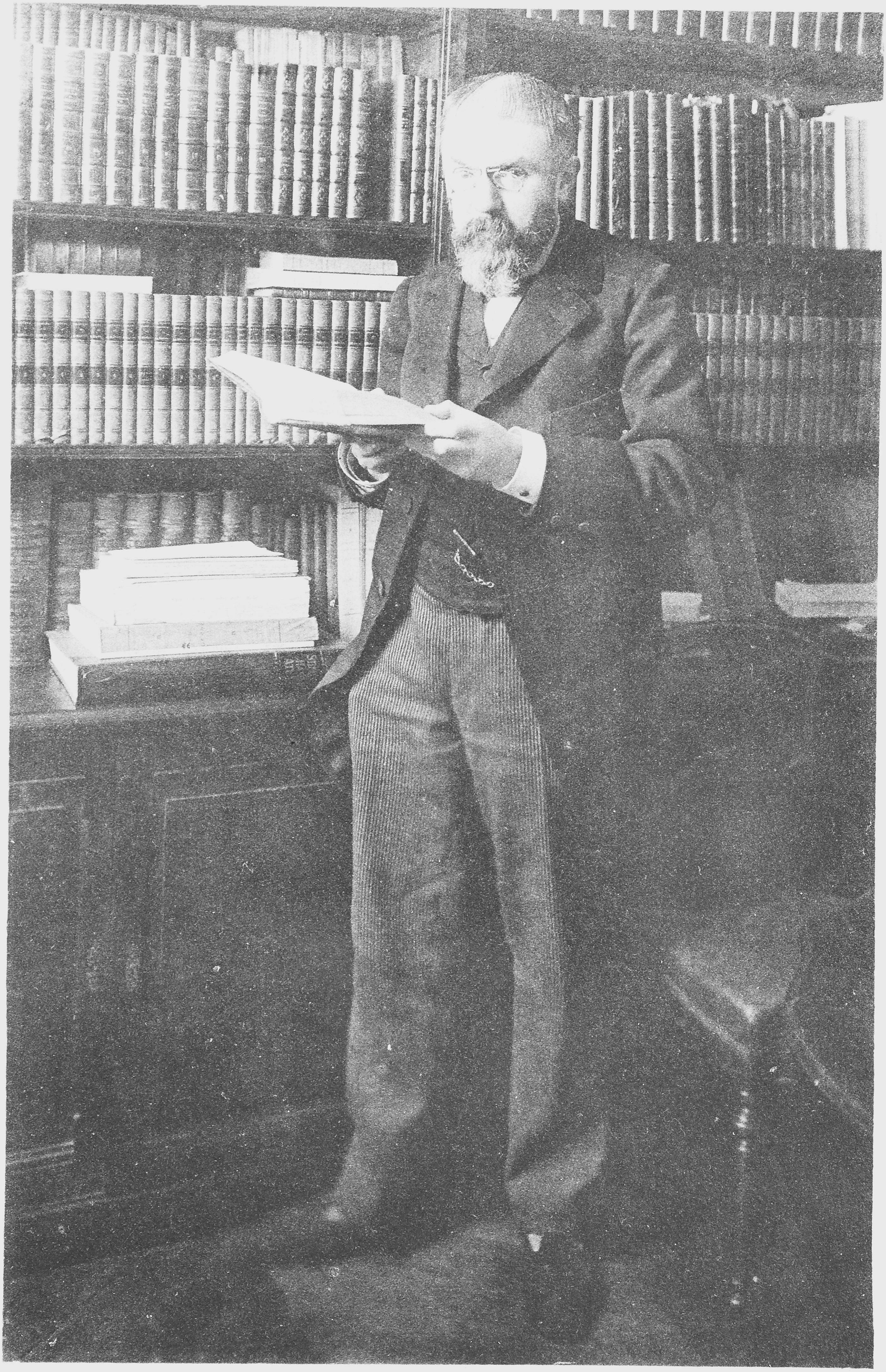

Phototypie SADAG.

HENRI POINCARÉ

Ainsi que *L'Enseignement Mathématique* l'a annoncé dans son numéro du 15 septembre 1912, nous ne pouvons laisser passer la disparition si douloureuse et si prématurée d'Henri Poincaré, sans consacrer à son souvenir un peu plus qu'une courte notice nécrologique.

Je suis très sensible à l'honneur que me fait la Rédaction de cette Revue, en me confiant la tâche de jeter un coup d'œil sur une des œuvres mathématiques les plus gigantesques ; mais, à coup sûr, je ne remplirai cette tâche que très imparfaitement.

Ceux qui ont complètement étudié et entièrement compris l'œuvre d'Henri Poincaré sont certainement fort peu nombreux, surtout si l'on considère l'œuvre et non des fragments qui peuvent être développés pour des raisons d'intérêt particulier. Tout au plus, peut-on imaginer et souhaiter l'avènement d'une école qui marchera sur les traces du Maître, retrouvera par d'autres méthodes bien des résultats qui semblent peu accessibles aux géomètres de niveau moyen, école qui donnera l'impression de faire des découvertes en mettant simplement au grand jour les richesses d'une mine repérée en son ensemble mais encore bien peu exploitée.

Ce qui suit est forcément très incomplet, parce que je me suis surtout attaché à parler de ce que je connaissais. Ce n'est qu'un effort obscur où je n'ai pu mettre toute la science mais seulement toute mon admiration.

Il n'est pas entré non plus dans mes conceptions de donner de longs détails biographiques et encore moins de faire une bibliographie analytique. Je ne pourrais mieux faire que n'a fait M. Ernest Lebon dans sa *Collection des Savants du jour*; le volume qu'il consacre à Henri Poincaré vient d'avoir sa deuxième édition arrêtée au 25 mai 1912 alors que le grand géomètre est mort le 17 juillet. Le plus remarquable est qu'entre ces deux dates si rapprochées, ce dernier ait encore pu préparer trois ou quatre publications nouvelles. Toutefois les 495 écrits classés par M. Lebon n'en constituent pas moins une liste fondamentale à laquelle je ne puis que renvoyer.

