on peut dire aussi du point de vue adopté, dans son manuel anglais, par M. *Gibson* qui définit la différentielle géométrique, à l'aide de la tangente, comme $f'(x)\,\Delta x$ et aussi des instructions du plan d'études projeté en Serbie, qui définit, d'une manière analogue, la différentielle d'une fonction de plusieurs variables.

Dans les écoles danoises, on parle de différentielles, mais les professeurs n'ont, en général, pas pris parti. Nulle part, le Calcul différentiel n'est considéré comme ayant un caractère d'approximation et il ne semble pas que les différentielles d'ordre supé-

rieur aient trouvé des partisans. Notre rapporteur allemand écrit qu'on juge les différentielles de façons diverses. L'impression qui se dégage de la littérature est que les différentielles ont vécu. Pourtant, des mathématiciens s'occupant de calculs approximatifs, comme M. *Schülke* et ceux qui arrivent au Calcul différentiel par la voie de la Physique, comme M. *Richter*, penchent plutôt à la conservation des différentielles. Il est possible, quoique la littérature ne fournisse pas d'indications à cet égard, que, dans certaines écoles, on opère avec les différentielles comme si elles étaient des quantités déterminées.

Suivant les informations du rapporteur autrichien, les différentielles sont enseignées dans la moitié environ des établissements secondaires ; on les considère comme des quantités infiniment petites, sauf un établissement où les différentielles ne remplissent que le rôle d'abréger les calculs approximatifs. M. le rapporteur est d'avis que les professeurs eux-mêmes n'ont pas une idée suffiment claire de ces choses.

Les opinions peu différentes des rapporteurs autrichiens et danois ne sont pas isolées. En effet, la littérature scientifique elle-même n'a pas pris nettement parti parmi les diverses définitions des différentielles. La définition de *Cauchy*, dont nous avons déjà parlé, présente l'avantage qu'une relation homogène quelconque entre les différentielles se ramène immédiatement à une relation entre les dérivées, il n'y a, pour cela, qu'à diviser par une puissance convenable de dx. Mais on définit souvent la différentielle d'une fonction $y = f(x)$ par l'égalité : $dy = [f'(x) + \eta]\,dx$ où dy désigne l'accroissement total de la fonction y pour l'accroissement dx de la variable indépendante et $\lim\limits_{dx=0} \eta = 0$. Si l'on adopte cette définition qui paraît convenir mieux aux applications géométriques et physiques, les relations homogènes existant entre les différentielles ne sont que des relations approchées qui ne deviennent exactes qu'en divisant par une certaine puissance de dx et en passant à la limite $dx = 0$. L'une ou l'autre de ces définitions, pourvu qu'on les applique conséquemment, apportent également la clarté et la précision dans les Mathématiques, mais nous sommes, je crois, unanimes *à désirer que le brouillard métaphysique de l'infiniment petit n'entre pas dans l'enseignement secondaire*. Je suis d'avis que la méthode la plus sage est de ne pas introduire du tout les différentielles dans l'enseignement secondaire. Cette vue est justifiée par la tendance qui veut les éliminer de toute la Science. Dans l'Encyclopädie der math. Wissenschaften (II. A. 2. p. 69), M. *Voss* écrit à ce sujet : « Les différentielles employées par *Leibniz* pour développer d'une manière simple le Calcul différentiel, sont *superflues* dans la théorie actuelle, quoiqu'elles soient difficiles à remplacer dans les notations usuelles du Calcul intégral, des équations différentielles et

des applications géométriques et mécaniques. » C'était déjà l'avis de *D'Alembert; Poincaré* aussi se ralliait à ces vues dans sa conférence plusieurs fois citée. Combien paraît-il plus nécessaire de rejeter de l'enseignement les notions qui donnent lieu à tant de malentendus.

VI. — Fusion du Calcul différentiel et intégral avec les matières de l'enseignement secondaire.

Tous les pédagogues sont d'accord que, pour respecter l'ensemble harmonique et organisé de l'enseignement secondaire, les matières nouvelles réclamées par le mouvement réformiste ne doivent pas être placées, comme un supplément, à côté des matières anciennes, mais une fusion complète devra s'opérer entre elles. Le mouvement réformiste s'efforce, d'après M. *Klein,* de faire pénétrer d'un esprit nouveau les matières anciennes, plutôt que d'introduire des matières nouvelles [1]. M. *Timerding* manifeste une opinion pareille : « Nous insistons particulièrement sur le fait que les aspirations réformatrices ne tendent pas à faire suivre d'un cours de Calcul infinitésimal les matières enseignées en première, mais plutôt de faire entrer, dans toutes les parties de l'enseignement, les germes des notions du Calcul infinitésimal, germes qui ne manqueront pas, dans la suite, de se développer vigoureusement [2]. »

