SUR UN DOUBLE SYSTEME DE LIGNES D'UNE SURFACE

Autor(en): **Occhipinti, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1914)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-15527

SUR UN DOUBLE SYSTÈME DE LIGNES D'UNE SURFACE

1. — Le système de lignes que je vais considérer jouit de la propriété d'avoir, en chaque point, la courbure normale égale à la racine carrée de la courbure totale de la surface en ce point, savoir à la moyenne géométrique des courbures principales; ces lignes n'existent donc que dans les régions à points elliptiques où la courbure totale est positive; leur équation différentielle est :

$$\frac{\mathrm{D}du^2 + 2\mathrm{D}'dudv + \mathrm{D}''dv^2}{\mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2} = \sqrt{\frac{\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}} ,$$

(E, F, G; D, D′, D″ étant respectivement les coefficients de la première et de la deuxième forme fondamentale), et peut s'écrire :

$$\begin{aligned}(1)\qquad & (\mathrm{D}\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} - \mathrm{E}\sqrt{\mathrm{DD}''-\mathrm{D}'^2})\,du^2 + \\ & 2(\mathrm{D}'\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} - \mathrm{F}\sqrt{\mathrm{DD}''-\mathrm{D}'^2})\,dudv + \\ & (\mathrm{D}''\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} - \mathrm{G}\sqrt{\mathrm{DD}''-\mathrm{D}'^2})\,dv^2 = 0 .\end{aligned}$$

Si l'on prend pour système (u, v) le système des lignes de courbure $(\mathrm{F} = \mathrm{D}' = 0)$, notre équation s'écrit

$$(\mathrm{D}\sqrt{\mathrm{EG}} - \mathrm{E}\sqrt{\mathrm{DD}''})\,du^2 + (\mathrm{D}''\sqrt{\mathrm{EG}} - \mathrm{G}\sqrt{\mathrm{DD}''})\,dv^2 = 0 .$$

Lorsque D et D″ sont positifs, elle donne :

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \sqrt{\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{GD}''}} ;$$

il faut alors prendre le radical donné avec la détermination positive; si D et D″ sont négatifs, nous aurons

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = -\sqrt{\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{GD}''}}$$

et il faut, par conséquent, prendre le radical donné avec la détermination négative.

Ces formules montrent d'abord que par chaque point de la région passent deux lignes de notre système, également inclinées sur chaque ligne de courbure.

2. — Indiquons par L les lignes considérées et observons que

$$\operatorname{tg}(\mathrm{L}v) = \sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{E}}\sqrt{\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{GD}''}}} = \sqrt[4]{\frac{\mathrm{GD}}{\mathrm{ED}''}} ,$$

mais l'équation des lignes caractéristiques[1] c dans notre système étant

$$\mathrm{D}du^2 - \mathrm{D}''dv^2 = 0$$

nous voyons que l'on a :

$$\operatorname{tg}(cv) = \sqrt{\frac{\mathrm{GD}}{\mathrm{ED}''}}$$

et, par suite :

$$\operatorname{tg}^2(\mathrm{L}v) = \operatorname{tg}(cv) ,$$

formule qui exprime une relation simple entre les angles que font avec une ligne de courbure les lignes L et c d'un système.

Nous pouvons obtenir une autre relation angulaire en considérant l'angle $(\mathrm{L}v)'$ projection, sur la sphère de Gauss, de l'angle $(\mathrm{L}v)$ d'une ligne L avec la ligne v de courbure.

On a alors, comme on sait, la formule

$$\operatorname{tg}(\mathrm{L}v)' = \operatorname{tg}(\mathrm{L}v)\sqrt{\frac{\mathrm{E}g}{e\mathrm{G}}} ,$$

dans laquelle e, g sont les coefficients extrêmes de la troisième forme fondamentale. On trouve :

$$\sqrt{\frac{\mathrm{E}g}{e\mathrm{G}}} = \frac{\mathrm{ED}''}{\mathrm{GD}} , \quad \text{donc} \quad \operatorname{tg}(\mathrm{L}v)' = \operatorname{tg}(\mathrm{L}v)\frac{\mathrm{ED}''}{\mathrm{GD}} = \left(\sqrt[4]{\frac{\mathrm{ED}''}{\mathrm{GD}}}\right)^3 = \operatorname{cotg}^3(\mathrm{L}v) ,$$

et enfin :

$$\operatorname{tg}(\mathrm{L}v)' = \operatorname{cotg}(cv)\operatorname{cotg}(\mathrm{L}v) .$$