Qu'ajouter aussi au sujet des innombrables témoignages officiels reçus par l'illustre savant. Né le 29 avril 1854, il fut élu Membre de l'Académie des Sciences le 31 janvier 1887, c'est-à-dire alors qu'il avait à peine 33 ans! Tout le reste est à l'avenant! Toutes les Académies du monde avaient tenu à honneur de se l'attacher!

Plutôt que de revenir sur une longue énumération de titres officiels, j'aimerais à tracer la physionomie du Maître sous la forme plus familière de l'anecdote. Il semble que l'on soit peu riche à cet égard.

Le Dr Toulouse, dans son *Enquête médico-psychologique*, nous dépeint Henri Poincaré comme n'étant ni liant ni confidentiel (p. 137). C'était peut-être vrai, s'il faut entendre par là qu'il n'aimait pas se lier rapidement avec les inconnus. Cette réserve est naturelle, elle s'impose même absolument à l'homme qui a acquis le droit d'en juger beaucoup d'autres et qui justement a le scrupule très noble de ne point diminuer sa liberté par de trop nombreuses liaisons. Beaucoup de personnages, d'une envergure infiniment moindre, doivent ainsi s'interdire les liens et les confidences.

Mais, pour ma part, je n'ai jamais approché le grand savant sans le trouver souriant, sympathique, serviable.

Les discours les plus académiques l'ont dépeint parfois sous une forme qui m'a profondément choqué. Pourquoi insister par exemple sur les distractions d'un esprit génial quand il est évident qu'elles sont en dehors de cet esprit. Ce qu'il faudrait proposer à l'admiration, c'est plutôt le travail que produisait cette intelligence quand il lui arrivait de perdre la conscience du monde vulgaire. J'imagine qu'un tel homme a dû avoir souvent la sensation qu'il n'était qu'une pensée! Et nous risquerions de le tourner en ridicule dans de tels moments! C'est un véritable sacrilège.

Mais, pour ne point paraître trop sévère, je raconterai volontiers une petite scène éminemment consciente et spirituelle dont il me fut donné d'être témoin. C'était en juillet 1899. Je subissais à la Sorbonne les épreuves du certificat d'Astronomie. Une fois interrogé, j'écoutais les réponses de mes camarades. L'un d'eux, très jeune (ceci a de l'importance pour la suite) ne brillait pas et Henri Poincaré, qui l'examinait, diminuant peu à peu ses exigences, finit par lui poser de toutes petites questions de cosmographie et notamment celle-ci: « Combien y a-t-il de petites planètes? » Nous étions, je le répète, en 1899, année pour laquelle le simple *Annuaire du Bureau des Longitudes* indique 445 de ces astéroïdes.

Malheureusement, après de longues hésitations, le candidat opina pour 150. Du coup l'examinateur, qui attendait la réponse en se promenant les mains derrière le dos, s'arrêta net et répliqua malicieusement: « Il doit y avoir longtemps que vous avez appris cela! »

Pour en revenir à notre humble publication, nous ne pouvons point ne pas faire remarquer que nous perdons en Henri Poincaré un des membres du Comité de Patronage de *L'Enseignement Mathématique*. Il fut d'ailleurs un collaborateur[1] de la première heure. Sans doute, tous les journaux mathématiques s'honoraient aussi en publiant ses travaux; puissions-nous, si peu que ce soit, nous honorer encore en publiant un dernier hommage à la mémoire de la pensée géniale qui vient de disparaître.

---

[1] Voici la liste des articles d'Henri Poincaré qui ont été publiés par *L'Enseignement Mathématique*: La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement (T. I, 1899, p. 157). — La notation différentielle et l'enseignement (T. I, 1899, p. 106), — Les définitions générales en mathématiques (T. VI, 1904 p. 257). — L'invention mathématique (T. X, 1908, p. 357). — Discours d'ouverture du Congrès de l'A. F. A. S. tenu à Lille (T. XI, 1909, p. 384),

Le Géomètre.

Les premiers travaux de mathématiques pures qui illustrèrent Henri Poincaré ont trait à la théorie des fonctions abéliennes et des fonctions plus générales qu'il appela fonctions fuchsiennes.

Ils apparaissent, à partir de 1880, dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. Le Mémoire fondamental intitulé *Théorie des groupes fuchsiens* inaugure magistralement les *Acta Mathematica*. On peut déjà voir de ce côté une ligne admirablement continue qui, dessinée il y a plus de trente ans, se prolonge, au travers des œuvres les plus diverses, pour aboutir au Mémoire *Sur l'uniformisation des fonctions analytiques* publié encore aux *Acta Mathematica* en 1908 et qui semble ainsi dater d'hier.

Vers 1880 les travaux d'analyse semblant les plus ardus et les plus importants étaient ceux dus aux grands géomètres alors vivants qui s'appelèrent Briot, Bouquet, Weierstrass et surtout Hermite.

La théorie des fonctions elliptiques, sans avoir peut-être le cachet classique relativement élémentaire qu'on peut lui donner maintenant, était cependant devenue parfaitement claire. On savait depuis longtemps qu'après les courbes unicursales il convenait de placer celles, telles que les cubiques, dont les coordonnées s'exprimaient en fonction elliptique, c'est-à-dire en fonction *uniforme* d'un paramètre variable. L'intuition indiquait même qu'un théorème analogue devait avoir lieu pour une courbe *algébrique* quelconque et de grands efforts étaient faits, notamment par l'école allemande, pour l'établir définitivement. Mais pour cela, il fallait apporter à la théorie des fonctions abéliennes des perfectionnements analogues à ceux dont la théorie des fonctions elliptiques avait déjà bénéficié. Ce fut la première gloire d'Henri Poincaré alors qu'une seconde, non moins éclatante, devait coïncider presque exactement avec elle.

L'école allemande, dirigée par les recherches de Fuchs, appliquait aussi avec succès les méthodes de Cauchy à l'étude des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. On sentait vaguement que de nouvelles fonctions devaient correspondre à de telles équations, tout comme les fonctions abéliennes correspondaient à des intégrales portant explicitement sur des différentielles algébriques. D'ailleurs, les fonctions elliptiques, considérées par rapport au module, avaient naturellement conduit Hermite aux fonctions *modulaires* qui satisfaisaient à des équations différentielles linéaires, fort particulières il est vrai. Henri Poincaré généralisa les choses avec une rapidité foudroyante. Il aperçut, dans la théorie des fonctions abéliennes, les fonctions qui devaient jouer un rôle analogue à celui des fonctions modulaires dans la théorie des fonctions elliptiques, et il se trouva que ces fonctions étaient celles qui intégraient les équations différentielles linéaires précédemment considérées. Il enlevait ainsi à l'Allemagne la gloire que celle-ci était sur le point de conquérir mais il fut le plus généreux des vainqueurs, envers la nation rivale, en donnant aux nouvelles fonctions le nom de *fonctions fuchsiennes*.