Conformément à ces vues répandues, la notion de fonction est préparée aujourd'hui avec soin depuis les classes inférieures : en insistant, dans l'enseignement de l'Arithmétique, sur les liaisons entre diverses grandeurs ; plus tard, au cours de l'enseignement algébrique, sur la représentation graphique des fonctions linéaire, quadratique et autres et, enfin, elle est préparée par l'introduction graduelle (lors même que le manuel y consacre un chapitre spécial) du Calcul différentiel et intégral. Je n'ai pas à exposer ici en détail les réponses se rapportant à ces questions. Toutes les réponses constatent que les matières nouvelles se sont fondues avec les anciennes. Seul le rapporteur russe est obligé d'écrire : Cette introduction n'est préparée dans les classes par aucune étude. Les nouvelles matières constituent un supplément tout nouveau au programme.

Pour opérer la fusion, plusieurs plans pourraient être adoptés : je n'ai qu'à rappeler le plan de Meran des professeurs allemands ; les plans d'études officiels de certains Etats allemands (en particulier, ceux de Wurtemberg, Bavière et Bade) publiés récemment parmi les brochures de la Commission internationale [3] ; les plans

---

[1] Klein-Riecke, p. 26.

[2] Timerding, *Die Mathematik in den physik. Lehrbüchern*, p. 109.

[3] Neue Erlasse in Bayern, Würtemberg und Baden, von Lietzmann, Geck, Cramer Band. II. 8.

d'études français, italien (liceo moderno), autrichien ; les manuels scolaires traitant du Calcul différentiel et intégral. (Je remarque, entre parenthèses, qu'à mon avis, notre Commission ferait un travail utile en publiant dans un même volume les plans d'études mathématiques des divers Etats). En 1911, dans une école hongroise (école réale du IVe arrondissement de Budapest), les professeurs de Mathématiques, présidés par le directeur de l'école, M. *Kopp,* lui aussi mathématicien, se sont mis d'accord sur un plan qu'il convient de suivre dans l'enseignement des matières du programme. Ce plan étant remarquable par le rôle élargi qu'il attribue à la notion de fonction et par la fusion heureuse qu'il opère entre le Calcul infinitésimal et le programme du reste des matières admises, je me permettrai ici d'en extraire quelques passages : dans les classes de 2e et 3e, on dresse des tables empiriques et on représente graphiquement ces tables (température, pression barométrique, lever et coucher du soleil, etc.) ; dans la 4e, on représente des fonctions entières du premier et du deuxième degré et quelques fonctions rationnelles simples ; dans la 5e, on étudie la signification graphique de l'équation $ax + by = c$, en faisant usage du quotient de différences qu'on écrit avec la notation $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et l'on résout graphiquement le système d'équations linéaires à deux inconnues sans oublier de mentionner que les méthodes graphiques ne peuvent pas rivaliser avec le calcul. On suit une marche analogue pour représenter les fonctions du second degré et pour résoudre les équations du deuxième degré. En 6e, les fonctions 10^x et $\log x$ sont étudiées ; la représentation graphique fait voir que l'une est la fonction inverse de l'autre ; la représentation graphique est aussi utilisée pour les fonctions trigonométriques et pour l'interpolation linéaire. En 7e apparaît le problème de la tangente, ce qui conduit à différentier d'abord les polynomes. Après avoir défini, d'une manière précise, la notion de limite, on détermine $\lim\limits_{x=0} \frac{\sin x}{x}$ et les dérivées des fonctions trigonométriques ; on passe ensuite aux notions de fonction primitive et d'intégrale définie et l'on exécute, comme applications, les calculs de volumes figurant sur le programme de cette classe. Enfin, en 8e, où le programme porte sur les éléments de la Géométrie analytique, on applique, pour déterminer la tangente des coniques, la marche qui conduirait, en général, à la différentiation des fonctions implicites. Il est toujours bien entendu que les démonstrations ne doivent pas être inexactes ; il est permis d'admettre des théorèmes sans démonstration, mais il faut le dire. Je tiens pour le principal mérite du plan qu'il embrasse *peu* du Calcul différentiel et intégral, mais ce peu est bien ordonné, étudié à fond, élucidé par des applications et mis en harmonie avec le reste du programme. On

m'a informé que ce plan modifié obtenait du succès et qu'il rendait les mathématiques plus faciles et plus aimées. Je ne crois pas me tromper en attribuant ce résultat à la sage modération.