---

[1] Ces lignes correspondent aux directions conjuguées et également inclinées sur les lignes de courbure; elles ont été étudiées par Pucci (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Vol. V (1889), p. 501-507), Reina (Ibid., p. 881-885) et d'autres auteurs. J'ai fait observer que leur équation différentielle peut s'obtenir en égalant à zéro le jacobien entre la deuxième forme fondamentale et le jacobien des deux premières formes. Si, au contraire, on égale à zéro le jacobien entre la première forme fondamentale et le jacobien des deux premières formes, on obtient l'équation des lignes bissectrices des lignes de courbure et que je voudrais appeler *lignes de torsion* parce que leurs directions correspondent aux maximum et minimum de torsion géodésique.

Cette formule montre que la tangente de l'angle projection, sur la sphère de Gauss, d'une ligne L avec une ligne de courbure, est égale au produit des tangentes des angles d'une ligne caractéristique et L d'un système, avec l'autre ligne de courbure.

3. — Démontrons maintenant la proposition suivante :

Les deux lignes L *qui passent par chaque point de notre région séparent harmoniquement une ligne caractéristique et une ligne de torsion passant par ce point.*

En effet, les coefficients angulaires des tangentes aux deux lignes L, à une ligne caractéristique c et à une ligne de torsion t sont respectivement :

$$-\sqrt[4]{\frac{GD}{ED''}}, \qquad \sqrt[4]{\frac{GD}{ED''}}, \qquad \sqrt{\frac{GD}{ED''}}, \qquad 1$$

et l'on voit alors aisément que le rapport anharmonique de ces quatre directions est -1.

4. — Calculons la *torsion géodésique* en un point d'une ligne L. Prenons encore comme système (u, v) celui des lignes de courbure et rappelons que la torsion géodésique s'exprime alors par la formule

$$\frac{1}{T} = \frac{(GD - ED'')\,du\,dv}{\sqrt{EG}\,(E\,du^2 + G\,dv^2)}\,. \tag{2}$$

Nous avons donc pour un point de notre ligne, si D et D'' sont positifs,

$$\frac{1}{T} = \frac{(GD - ED'')\sqrt[4]{EGDD''}}{\sqrt{EG}\,(E\sqrt{GD''} + G\sqrt{ED})} = \frac{(GD - ED'')\sqrt[4]{\frac{DD''}{EG}}}{\sqrt{EG}\,(\sqrt{GD} + \sqrt{ED''})} =$$

$$\frac{(\sqrt{GD} - \sqrt{ED''})\sqrt[4]{\frac{DD''}{EG}}}{\sqrt{EG}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{GD} - \sqrt{ED''})^2}{EG}}\,\sqrt[4]{\frac{DD''}{EG}} =$$

$$\sqrt{2\frac{GD + ED''}{2EG} - 2\sqrt{\frac{DD''}{EG}}}\cdot\sqrt[4]{\frac{DD''}{EG}}\,,$$

et enfin, indiquant par K et H respectivement la courbure totale et moyenne on a, en vertu de formules bien connues :

$$\frac{1}{T} = \sqrt{-2H - 2\sqrt{K}}\,.\,\sqrt[4]{K}\,. \tag{3}$$

Si D et D″ sont négatifs, on peut écrire

$$\frac{1}{T} = \frac{(GD - ED'')\sqrt[4]{\frac{DD''}{EG}}}{\sqrt{EG}\,(\sqrt{-ED''} + \sqrt{-GD})} = \frac{\sqrt{-ED''} - \sqrt{-GD}}{\sqrt{EG}}\sqrt[4]{\frac{DD''}{EG}} =$$

$$\sqrt{\frac{-ED'' - GD - 2\sqrt{EGDD''}}{EG}}\sqrt[4]{\frac{DD''}{EG}},$$

$$\frac{1}{T} = \sqrt{2H - 2\sqrt{K}}\,\sqrt[4]{K}\,. \tag{4}$$

On peut donc exprimer la torsion géodésique en un point d'une ligne L, à l'aide des courbures moyenne et totale de la surface. Ces formules peuvent être simplifiées par l'introduction des torsions géodésiques des lignes caractéristiques et de torsion passant par le point en considération.