Il ne faudrait point maintenant considérer de tels résultats uniquement comme des triomphes du passé. Ils se mêlent de plus en plus et ont d'ailleurs été mêlés par Henri Poincaré lui-même aux recherches des géomètres de la jeune génération. Ils peuvent servir et ont effectivement servi de base à une étude générale des fonctions analytiques.

Ces fonctions forment pour le débutant un écheveau passablement compliqué, surtout si l'on veut sortir de la considération directe des fonctions uniformes. Pour en faire une étude approfondie, faudra-t-il considérer les uns après les autres tous les éléments de l'ensemble ?

Heureusement non ! Quelques fonctions seulement, adroitement choisies et dont les singularités seront étudiées à fond, constitueront de véritables clefs d'or pour l'étude de classes extrêmement étendues d'autres fonctions. Que l'on considère, par exemple, les formules de Cauchy et de Taylor qui, quoique insuffisantes pour tous les problèmes de l'analyse moderne, n'en sont pas moins les premiers instruments fondamentaux dont il faille se préoccuper. Qu'y-a-t-il d'absolument essentiel dans ces formules ? Rien d'autre que la simple fraction rationnelle

$$\frac{1}{z - a}.$$

Pour parler un langage tout à fait moderne, c'est là le *noyau* de la formule de Cauchy. La singularité extrêmement simple constituée par le pôle a règle le développement de la fraction en série entière et, du même coup, les conditions d'existence du développement taylorien d'une fonction analytique *quelconque*.

Sans vouloir établir une véritable comparaison entre ces points rudimentaires et des théories d'aspects fort divers, on peut juger cependant de la puissance des méthodes appuyées sur l'étude préliminaire de fonctions présentant, au lieu du pôle simple de la fraction précédente, des singularités appartenant à d'autres types. Ainsi les célèbres théorèmes de M. Emile Picard sur l'allure d'une fonction analytique quelconque, dans le voisinage d'un point singulier essentiel, dérivent d'une propriété particulière d'une fonction modulaire particulière elle-même.

Quelle ne dût pas être la puissance d'Henri Poincaré en possession de ses fonctions abéliennes, fuchsiennes et de tous les types dérivés qu'il en tira. Le Mémoire qui prouve peut-être le mieux cette extraordinaire puissance me paraît être celui qui a trait à l'uniformisation des fonctions analytiques et auquel j'ai déjà fait allusion plus haut.

Après avoir fait l'admiration des géomètres d'il y a trente ans en complétant, après Riemann, l'uniformisation des fonctions multiformes *à un nombre fini de branches*, il arrive à des résultats analogues pour les fonctions en possédant une infinité. *Depuis lors l'étude des fonctions analytiques quelconques est ramenée à l'étude des fonctions uniformes et des transcendantes inverses de celles-ci.*

Rien qu'en ce qui précède, nous voyons déjà se dessiner une ligne admirable et grandiose. Ce n'est qu'une route indiquée dans un pays cultivé sur bien d'autres points, entre lesquels on pourrait tracer d'autres routes, mais je ne me sens point la compétence nécessaire pour les tracer toutes, celles que je viens d'indiquer suffisant à forcer l'admiration. D'ailleurs il semblait être dans l'esprit de mon illustre maître de créer ou de s'assimiler les théories les plus générales avec des points de départ assez quelconques.

Il contribua énormément, dans ces dernières années, au perfectionnement de la théorie des équations intégrales due à M. Fredholm. Or, pour raisonner comme je le faisais tout à l'heure à propos de la formule de Cauchy, on peut encore se demander ce qu'il y a d'absolument essentiel dans ces équations intégrales. Rien d'autre que les *noyaux*. Et ces noyaux sont d'abord des potentiels ou des fonctions possédant des singularités analogues, fonctions que la Physique mathématique avait primitivement considérées mais sans faire justement la synthèse dont le mérite appartient à M. Fredholm. Henri Poincaré connaissait admirablement les fondements exposés dans ses Mémoires *Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique* (*American Journal,* 1889. *Rendiconti,* Palerme, 1894). Il jugea la synthèse d'un coup d'œil, parut y apporter sans efforts les plus utiles contributions et reprit même ses recherches sur les marées à l'aide de la nouvelle théorie.

D'autre part, les équations intégrales correspondent à des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. A ce point de vue, Henri Poincaré fut un créateur, en étudiant les caractères de convergence des déterminants d'ordre infini.

Des fonctions analytiques à une seule variable il sut également passer avec aisance aux fonctions qui en contiennent deux ou plusieurs. Son célèbre mémoire *Sur les résidus des intégrales doubles (Acta Mathematica, T. IX)* contient, en ce sens, la véritable extension du théorème de Cauchy qui avait été vainement cherchée avant lui. Et il apparaît alors que la périodicité des intégrales doubles est intimement liée à celle des intégrales abéliennes.

Je m'arrête car je n'ai point l'intention, comme je l'ai déjà dit, d'écrire un article encyclopédique. Ainsi je laisse de côté les recherches sur les courbes réelles définies par des équations différentielles. Ce n'est pas la partie la moins importante de l'œuvre car elle joue un rôle essentiel en Mécanique céleste, science sur laquelle l'illustre géomètre nous a laissé des ouvrages d'un caractère suffisamment didactique.

Au contraire il ne nous laisse rien de semblable, quant à ces fonctions analytiques auxquelles il a cependant si merveilleusement travaillé. Tout est dans des mémoires isolés. En de nombreux endroits de son *Traité d'Analyse*, M. Emile Picard nous a fait connaître des fragments de ces trésors. Les ouvrages didactiques de M. Appell sur les fonctions elliptiques, sur les fonctions algébriques et leurs intégrales, peuvent constituer aussi d'importants travaux d'approche pour qui veut s'initier aux résultats dus à Henri Poincaré ; mais qui n'aurait désiré cependant que ce dernier publie lui-même un ouvrage, à début relativement élémentaire, sur les fonctions abéliennes et fuchsiennes.