La question de l'allégement. L'élargissement du rôle de la notion de fonction et l'introduction du Calcul différentiel et intégral ne peuvent produire le succès que si le programme ancien est réduit et s'il devient, dans son ensemble, plus économique. Ce dernier point n'a pas besoin d'explications. Des différentiations et des intégrations cachées interviennent si souvent dans l'enseignement mathématique et physique que leur remplacement par une méthode unique fait nécessairement gagner de temps et d'efforts. M. *Timerding* dit avec justesse que celui qui veut emporter du bois de la forêt fait mieux d'aller le chercher avec une voiture que d'emporter les morceaux un à un, à pied. L'amélioration de la méthode produit de l'allégement partout où le plan d'études choisit bien le moment d'enseigner les éléments du Calcul différentiel et intégral ; si le choix n'est pas heureux, la simplification ne se fait sentir que dans l'enseignement de la Physique en y faisant usage des notions nouvelles. — En dehors de l'allégement qui vient de l'économie, il y a encore celui qui vient de la suppression de certaines parties du programme. Ainsi, en *Allemagne,* on désire supprimer les constructions compliquées des triangles et les formules trigonométriques difficiles et beaucoup y ajoutent l'analyse combinatoire et les nombres complexes (dans les gymnases), mais sur ces derniers points, les partisans de la réforme ne sont pas tous d'accord.

En *Autriche,* la moitié environ des écoles ne mentionne aucune suppression, le reste voudrait voir disparaître du programme les transformations algébriques artificielles et les équations et constructions compliquées. Il y en a qui suppriment les équations de Diophante, mais on est unanime à constater la simplification qu'apportent les éléments du Calcul différentiel et intégral.

En ce qui concerne les écoles *danoises,* j'ai déjà parlé de la question de l'allégement, en remarquant qu'elles pouvaient choisir entre deux programmes. En *France,* on trouve des avantages dans la simplification générale des méthodes et surtout dans les applications, notamment en Mécanique ; le Calcul des aires et volumes se fait avant l'exposition des éléments du Calcul intégral par les méthodes élémentaires anciennes. En *Hongrie,* les partisans de la réforme sont d'avis qu'on peut supprimer les formules trigonométriques compliquées (établies en vue des calculs logarithmiques) et les équations compliquées et artificielles (les constructions compliquées étant déjà éliminées), mais que l'allégement proviendra surtout du contact intime des enseignements algébrique et géométrique, de l'élargissement du rôle de la notion de fonction et de l'économie produit par l'introduction des éléments du Calcul

différentiel et intégral. En *Angleterre,* on attend de l'allégement, en Algèbre, dans les méthodes commerciales du Calcul (obsolete commercial rules) et, en Géométrie, dans l'enseignement formel. En *Russie,* les matières de l'enseignement mathématique de la classe la plus haute ont été remplacées, en grande partie, par le Calcul différentiel et intégral. Ainsi, la revision générale, la divisibilité des nombres, les fractions décimales illimitées, les équations du second degré, la décomposition d'un polynome en facteurs, certaines parties de la théorie des équations, construction des racines de l'équation du deuxième degré, le dessin projectif, etc. sont supprimés. En *Suisse,* on voit un allégement dans la simplification des méthodes.

Ainsi, dans tous les Etats, on cherche à réaliser les réformes de façon à éviter le surmenage des élèves et on attend de la transformation des programmes une amélioration des méthodes apportant un allégement dans l'enseignement. De plus, on espère arriver à une réduction en revisant minutieusement les matières actuellement enseignées. Les détails sacrifiés ne représentent une perte considérable ni pour la culture mathématique générale, ni surtout pour les applications pratiques.

VII. — Le mouvement réformiste et l'opinion publique des pédagogues.

Sur la question de l'introduction du Calcul différentiel et intégral dans l'enseignement secondaire, l'opinion publique des pédagogues s'est prononcée non en paroles, mais en actes, lorsque, dans presque tous les Etats qui ont adopté dernièrement un nouveau plan d'études, elle attribuait une place plus ou moins importante au Calcul différentiel et intégral et que, dans d'autres Etats, elle le faisait entrer dans l'enseignement avec le consentement tacite ou exprèss des autorités. Pourtant, la Commission ne se dissimule pas que d'une part le succès, et d'autre part, l'opinion publique éveillée des représentants de l'enseignement peuvent seuls assurer le caractère définitif des résultats ; c'est pourquoi elle avait rédigé ainsi la dernière question :

Quels sont les résultats obtenus ? La réforme est-elle reconnue comme nécessaire ? Dans quelle mesure rencontre-t-elle de l'approbation ou de l'opposition ? En particulier, quelle est l'opinion des représentants des mathématiques et de la physique ?