En effet, dans notre système coordonné, les équations différentielles des lignes caractéristiques et de torsion étant respectivement

$$D du^2 - D'' dv^2 = 0 \qquad E du^2 - G dv^2 = 0\,,$$

nous voyons aisément à l'aide de la formule (2) que les torsions géodésiques τ_c, τ_t de ces lignes (de l'un système) sont données par les formules

$$\tau_c = -\frac{\tau_t\sqrt{K}}{H}\,, \qquad \tau_t = \sqrt{H^2 - K}\,.$$

On en déduit :

$$H = \frac{\tau_t^2}{\sqrt{\tau_t^2 - \tau_c^2}}\,, \qquad K = \frac{\tau_t\,\tau_c}{\tau_t^2 - \tau_c^2}\,,$$

et, si l'on substitue dans les formules (3) et (4), on trouve

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\frac{2\tau_t^2\,\tau_c}{\tau_c - \tau_t}}\,,$$

lorsque D et D″ sont positifs, et

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\frac{2\tau_t^2\,\tau_e}{\tau_c + \tau_t}}\,,$$

lorsque D et D″ sont négatifs.

Si donc τ et τ' indiquent les moyennes harmoniques entre τ_c et $-\tau_t$, et τ_c, τ_t, nous aurons

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\tau_t : \tau}\ , \qquad \frac{1}{T} = \sqrt{\tau_t : \tau'}\ .$$

La torsion géodésique d'une ligne L en un point est donc égale à la racine carrée du rapport entre la torsion principale (maximum ou minimum de torsion géodésique) et la moyenne harmonique des deux torsions géodésiques, des lignes caractéristique et de torsion (de l'un système) passant par le point en considération.

5. — Cherchons maintenant les relations qui lient les coefficients des deux premières formes fondamentales, lorsqu'on prend pour système coordonné (u, v) celui des lignes L. Dans ce cas l'équation (1) doit se réduire à renfermer le seul terme en $dudv$, donc :

$$\left.\begin{array}{l} D\sqrt{EG - F^2} - E\sqrt{DD'' - D'^2} = 0 \\ D''\sqrt{EG - F^2} - G\sqrt{DD'' - D'^2} = 0 \end{array}\right\}$$

La première donne :

$$D'' = \frac{D^2(EG - F^2) + E^2D'^2}{E^2D}\ , \tag{5}$$

et, si l'on substitue dans la seconde, on trouve

$$E^2D'^2 - F^2D^2 = 0\ ,$$

d'où l'on déduit pour D les deux valeurs :

$$D = \pm\frac{ED'}{F}\ .$$

Si l'on prend $D = \frac{ED'}{F}$ et l'on substitue dans la formule (5), on trouve

$$D'' = \frac{GD'}{F}\ , \qquad \text{donc :} \qquad \frac{D}{E} = \frac{D'}{F} = \frac{D''}{G}\ .$$

Mais alors[1] la surface serait sphérique ou plane. Il faut donc exclure le cas $D = \frac{ED'}{F}$ et il reste, par conséquent, $D = -\frac{ED'}{F}$; la formule (5) donne alors $D'' = -\frac{GD'}{F}$.

---

[1] V. Bianchi. Lezioni di Geometria differenziale. Vol. I, p. 121 (en note).

On a donc les relations

$$\frac{D}{E} = -\frac{D'}{F} = \frac{D''}{G} = \lambda \ , \tag{6}$$

lorsqu'on prend pour système coordonné celui des lignes L.