Peut-être ne jugeait-il point ces théories suffisamment parfaites et préférait-il continuer à les étendre.

Il est certain aussi que la possibilité de marcher sans cesse à de nouveaux résultats diminuait chez lui le désir de s'attarder à exposer ceux qui déjà lui semblaient acquis.

L'Astronome.

Si l'Astronomie est — ne serait-ce que d'après l'étymologie du mot — l'étude des lois présidant au mouvement des astres, nul ne fut, à notre époque, plus astronome qu'Henri Poincaré.

Les lois de Képler — dont la loi de Newton est une conséquence très simple — règlent très aisément le mouvement relatif de deux corps célestes, le soleil et une planète par exemple. Que l'on adjoigne un troisième corps et l'on se trouve en présence des difficultés les plus formidables et les plus inattendues. Et cependant ce fameux Problème des trois corps s'impose absolument. Impossible de s'en tenir toujours au mouvement d'une seule planète, sans considération des perturbations provenant d'une autre. Impossible, en particulier, de faire la théorie de la Lune sans tenir compte de l'influence perturbatrice du Soleil.

Et cependant, ainsi posé, le problème n'avait jamais pu être poussé bien loin. Lagrange en transforma les équations de manières diverses et intéressantes, mais ne fit guère apparaître autre chose que les intégrales des aires et des forces vives, conformément aux lois les plus générales de la Dynamique. Laplace, dans des cas extrêmement particuliers, montra que le problème admettait des solutions périodiques, mais les trois corps formaient toujours les sommets d'un triangle équilatéral ou étaient toujours en ligne droite.

C'est à Henri Poincaré que revient encore la gloire d'avoir établi l'existence de solutions périodiques infiniment plus générales, d'avoir montré que le problème n'admet point d'intégrales à propriétés analytiques simples, en dehors précisément de celles des aires et des forces vives, et notamment point d'intégrales uniformes. De plus ses méthodes se trouvèrent propres à faire une synthèse de toutes celles employées, un peu au hasard, pour résoudre le problème dans les cas où les besoins pratiques demandaient impérieusement des résultats, quels qu'ils soient. Bien plus il montra que ces méthodes pratiques avaient des infirmités profondément insoupçonnées et dont la révélation fut une véritable stupéfaction.

A l'occasion de son soixantième anniversaire, en 1889, S. M. le Roi de Suède et de Norvège, Oscar II, ouvrit un concours entre les géomètres du monde entier. Préoccupation bien digne de ces âpres contrées scandinaves qui virent naître Abel ! Le premier mémoire couronné fut celui d'Henri Poincaré *Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique* lequel contient déjà toutes les merveilles précédentes. D'ailleurs le même concours fut un triomphe général pour l'école française car le mémoire *Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs,* immédiatement placé après le précédent, était dû à M. Paul Appell. Les deux écrits remplissent à eux seuls le tome XIII des *Acta Mathematica.*

Quelques années plus tard, en développant son travail, Henri Poincaré devait en tirer les trois admirables volumes intitulés *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste.*

Dans le premier volume il établit rigoureusement l'existence des solutions périodiques, examine les solutions infiniment voisines et, à l'aide de ces éléments, cherche à rétablir les solutions quelconques, représentées par des séries entières en μ (cette lettre désignant un rapport de masses généralement très petit), que les praticiens obtenaient d'une manière quasi empirique. C'est ici que se place la révélation stupéfiante mentionnée plus haut et qui se trouvait déjà dans le mémoire des *Acta.* Quand, partant des solutions périodiques et de leurs transformées infiniment voisines, on cherche à bâtir une solution plus générale (qualifiée de *solution asymptotique),* la construction de celle-ci, dans la méthode d'Henri Poincaré, dépend de certaines équations différentielles linéaires à coefficients constants dans lesquelles la variable, bien entendu, est le temps. Mais les solutions contiennent alors μ non pas sous forme de séries entières, comme il arrivait dans la pratique, mais sous forme de fractions de la forme

$$\frac{A_n}{1 + a_n\mu},$$

Comment établir l'accord? Rien de plus simple *au point de vue formel.* La simple division développe la fraction précédente en série entière. Oui, mais le rayon de convergence est alors mesuré par la valeur absolue de $-\frac{1}{a_n}$, *et il se trouve que les a_n grandissent au delà de toute limite. Les séries entières en μ sont toujours divergentes.* Cependant, dira-t-on, elles n'avaient point cette apparence dans les calculs des astronomes. Ceux-ci ne prenant que les premiers termes, constataient leur rapide décroissance et voyaient bien qu'il n'y avait point d'inconvénient pratique à négliger les autres! Tout cela est exact mais c'est là un phénomène de convergence asymptotique déjà présenté par bien d'autres séries, telles celles de Stirling, qui sontd'une construction extrêmement simple par rapport à celles de la Mécanique céleste.

La découverte d'Henri Poincaré consistait précisément à éclairer la nature intime de développements sur lesquels on ne savait à peu près rien au point de vue analytique pur.

Le second volume des *Méthodes nouvelles* est surtout consacré à la comparaison des méthodes qu'il rattache aux siennes propres. Les idées de Gyldén notamment y tiennent une place considérable. Et, chose curieuse, alors que Gyldén semble avoir d'abord servi de guide à Henri Poincaré, la puissance de ce dernier fut telle qu'il passa rapidement avant son guide et rectifia bientôt des erreurs que celui-ci commettait. Le Mémoire *Sur la Méthode horistique de Gyldén* (*Acta Mathematica,* 1905) est, à cet égard, d'une lecture singulièrement suggestive.

Le troisième volume a surtout trait à l'emploi de la notion d'*invariant intégral.* Le mouvement d'un liquide, pour prendre un exemple relativement simple, est en général régi par des équations d'une étude déjà fort compliquée. Pourtant le *volume* du liquide est une chose simple à concevoir et qui se conserve quelque compliquée que soit l'agitation des particules. C'est là un *invariant intégral.* Dans un tel cas, cet invariant est plutôt une donnée de la question qu'une conséquence des équations du mouvement, mais Henri Poincaré remarqua précisément que de tels invariants existent même dans les cas où ils ne sont pas visibles à l'avance de manière aussi évidente. Les conséquences qu'il en tire sont nombreuses. Ils correspondent notamment, dans le problème des trois corps, à l'existence de certaines solutions périodiques.