Comme premier résultat, il est à signaler, d'après le rapporteur *anglais,* que les questions posées aux examens d'Université exigent une connaissance de plus en plus approfondie du Calcul différentiel et intégral, et cela ne manquera pas d'agir comme un puissant levier sur l'enseignement secondaire qui se développe

avec une entière liberté. Un seul inconvénient peut en résulter, c'est que la pratique des Calculs algébriques en souffrira. Mais l'obstacle le plus grand qui empêche la diffusion des réformes, c'est — d'après M. le rapporteur — toujours l'inertie.

M. le rapporteur *autrichien* nous informe qu'à la question : l'introduction du Calcul différentiel et intégral est-elle un progrès ? deux tiers environ des établissements secondaires ont répondu affirmativement, un sixième négativement et le reste n'a pas manifesté d'opinion. On constate qu'en général les physiciens se montrent plus favorables aux réformes que les mathématiciens purs (y compris les représentants de la Géométrie descriptive). Il y en a qui se plaignent de surmenage et qui craignent que cette partie des Mathématiques ne devienne un formalisme vide de tout sens. Les mathématiciens appartenant à l'enseignement supérieur sont plus réservés encore. Selon eux, il faut, pour suivre l'enseignement supérieur, une certaine habileté dans le Calcul, une habitude de manier les formules et une capacité de saisir des raisonnements enchaînés. Les cours de Calcul différentiel et intégral de l'Université et de l'Ecole technique supérieure ne profiteraient pas d'un cours élémentaire où les mêmes matières auraient été traitées. Ces remarques visent ceux des élèves qui se destinent aux carrières techniques ou à la carrière de mathématicien. Mais la majorité des élèves n'est pas dans ce cas et c'est à eux que pense M. le rapporteur, en disant que « donner aux futurs mathématiciens et aux futurs ingénieurs la préparation nécessaire et l'habileté de Calcul indispensable et, en même temps, faire acquérir aux autres élèves les éléments mathématiques de la culture générale, c'est là un problème grave qui n'a pas encore reçu de solution.

En *Danemark*, où le désir unanime des professeurs a été la cause de l'introduction du Calcul différentiel et intégral, on considère l'innovation comme un progrès incontestable, et les élèves, qui y apportent un intérêt très vif, acquièrent vite une habileté dans le Calcul différentiel et intégral, non sans le trouver difficile dans l'établissement logique des principes.

D'après M. le rapporteur *français*, « l'introduction d'éléments de Calcul infinitésimal est universellement approuvée, pourvu qu'on évite certaines exagérations, c'est-à-dire qu'on écarte les difficultés logiques en faisant appel à l'intuition et que l'on se borne à donner les notions élémentaires et précises suffisantes pour les applications usuelles. » Le rapporteur s'est aussi adressé au Président de l'Union des Physiciens, qui écrit : « L'avis de mes collègues est tout à fait favorable au maintien dans les programmes de ces notions sommaires, qui ne paraissent pas d'ailleurs présenter pour nos élèves de difficultés sérieuses. »

M. le rapporteur *russe* nous informe que « la plupart des repré-

sentants des Mathématiques considèrent l'introduction des éléments du Calcul infinitésimal comme utile et même nécessaire et demandent que cette réforme du programme soit accomplie dans les gymnases. Mais on n'est pas d'accord ni sur la manière dont cette réforme a été faite, ni sur les résultats obtenus. Les uns disent que les élèves suivent avec un grand intérêt les nouvelles méthodes et sortent de l'école mieux préparés qu'autrefois. Les autres signalent quelques défauts de la réforme, comme le surmenage; ils se plaignent de ce que la préparation aux matières nouvelles ne soit pas faite dans les classes inférieures, de ce que la plupart des élèves n'apprennent que des procédés mécaniques de Calcul différentiel et intégral, sans y voir le fond, et de ce que les Mathématiques élémentaires, jadis enseignées dans les classes supérieures, sont oubliées aujourd'hui, etc. » De tout cela, M. le rapporteur conclut que la réforme de 1907 ne saurait être définitive et qu'une réorganisation complète de tout l'enseignement secondaire est devenue une nécessité.