Il importe de remarquer la forme simple à laquelle se réduisent, dans le nouveau système, les équations des différentes lignes de la surface.

L'équation des lignes de courbure est $E du^2 - G dv^2 = 0$,

celle des lignes de torsion : $EF du^2 + 2EG du dv + FG dv^2 = 0$,

et celle des lignes caractéristiques : $EF du^2 - 2EG du dv + FG dv^2 = 0$.

L'interprétation géométrique de λ se déduit immédiatement de l'expression de la courbure totale K ; on trouve $\lambda^2 = K$, donc λ est la moyenne géométrique des courbures principales.

6. — Cherchons les équations qui vérifient les coordonnées cartésiennes x, y, z d'un point mobile de notre surface, exprimées en fonction des paramètres u, v des deux lignes L.

A cet effet nous observerons que les dérivées secondes des coordonnées s'expriment par les dérivées premières et par les cosinus X, Y, Z de direction positive de la normale à la surface, à l'aide des formules[1] :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} + DX \ ,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} + D'X \ ,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} + D''X \ ,$$

dans lesquelles les symboles $\begin{Bmatrix} rs \\ t \end{Bmatrix}$ de Christoffel se rapportent à la première forme fondamentale.

Si l'on multiplie la première par F et la seconde par E et on les ajoute, il en résulte, d'après (6) :

$$E \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + F \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \left[\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} E + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} F \right] \frac{\partial x}{\partial u} + \left[\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} E + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} F \right] \frac{\partial x}{\partial v} \ .$$

Si, au contraire, on multiplie la seconde par G et la troisième par F et on les ajoute, on obtient :

$$F \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + G \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \left[\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} F + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} G \right] \frac{\partial x}{\partial u} + \left[\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} F + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} G \right] \frac{\partial x}{\partial v} \ .$$

[1] V. Bianchi, *l. c.*, p. 116.

Ainsi les coordonnées x, y, z *d'un point mobile d'une surface, exprimées en fonction des paramètres* u, v *de deux lignes* L, *vérifient simultanément deux équations du type :*

$$(7) \qquad \begin{cases} a\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v} + b\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} = \alpha\dfrac{\partial\theta}{\partial u} + \beta\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\,, \\[2ex] b\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + c\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v} = \alpha'\dfrac{\partial\theta}{\partial u} + \beta'\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\,, \end{cases}$$

[où a, b, c sont proportionnels aux coefficients de la première forme fondamentale, α, β sont des combinaisons linéaires des deux premiers coefficients avec les symboles de Christoffel $\left\{ {1r \atop 1} \right\}$, $\left\{ {1r \atop 2} \right\}$ et α', β' sont des combinaisons linéaires des deux derniers coefficients avec les symboles de Christoffel $\left\{ {r2 \atop 1} \right\}$, $\left\{ {r2 \atop 2} \right\}$].

Supposons, au contraire, que les équations (7) constituent un système complètement intégrable et soient $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ trois solutions linéairement indépendantes; je dis alors que les lignes (u, v) tracent, sur la surface $x = x(u, v)$ $y = y(u, v)$ $z = z(u, v)$ un système de lignes L.

En effet, écrivons les équations (7) pour $\theta = x, y, z$, puis multiplions-les respectivement par X, Y, Z et ajoutons-les; nous aurons

$$a\Sigma X\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} + b\Sigma X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \alpha\Sigma X\frac{\partial x}{\partial u} + \beta\Sigma X\frac{\partial x}{\partial v}\,,$$

$$b\Sigma X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + c\Sigma X\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = \alpha'\Sigma X\frac{\partial x}{\partial u} + \beta'\Sigma X\frac{\partial x}{\partial v}\,,$$

c'est-à-dire :

$$aD' + bD = 0\,, \qquad bD'' + cD' = 0\,,$$

d'où :

$$D : D' : D'' = a : -b : c\,.$$

Et, comme a, b, c sont, par hypothèse, proportionnels à E, F, G, nous en déduisons : $D : D' : D'' = E : -F : G$ et, par conséquent, les lignes u, v sont des lignes L.

Juin 1913. R. Occhipinti (Palerme).