De telles solutions sont toujours caractérisées par l'existence de courbes fermées, ce qui est évident, en particulier, pour les trajectoires des corps si la périodicité consiste, pour ceux-ci, à revenir à des positions déjà occupées. Mais comment reconnaître qu'aux inextricables équations du mouvement correspondent certaines courbes fermées? L'un des plus beaux raisonnements consiste à attacher à ces courbes de certaines intégrales multiples qui, comme l'intégrale double qui figure dans la formule de Stokes, ne sont bien au fond que des intégrales de ligne *si la courbe est fermée.*

Ainsi l'invariant intégral prouve l'existence de la solution périodique.

Pour l'heure actuelle tous ces merveilleux résultats ne semblent compris que de manière partielle; en tous cas il ne semblent pas avoir fait naître des travaux d'une ampleur proportionnée à celle de l'exemple donné par le génial créateur. Peut-être, comme l'a dit Sir G.-H. Darwin en remettant à Henri Poincaré la Médaille d'Or de la Société astronomique de Londres, l'ouvrage précédent sera-t-il, pour le prochain demi-siècle, la mine d'où des chercheurs plus humbles extrairont leurs matériaux. (*Voir* E. Lebon, *loc. cit., p.* 48)

C'est dans un ordre d'idées plus modeste, mais encore passablement élevé, que sont conçues les *Leçons de Mécanique Céleste* professées à la Sorbonne. J'ai déjà rendu compte de ces trois nouveaux volumes dans *L'Enseignement Mathématique* [1] ce qui me permet d'être un peu plus bref à leur égard. Ce qui frappe surtout en eux c'est l'extrême habileté avec laquelle toutes les équations sont immédiatement écrites sous la forme canonique et la manière de rattacher à la méthode de la variation des constantes la question fondamentale de la destruction des termes séculaires.

Le second volume est consacré, dans une première partie, au développement de la fonction perturbatrice. Les belles recherches sur les périodes des intégrales doubles y interviennent constamment. Dans la seconde partie, consacrée à la Théorie de la Lune, nous sommes directement conduits aux équations linéaires écrites par Hill pour le mouvement du nœud et du périgée lunaires.

La Théorie des Marées occupe tout le troisième volume. Ainsi que je l'ai déjà dit plus haut (p. 15) elle emprunte un

---

[1] Voici d'ailleurs la liste des publications d'Henri Poincaré qui ont été analysées dans cette Revue. Les noms propres en italique sont ceux des auteurs des analyses. — La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes (*C.-E. Guye.* — T. I, 1899, p. 228). — Electricité et Optique (*A. Buhl.* — T. IV, 1902, p. 307). — Wissenschaft und Hypothese (*H. Fehr.* — T. VII, 1905, p. 330). — Leçons de Mécanique Céleste (*A. Buhl*): Tome I. — Théorie générale des perturbations (T. VIII, 1906, p. 248). — Tome II. — Fonction perturbatrice et Théorie de la Lune (T.XI, 1909, p. 231). — Tome III. — Théorie des Marées (T. XII, 1910, p. 256). — Savants et écrivains (*X.*-T. XII, 1910, p. 259). — Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik (*A. Buhl.* — T. XII, 1910, p. 446). — Calcul des probabilités (*A. Buhl.* — T. XIV. 1912, p. 165). — Hypothèses cosmogoniques (*A. Buhl.* — T, XIV, 1912, p, 167). Mentionnons aussi l'étude du docteur Toulouse sur Henri Poincaré, récemment analysée par *Ed. Claparède.* (T. XIV, 1912 p. 81).

caractère ultra-moderne à la théorie des équations intégrales de Fredholm.

Dans ces admirables développements, Henri Poincaré fait à beaucoup de géomètres l'effet d'être isolé : lui seul pouvait se retourner dans l'infinie variété de ces questions ardues. Cette impression vient probablement de la concision de son style mais cependant, si l'on persiste à l'étudier, on est rapidement convaincu qu'il n'a jamais cherché à s'enfermer dans une tour d'ivoire. Au contraire, il citait avec empressement tous ceux à qui il empruntait quelque chose et semblait heureux de fondre leurs travaux avec les siens. Dans les si difficiles chapitres qu'il consacre à la non-existence des intégrales uniformes du problème des trois corps (*Méthodes nouvelles*, t. I, chapitres V et VI), il montre tout le parti qu'il tire des célèbres résultats de M. Darboux concernant l'obtention des coefficients des termes de rang élevé dans la série de Taylor.

Dans le tome II des *Leçons*, il joint soigneusement aux siens les travaux de M. Picard sur la périodicité des intégrales doubles et emprunte à M. Appell ses séries hypergéométriques à deux variables pour aborder le développement de la fonction perturbatrice. Sa gloire lui semblait sans doute plus chère quand elle était celle de la Sorbonne et plus généralement de cette école française, maintenant consternée par l'immense perte qu'elle vient de faire.

Ce qu'il y a d'effrayant, c'est qu'il n'a jamais cherché à donner le moindre caractère définitif à ses travaux de mécanique céleste. Sans cesse il y ajoutait quelque chose de nouveau, disait y apercevoir des lacunes que personne n'avait vues mais qui étaient pour lui prétexte à de nouvelles et importantes publications.

Quelques semaines avant sa mort paraissait dans les *Rendiconti* du Cercle mathématique de Palerme un article *Sur un théorème de Géométrie* dans lequel il revient encore à ses chères solutions périodiques du Problème des trois corps. Il s'agit cette fois de reconnaître l'existence de certaines d'entre elles pour des valeurs de μ non très petites, ce qu'il rattache à l'existence d'un invariant intégral relatif à de certaines transformations qu'il considère comme purement géométriques.