M. le rapporteur *suisse* observe que les professeurs appartenant à l'enseignement secondaire sont contents de la réforme pour des raisons scientifiques, vu l'importance extrême de la notion de fonction au double point de vue théorique et pratique, pour des raisons psychologiques, parce que les matières nouvelles peuvent servir de centre à tout l'enseignement mathématique et enfin, pour des raisons économiques, parce que l'introduction du Calcul différentiel et intégral élimine les méthodes élémentaires plus difficiles.

Les professeurs des écoles techniques supérieures *suisses,* tout en approuvant le mouvement réformiste et surtout la mise en relief de la notion de fonction et la réduction, dans leurs parties superflues, des programmes traditionnels, ne préconisent pas l'enseignement du Calcul différentiel et intégral dans les établissements secondaires, cet enseignement ne faisant qu'aggraver la tâche des écoles techniques supérieures.

Parmi les professeurs *hongrois,* la plus grande partie regarde avec sympathie le mouvement réformiste, mais une minorité estime que le Calcul différentiel et intégral devrait être enseigné seulement aux élèves bien doués pour les Mathématiques et non à des classes entières. La majorité des professeurs de l'enseignement secondaire et, avec eux, plusieurs professeurs d'Université, tiennent au contraire comme nécessaire l'introduction du Calcul différentiel et intégral d'abord, pour des raisons de culture générale et puis, comme il a été déjà dit, pour des raisons économiques, pédagogiques et pratiques. Qu'il me soit permis de citer ici l'opinion exprimée au sein de notre Commission par M. *Czakó,* membre d'élite du corps des ingénieurs hongrois, professeur et actuellement doyen à l'Ecole royale polytechnique de Budapest.

Il ne croit pas que l'enseignement du Calcul différentiel et intégral des établissements secondaires puisse influer sur l'enseignement mathématique donné à l'Ecole polytechnique; celui-ci, en effet, ne se contenterait pas des notions sommaires acquises par les élèves. Mais l'enseignement de la Mécanique pourrait être commencé et terminé plus tôt sur la base de l'enseignement secondaire nouveau et cela serait, conformément à un vœu depuis longtemps exprimé des ingénieurs, éminemment désirable dans l'intérêt des élèves-ingénieurs.

Quoi qu'il en soit, ajoute M. *Czakó*, l'importance capitale des tendances rénovatrices réside dans le fait que leurs effets se feront sentir, par l'éducation reçue aux établissements secondaires, sur l'ensemble des classes dirigeantes. Parce que, plus encore que faire progresser l'enseignement technique, l'école secondaire doit se proposer la formation des esprits qui n'embrasseront pas les carrières techniques et qui, par la force du nombre, occuperont la plus grande partie des places dirigeantes dans la société. Ces esprits ont besoin de comprendre les phénomènes par lesquels se manifeste la marche de la civilisation humaine; et pour résoudre les problèmes toujours nouveaux posés par la civilisation en marche, il leur faut trouver des voies nouvelles et des moyens appropriés.

Il me reste à résumer les observations du rapporteur *allemand*. Je fais ce résumé à dessein après les autres pour les terminer avec la réponse que M. *Klein*, notre président, a adressée au rapporteur allemand. D'après M. *Lietzmann*, les professeurs sont contents, en général, des résultats et les considèrent comme un progrès; mais les mathématiciens appartenant à l'enseignement supérieur ne sont guère partisans des réformes, quoique peu d'entre eux s'y montrent résolument hostiles. Voici comment s'exprime M. *Klein* à ce sujet :

« Ce n'est pas aux professeurs de Mathématiques des Universités, mais c'est aux professeurs de Mathématiques des Ecoles techniques supérieures et aux professeurs de Physique des Universités qu'il appartient de se prononcer. Ceux-là, en premier lieu, ont a compter avec l'éducation mathématique moyenne des élèves arrivant à l'Université. Comment envisagent-ils l'introduction du Calcul infinitésimal? Je suis convaincu qu'un grand nombre d'entre eux n'a aucune connaissance de l'état actuel des choses. Et il y a encore une autre raison, pour laquelle beaucoup de mathématiciens des Universités se prononcent contre l'introduction du Calcul infinitésimal dans l'école. C'est l'inexactitude ou le manque de rigueur avec lesquels le Calcul infinitésimal est présenté dans certains manuels scolaires récents. On en conclut que le sujet est trop difficile pour l'école.

A cela, on peut répondre que pareils défauts se rencontrent

dans d'autres chapitres aussi des manuels scolaires, en particulier, dans l'exposition avec les méthodes de l'Analyse algébrique des séries infinies. La situation défectueuse s'explique non par les difficultés inhérentes à la matière, mais par le fait qu'un grand nombre des professeurs des écoles secondaires sont trop absorbés par les exigences pratiques de l'enseignement pour pouvoir porter leur attention sur les questions de la rigueur.

Par contre, les mathématiciens de l'Université ont la tendance de ne voir dans un manuel scolaire que les incorrections et ils négligent de juger la marche méthodique de l'exposition et l'adaptation du livre à l'intelligence des élèves. Ces deux états d'esprit ont éloigné les professeurs des écoles secondaires de ceux des Universités à tel point que le contact entre eux était très rare pendant des dizaines d'années. Maintenant que les questions du Calcul infinitésimal intéressent les deux parties, les divergences de vue se manifestent de nouveau et avec une ardeur qui crée des difficultés inutiles mais qui s'explique par le passé impossible à supprimer. Il faut, en y réfléchissant, nous réjouir de ce qu'une rencontre a été provoquée par la réforme de l'enseignement mathématique, réforme à laquelle l'introduction du Calcul infinitésimal donne son caractère distinctif. Plus les discussions sont vives, plus il y aura de chances que la séparation regrettable qui existe entre les milieux de l'enseignement secondaire et supérieur, et qui fait souffrir l'instruction publique, doive enfin disparaître. »

* * *

Tous les rapports font ressortir que le rôle élargi de la notion de fonction et l'introduction du Calcul différentiel et intégral ont rencontré partout la sympathie des professeurs de l'enseignement secondaire. En plusieurs endroits, là surtout où les réformes ont été accomplies sur *l'initiative des professeurs, avec leur concours actif ou même par le choix libre de leur volonté*, cette sympathie allait jusqu'à l'enthousiasme. Ils mettent leur ambition à bien enseigner les matières nouvelles et s'ils savent garder la mesure, s'ils ont de bons livres à leur disposition, s'ils peuvent vaincre les difficultés de méthode par une main sûre et par une science profonde, les résultats acquis ne manqueront pas d'égaler leur zèle.

Il est à regretter seulement que les professeurs appartenant à l'enseignement supérieur ne regardent pas toujours avec sympathie le mouvement réformiste. Notre président en a mis en lumière les raisons. Les professeurs d'Université, ennemis des réformes, les envisagent de leur point de vue spécial. Nous entendons la plainte éternelle qu'un cours de Calcul différentiel et intégral n'est pas suivi avec intérêt par celui qui en a déjà quelques connais-

sances. Pareils scrupules se présentaient toujours dans d'autres branches aussi. J'ai entendu parler d'un professeur de Physique qui commençait son cours en invitant ses auditeurs à oublier tout ce qu'ils avaient appris de la Physique dans l'école secondaire. J'ai connu un chimiste qui, dans l'intérêt de l'enseignement supérieur, s'opposait à l'introduction de la Chimie dans l'enseignement secondaire. Un professeur de la Géométrie descriptive préférait les élèves sortant du gymnase à ceux qui avaient étudié la Géométrie descriptive pendant quatre ans dans l'école réale. Je crois que des exemples pareils abondent dans tous les pays. Le scrupule du mathématicien n'est donc pas nouveau et il est aussi dénué de fondement que les autres.

Le professeur d'Université a précisément pour tâche, après s'être rendu un compte exact de l'état d'instruction de ses élèves, d'éclairer d'un jour nouveau leurs connaissances et de bâtir ensuite sur ce fondement reconnu. Si l'école secondaire garde une sage mesure et ne veut pas se hausser à l'égal de l'Université, cette tâche ne sera point difficile. *Par l'étendue, le degré de généralité, la rigueur des méthodes, et par tout le vaste champ des applications, les deux enseignements se distingueront toujours. Ils se distingueront aussi par la personnalité des professeurs, par l'intelligence et la maturité des élèves.* Et ces différences sont si profondes, pour des raisons pédagogiques et scientifiques, qu'il ne peut pas être question d'un relâchement de l'intérêt si l'enseignement supérieur est à la hauteur de sa tâche. L'enseignement secondaire doit respecter les besoins de l'enseignement supérieur et celui-ci doit connaître les méthodes en usage dans l'enseignement secondaire. S'il en est ainsi, la connaissance des principes du Calcul différentiel et intégral servira de base aux développements ultérieurs, tout comme un enseignement intuitif de la Géométrie est la base de l'étude systématique de la Géométrie, la Physique expérimentale celle de la Physique théorique, l'enseignement secondaire de l'Histoire politique celle de l'enseignement supérieur de l'Histoire des lois et des institutions; bref, comme l'enseignement d'un cycle inférieur précède et prépare l'enseignement du cycle supérieur.