Il montre les grandes difficultés qu'il rencontre et exprime ainsi le regret de ne pouvoir les vaincre complètement : « Il semble, dans ces conditions, que je devrais « m'abstenir de toute publication tant que je n'aurai pas « résolu la question ; mais après les inutiles efforts que j'ai « faits pendant de longs mois, il m'a paru que le plus sage « était de laisser le problème mûrir, en m'en reposant durant « quelques années ; cela serait très bien si j'étais sûr de « pouvoir le reprendre un jour, mais, à mon âge, je ne puis « en répondre. D'un autre côté, l'importance du sujet est « trop grande et l'ensemble des résultats obtenus trop con- « sidérable déjà, pour que je me résigne à les laisser défini- « tivement infructueux. Je puis espérer que les géomètres « qui s'intéresseront à ce problème et qui seront sans doute « plus heureux que moi, pourront en tirer quelque parti et « s'en servir pour trouver la voie dans laquelle ils doivent « se diriger ».

Quels mots ajouter, dit M. Paul Painlevé, à ce testament scientifique si noble et si simple ? Rien, en effet. Tout commentaire risquerait de détruire le sublime provenant de tant de modestie s'ajoutant à tant de valeur.

L'honneur de continuer à la Sorbonne l'enseignement d'Henri Poincaré échoit à M. Paul Appell, qui reprend la chaire de Mécanique céleste sous le titre de « Mécanique analytique et Mécanique céleste ».

Ceci n'étonnera personne, non seulement parce que les travaux des deux géomètres présentent de nombreux contacts, non seulement parce que les équations de la dynamique ont été mises, par M. Appell, sous des formes nouvelles et originales, qui pourraient bien donner, en mécanique céleste, des surprises analogues à celles qu'Henri Poincaré tirait de la forme canonique, mais aussi parce que l'éminent successeur a souvent manifesté le désir de voir quelque géomètre ou astronome se reporter aux travaux d'Henri Poincaré pour essayer de les rendre plus accessibles en quelque cas particulier simple et heureusement choisi. Par suite, le géomètre ou l'astronome en question ne pouvaient vraisemblablement espérer de meilleur guide.

Le Physicien.

Le passage de la Mécanique Céleste à la Physique mathématique, ou réciproquement, paraît avoir été fait par Henri Poincaré avec une aisance extrême, avec une continuité absolue.

Au moment où les grands problèmes de la Physique s'offrirent à lui, les esprits étaient particulièrement en butte à l'obsession mécaniste. Il fallait trouver des explications mécaniques de la lumière, de l'électricité, bref, de tous les phénomènes. L'école anglaise, avec Maxwell, et après des efforts aussi considérables que bizarres, semblait bien entrevoir quel devait être le véritable résultat mais la clarté n'était pas la qualité dominante de Maxwell. Ce dernier entassait les unes sur les autres des théories d'apparences contradictoires ; quand on les avait toutes lues, non seulement on ne savait point quelle était la bonne, mais on avait encore l'impression extrêmement déconcertante que l'auteur avait tout fait pour empêcher un choix définitif.

La véritable pensée de Maxwell nous fut clairement livrée par Henri Poincaré, notamment dans ses admirables leçons de la Sorbonne publiées sous le titre *Electricité et Optique*. Si l'on veut une théorie mécanique de l'électricité ou de la lumière, c'est à dire si l'on veut construire les équations des phénomènes électriques ou lumineux *en partant des équations de la Dynamique*, la chose est possible *d'une infinité de manières*. Choisissons la manière qui nous semble être la plus commode et la plus féconde, mais quant à en imaginer une qui nous livrerait un mécanisme unique, définitif et nous ferait connaître une vérité physique absolue, ceci n'appartient plus à la physique mais à la métaphysique.

Une telle conclusion ébranle douloureusement l'esprit de celui qui la conçoit pour la première fois. L'homme, dit Henri Poincaré, ne se résigne pas aisément à ignorer le fond des choses.

Mais quelle consolation pour celui qui se débarrasse courageusement de la préoccupation purement mystique des vérités premières et qui sait chercher les conséquences accessibles de théories semblant arbitraires à la base et pourtant sans cesse génératrices de faits éclatants et merveilleux.

Toutes vagues qu'elles étaient, les théories de Maxwell conduisaient cependant à concevoir la lumière comme résultant d'oscillations électriques à période très courte. Hertz réalisa les oscillations auxquelles son nom est resté attaché, oscillations qui furent immédiatement assimilées par tout le monde à de la lumière à grande longueur d'onde. Nous devons d'abord à Henri Poincaré un magistral exposé de ces géniales créations, exposé qu'il féconda bientôt de ses propres réflexions. Là encore il appliqua toutes les ressources de son analyse. Les séries divergentes qu'il a employées en Mécanique Céleste interviennent dans ses recherches sur la diffraction des ondes hertziennes (*Rendiconti*, Palerme, 1910). Les équations intégrales jouent pour lui un rôle analogue. Quand Max Planck explique l'émission par le rôle d'une infinité d'oscillateurs hertziens de périodes diverses (théorie des Quanta), Henri Poincaré tire immédiatement du calcul des probabilités une confirmation de cette théorie.

La lumière longitudinale ne l'embarrasse pas plus que la lumière transversale, d'où ses contributions à l'étude des rayons cathodiques.

Ce qui est extraordinaire en tout ceci, c'est le pouvoir d'expliquer toutes les expériences et même d'en susciter sans en faire par soi-même. Ce n'est peut-être pas la première fois qu'arrive une telle chose car personne n'a encore oublié, je pense, cet extraordinaire Américain qui s'appelait Willard Gibbs et qui, sans jamais faire le moindre travail de laboratoire, a livré aux physiciens et aux chimistes des résultats que ceux-ci vérifiaient par un labeur acharné. Mais, alors que Willard Gibbs avait surtout des préoccupations physico-chimiques, il semble plutôt qu'Henri Poincaré n'était jamais préoccupé longtemps dans une direction donnée. C'est, dès qu'on annonçait quelque fait, qu'il trouvait immédiatement dans son arsenal analytique quelque méthode qui s'y appliquait, alors qu'il l'avait créée autrefois en vue d'autre chose. Et cette méthode donnait toujours du nouveau.