C'est plus qu'il ne faut pour attirer l'attention des professeurs d'Université sur les aspirations réformatrices et pour les engager — comme ils en ont donné l'exemple dans plusieurs pays — à donner une direction à l'enseignement secondaire du Calcul infinitésimal. Jusqu'à présent, ils se sont laissé guider à peu près uniquement par des considérations ayant trait à leur spécialité. Cependant, comme beaucoup de rapporteurs l'ont fait observer, notre question n'est pas celle des futurs ingénieurs et mathématiciens, mais celle de la culture générale. Elle est la question — j'y insistais dans l'Introduction — du dévelop-

pement de l'habitude des raisonnements exacts, de la pénétration de l'esprit mathématique dans toute la civilisation moderne. « Dans l'enseignement secondaire — dit M. *Liard* — les études scientifiques doivent, comme les autres, contribuer à la formation de l'homme. Elles sont donc, elles aussi, à leur façon, des « humanités » au sens large du mot, les « humanités scientifiques ».

En envisageant la question de ce point de vue, il est impossible que les maîtres de l'enseignement supérieur, les plus hauts représentants de la civilisation humaine, ne s'associent à nos vœux qui tendent à faire répandre dans le cercle le plus large possible, parmi tous les hommes qui cultivent la Science, la connaissance du Calcul infinitésimal qui est la Science du changement, principe éternel du monde, qui est l'instrument indispensable de tout raisonnement scientifique et qui, enfin, représente une création magnifique de l'esprit humain.

J'emprunte l'image à un récent discours éloquent de M. le Président de la République française, qui parlait du rôle de l'épée et de la plume, et je dirai que l'enseignement secondaire aussi a un triple devoir : Glorifier le passé, honorer le présent et préparer l'avenir. A mesure que nous avançons parmi ces devoirs de l'école, le rôle des Mathématiques se fait de plus en plus haut dans l'ensemble des humanités. Nous voulons préparer l'avenir en formant la jeunesse pour la vie active et pour la pensée scientifique.

Heureusement, notre mouvement réformiste trouve, parmi les professeurs d'Université de tous les pays, des appuis forts qui l'ont fait naître, qui l'ont doté de manuels scolaires et qui en répandent, dans leurs cours, les idées rénovatrices. Il est à désirer que tous les professeurs appartenant à l'enseignement supérieur connaissent ce mouvement qui n'est pas — comme M. *Gutzmer*, collaborateur dévoué de notre président, l'a dit au Congrès de Rome — une révolution, mais qui est une étape de l'évolution. Oui, nous travaillons par ces réformes non seulement au progrès de l'enseignement mathématique, mais aussi à l'évolution de toute l'éducation. Nous attendons de l'évolution de l'enseignement mathématique une forte discipline logique, une intuition féconde, un vif intérêt pour les questions pratiques, le sentiment des réalités, l'appréciation juste des faits, la méthode critique, l'habitude du travail indépendant et par-dessus tout : la connaissance et l'amour de la vérité. Tout cela ensemble fait l'idéal suprême de l'éducation, la question primordiale de la civilisation. Pour servir cet idéal, pour résoudre cette question, les professeurs des enseignements secondaire et supérieur doivent concentrer tous leurs efforts ; s'ils le font l'avenir sera bien préparé.

Annexe : Nous reproduisons, à titre documentaire, le questionnaire qui a servi de base à l'enquête de M. le Prof. BEKE.

Questionnaire pour la Sous-Commission A sur l'introduction des premières notions de Calcul différentiel et intégral dans les Ecoles moyennes.

Remarques préliminaires. — 1. Le Comité central pose ces questions de manière à être renseigné sur les matières et la méthode d'exposition de cet important chapitre du plan d'études de l'enseignement moyen. Il tient à rappeler à nouveau qu'il ne prend pas parti pour une tendance déterminée, mais qu'il se propose avant tout de mettre en lumière les divers points de vue et les résultats obtenus.

2. — Nous entendons par écoles moyennes les établissements de l'enseignement secondaire supérieur désignés sous les noms de lycées, gymnases classiques ou réaux, ou établissements similaires des divers pays. Il serait utile d'avoir aussi des renseignements sur ce qui ce fait dans les écoles normales d'instituteurs, s'il y a lieu.

I. — *Dans quelle mesure a-t-on introduit les premiers éléments de Calcul différentiel et intégral dans les écoles moyennes de votre pays ?*

Nous désirons notamment être renseignés sur les points suivants :

a) Le Calcul différentiel est-il limité aux fonctions d'une variable ou considère-t-on aussi des fonctions de plusieurs variables ?

b) Quelles sont les fonctions auxquelles on applique le Calcul différentiel ?

c) Fait-on du Calcul intégral ? si oui, suivant quel programme ?

d) Expose-t-on le théorème de Taylor ?

e) Intègre-t-on des équations différentielles simples ? Lesquelles ?

II. — *Quel est le degré de rigueur dont on fait usage dans l'introduction des concepts fondamentaux et dans les démonstrations ?*

a) Se contente-t-on d'une introduction géométrique au Calcul différentiel, sans adopter d'une façon expresse la notion de limite, ou utilise-t-on cette notion ? Dans l'affirmative, est-ce que l'on présente une démonstration rigoureuse, ou envisage-t-on comme évidents des théorèmes tels que celui-ci : $\lim \frac{1}{a} = \frac{1}{\lim a}$?

b) Fait-on usage des différentielles ? Dans l'affirmative présente-t-on le Calcul différentiel comme une sorte de calcul approximatif, ou calcule-t-on avec des infiniment petits comme avec des grandeurs existant effectivement ?

c) Dans le théorème de Taylor tient-on compte du reste ou non ?

d) Signale-t-on l'existence de fonctions non dérivables ?

e) La notion de nombre irrationnel est-elle présentée sous une forme rigoureuse, ou se contente-t-on de parler seulement occasionnellement des nombres irrationnels, par exemple à l'occasion du calcul des racines ?

III. — *Quelles sont les considérations méthodiques que l'on suit dans l'introduction au Calcul différentiel et intégral ?*

a) Cette introduction est-elle déjà préparée dans les classes précédentes par une étude appropriée des fonctions simples et de leur représentation graphique, de manière que ces nouvelles matières ne constituent pas un supplément au programme, mais comme un chapitre qui se rattache étroitement à ce qui a déjà été vu.

b) Emploie-t-on la notation différentielle de Leibniz, ou bien les dérivées et les intégrales sont-elles désignées autrement ?

c) Commence-t-on l'exposé par le Calcul différentiel ou par le Calcul intégral, ou étudie-t-on simultanément les deux ?

d) L'intégrale est-elle présentée comme limite d'une somme (intégrale définie) ou comme fonction primitive (intégrale indéfinie) ? Si l'on opère des deux manières, dans quel ordre et dans quel lieu expose-t-on ces deux notions ?

e) Fait-on usage d'un manuel ? Quels sont les ouvrages caractéristiques dont on tient compte ? (Indication complète du titre, de l'éditeur et de l'édition).

IV. — *Quelles sont les applications du Calcul différentiel et intégral que l'on donne dans ce premier enseignement ?* Telles questions d'analyse, de géométrie ou de physique utilisant la notion de limite et qui, par leur importance, se trouvaient déjà partiellement ou entièrement introduites dans l'enseignement, sont-elles maintenant attachées directement à l'étude du Calcul différentiel et intégral, de manière à obtenir un exposé plus économique des matières à étudier ?

Nous signalons notamment les points suivants :

a) La théorie des maxima et minima.

b) Si l'on étudie la série de Taylor, quelles sont les fonctions dont on fait le développement en série entière ?

c) Au cas où l'on tient compte du reste dans la série de Taylor, fait-on usage des séries entières pour l'interpolation, l'extrapolation ou pour le Calcul des erreurs ?

d) Au cas où l'on étudie le Calcul intégral, applique-t-on celui-ci au calcul des aires (par exemple de la parabole, de l'ellipse) et au calcul des volumes ?

e) Pour quels concepts fondamentaux de la Mécanique, (vitesse, accélération travail, moment d'inertie, etc.) fait-on usage du Calcul différentiel et intégral ?

f) De la même manière en Physique, en particulier pour l'optique (courbes enveloppes, etc.) et en Électrodynamique (lignes de force, etc.).

V. — *L'introduction du Calcul différentiel et intégral a-t-elle amené un allégement du plan d'études en supprimant d'autres théories ? Dans l'affirmative, de quelle manière ?*

VI. — *Quels sont les résultats obtenus par l'introduction du Calcul différentiel et intégral ? Est-elle reconnue comme une réforme nécessaire ? Dans quelle mesure rencontre-t-elle de l'approbation ou de l'opposition ?* En particulier quelle est l'opinion des représentants des mathématiques et de la physique ?

Si vous avez à signaler d'autres observations ou remarques concernant l'enseignement du Calcul différentiel et intégral, veuillez en faire mention dans votre réponse à cette place.

Quels sont les passages des rapports publiés par votre sous-commission concernant la question de l'enseignement du Calcul différentiel et intégral ?