Il y a d'ailleurs là un triomphe manifeste de la Physique mathématique, telle qu'elle a été si souvent taxée d'impuissance par les physiciens. Henri Poincaré y débuta par ses cours de la Sorbonne sur le potentiel newtonien, l'élasticité, la propagation de la chaleur, etc. C'est bien le point de vue mathématique où l'on semble parler le langage physique uniquement pour interpréter certaines solutions d'équations différentielles. Quel mépris certains praticiens n'ont-ils point montré pour de telles méthodes ! Et cependant, entre les mains d'un géomètre, elles ont donné de nombreux résultats d'un caractère indéniablement physique. La télégraphie sans fil y a trouvé des perfectionnements ; les aurores polaires si longtemps mystérieuses ont révélé tout au moins une grande partie de leurs secrets, les hypothèses cosmogoniques ont pu être approfondies aussi bien dans leurs caractères physiques que dans leurs caractères mécaniques, la chaleur solaire, les étoiles nouvelles ou variables ont été considérées à des points de vue nouveaux. La nouvelle mécanique d'Hertz et de Lorentz, où les masses sont fonctions des vitesses, exige toutes les connaissances qu'un physicien peut avoir sur la structure électrique des atomes. Et comme, dans ces récentes théories de la matière, l'atome apparaît comme construit à l'image d'un système planétaire, Henri Poincaré semblait revenir par là vers ses recherches concernant la stabilité de tels systèmes. Admirable unité sous la si grande diversité apparente des problèmes examinés. D'ailleurs la comparaison entre l'ensemble des corpuscules constituant la matière sur laquelle nous expérimentons et l'ensemble des corps célestes de la Voie lactée, l'a notablement préoccupé. Ce dernier ensemble, réduit à une échelle des plus minuscules, lui semble devoir donner la matière radiante des tubes de Crookes. Cette originale conclusion, donnée pour la première fois dans le *Bulletin de la Société astronomique de France,* en 1906, semble avoir intéressé son illustre auteur de manière de plus en plus précise et c'est ainsi qu'elle revient dans les *Leçons sur les Hypothèses cosmogoniques* qu'il a publiées en 1911.

En résumé, il unit la Physique et la Mécanique Céleste comme l'ont fait Newton, Lagrange, Laplace, Cauchy, mais au milieu de complexités modernes dont ces précurseurs ne pouvaient avoir aucune idée.

De plus, la mécanique nouvelle le conduit à une critique extrêmement pénétrante des principes fondamentaux de l'ancienne et particulièrement du principe de la réaction égale et contraire à l'action. Ceci ne pouvait être fait sans recourir justement aux conceptions qui donnent à la matière un substratum électrique, qui limitent les vitesses des masses en mouvement à la vitesse de la lumière et rendent ces mêmes masses fonctions des vitesses. Ainsi la physique nouvelle, tout en profitant du secours d'un géomètre de génie, a pu permettre à celui-ci de revenir examiner les bases de la mécanique newtonienne.

Le Philosophe.

Jamais philosophie ne fut mieux appuyée sur la Science que celle d'Henri Poincaré. La variété infinie des hypothèses physiques qui permettent, aussi logiquement l'une que l'autre, d'expliquer les phénomènes observés, et entre lesquelles on ne se décide au fond que pour des raisons de commodité, l'a conduit directement à la conception *pragmatiste* de la vérité.

Il en est de même de ses recherches si profondes sur les principes de la géométrie. Tout d'abord, la géométrie non-euclidienne correspond à des propriétés spatiales des fonctions fuchsiennes, tout comme la géométrie et la trigonométrie euclidiennes correspondent à des propriétés spatiales de fonctions élémentaires. La première ne constitue donc point une « grimace scientifique », un « paradoxe sans utilité », une « plaisanterie logique », comme l'ont dit certains philosophes qui n'ont d'ailleurs pas laissé des noms bien remarquables, mais que M. Gino Loria a eu cependant le scrupule de citer dans ses excellentes *Theorien der Geometrie* (Leipzig, 1888).

Ce n'est pas davantage le « plus incohérent des édifices » ayant une « base volontairement fausse », comme l'écrit, bien mal à propos, M. Félix le Dantec dans son récent volume de la Bibliothèque de Philosophie contemporaine intitulé : *Contre la Métaphysique* (p. 82). Il y a autant de cohérence dans la théorie des fonctions fuchsiennes que dans la trigonométrie classique.

Des êtres ne faisant que de l'analyse et n'ayant aucune conception spatiale auraient pu cependant construire analytiquement les fonctions circulaires, elliptiques, abéliennes, fuchsiennes, etc. Il se trouve que les hommes conçoivent un espace dont les propriétés les plus simples correspondent précisément aux plus simples des fonctions précédentes. Rien n'empêche d'imaginer d'autres êtres, ayant simplement même logique, mais ayant, quant au reste, évolué de façon différente et de manière à imaginer un espace non-euclidien. De ces êtres ou de nous, qui possèderait la « vraie » géométrie ? Poser ainsi la question, c'est la résoudre et c'est montrer qu'il n'y a pas de géométries plus ou moins vraies, mais seulement des géométries plus ou moins « commodes ».

C'est cette substitution de la notion du commode et de l'utile à la notion du vrai qui fait rattacher au pragmatisme une grande part de la philosophie d'Henri Poincaré. Mais je crois bien qu'au fond il mérite mieux encore que l'étiquette du système précédent. J'hésite même à me servir à son égard d'aucune étiquette en *isme* et j'ai l'impression que M. René Berthelot a écrit un gros volume [1] pour combattre contre des moulins à vent.

Ce qui me frappe avant tout chez mon illustre maître, c'est un idéalisme qui peut à coup sûr se placer parmi les plus purs et les plus élevés, celui où la pensée seule semble retrouver en leurs sommets tous les systèmes philosophi-

---

[1] Un romantisme utilitaire. Le pragmatisme chez Nietsche et chez Poincaré. — F. Alcan. Paris, 1911.

ques, même en y comprenant ceux qui ne sont pas idéalistes. Sa pensée n'aboutit pas à un système ; elle les domine tous et se crée sans cesse de nouveaux horizons non encore catalogués.

D'autre part, imaginons un polyglotte absolument universel, connaissant les milliers d'idiomes qui se partagent la surface du globe et qui ne trouverait rien de plus commode que de parler à tous les représentants de notre espèce les divers langages compris par eux, cela avec une telle aisance qu'il ne penserait même point à dire sur quelle langue portent ses préférences personnelles. Bien que ce ne soit là qu'une comparaison très grossière, Henri Poincaré, vis-à-vis des innombrables langages philosophiques *et même religieux,* fait souvent penser à un tel polyglotte.

Ainsi le haut degré d'objectivité de ses résultats scientifiques ne permet pas de lui reprocher de les avoir embrouillés par des considérations métaphysiques.

Mais quand après avoir merveilleusement profité, comme les savants les plus réalistes, de l'espace, du temps, de la force, etc., il voulait nous montrer qu'il n'était pas dupe des cadres où il avait cependant si bien travaillé, il devenait un métaphysicien prodigieux. Tout ce qui encadre l'analyse est analysé et il essaie de montrer que nous avons inventé les cadres aussi bien que leur contenu. C'est alors qu'il ne croit plus ni à l'espace ni au temps, inventions pensées pour localiser commodément la pensée. Celle-ci devient « l'éclair qui est tout ».

Et si l'idéalisme correspond vraiment à ce rôle de la pensée, ne faut-il pas admettre que l'homme qui, dans les temps modernes, a su penser ainsi, a eu un idéalisme supérieur, que nous ne comprenons qu'imparfaitement mais qui nous entraînera justement à penser davantage; c'est vraiment le propre de la véritable philosophie que de ne pouvoir se transmettre de façon intégrale mais plutôt de faire toujours et toujours penser.

L'idéalisme d'Henri Poincaré me semble aussi remarquable par l'élimination possible de bien des formes de mysticisme. Tout être apprenant à penser commence par être mystique : il s'assimile, modifie, ou invente une religion. Sinon la Nature éveille en lui un sentiment de poésie supérieure ou de suprême justice. S'il fait de la Science il y trouve une abondante matière pour des premières rêveries toujours objectivées. Il part volontiers, à cheval sur un rayon de lumière, pour parcourir l'espace infini, cette sphère dont la surface est partout et le centre nulle part. Il est finalement étreint, vaincu par de tels sentiments d'infinitude et c'est la rêverie mystique dans toute sa splendeur. Mysticisme *réaliste,* si l'on veut, mysticisme qui paraît d'abord prolonger la réalité observable avec une évidence incontestable et qui, cependant, paraît de moins en moins légitime au savant. Ce dernier le résout en questions dépourvues de sens.

En disant que ces mystiques conceptions sont enfantines, je ne crois pas exagérer, car je les ai personnellement éprouvées, avec une absolue conviction, quand j'étais enfant. Je ne les critique pas ; je crois même qu'elles renferment des émerveillements prodigieusement utiles comme éveillant une curiosité féconde !

Mais, en définitive, la Science ne conduit pas là.

Henri Poincaré nous a montré mieux que personne les transformations géométriques qui, à notre espace euclidien, feraient correspondre un espace fermé, les êtres qui, vivant dans des espaces fermés, croiraient cependant que ces espaces sont infinis et illimités.

Dès lors qui prouve que nous ne sommes pas semblables à de tels êtres ou, plus exactement, que des êtres convenablement construits ne seraient pas fort étonnés en nous voyant attribuer des propriétés d'infinitude à des variétés géométriques qui, pour eux, n'auraient nullement ces propriétés.

Point de vérité absolue ni dans nos conceptions primitives, ni dans celles de ces êtres ; la seule vérité est dans l'impeccable mécanisme déductif qui permet de passer des unes aux autres. Et là encore ce n'est que la Pensée !

M. Camille Flammarion, qui représente à un très haut et d'ailleurs très noble degré le point de vue réaliste et mystique, vient de publier dans le *Bulletin de la Société astrono-*

mique de France (1912, pp. 372 et 418) des articles nécrologiques où il résume, en toute sincérité, des conversations qu'il eut avec Henri Poincaré. Rien de plus suggestif que ces conversations et il faut savoir gré à M. Flammarion de nous les rapporter.

La Terre, dit ce dernier, a sûrement existé *avant* l'homme, c'est à dire *avant* la pensée humaine. Il en est de même pour certains êtres vivants que les géologues retrouvent sous forme de fossiles. Enfin Sirius n'est pas dans notre cerveau ! Si nous n'existions point, les étapes cosmogoniques et géologiques auraient existé tout de même et Sirius ne s'anéantirait pas !

De telles opinions, répondait Henri Poincaré, sont simplement celles du sens *commun* [1].

Et, en effet, il semble relativement facile de voir à quelle condition elles ont un sens. Il faut faire du temps et de l'espace des réalités premières, dans lesquelles on analyse mais qu'on n'analyse pas.

Au contraire, sans m'accorder d'abord la notion du temps, je puis penser à la Terre fluide, aux fossiles, à moi-même et penser que je ne puis classer tout cela d'une manière utile qu'en pensant une autre notion qui sera précisément celle du temps.

On pourrait faire un raisonnement analogue pour l'espace.

Je puis imaginer Sirius et bien des choses que je ne classerai utilement qu'en inventant la notion d'espace.

Ne nous gênons point pour faire des inventions de cette nature ; autrement nous serions conduits à nous paralyser pratiquement de la manière la plus désastreuse. Mais ceci n'est point une raison pour considérer ensuite ces inventions comme étant les données immédiates et primordiales de la connaissance.

A l'appui de cette manière de voir je pourrais peut-être renvoyer à quelques belles pages dues à M. Bergson, qui n'est pas de ceux qui placent ces données dans le temps ou

---

[1] Au sujet de la simple acceptation du sens commun par le savant, M. Emile PICARD vient précisément d'écrire un très intéressant article dans la *Revue scientifique* du 9 novembre 1912.

dans l'espace et qui, sur de tels points, me semble parfaitement d'accord avec Henri Poincaré.

D'ailleurs si la Faculté des Sciences de Paris n'a jamais possédé de chaire de Philosophie scientifique — comme le remarquait M. Darboux dans un discours qu'il prononça à l'occasion de son jubilé [1] — il semble que la Sorbonne soit mieux pourvue du côté de la Faculté des Lettres. C'est ainsi qu'à l'appui des idées précédentes on peut citer aussi celles de M. G. Milhaud qui, par différentes voies et notamment par une critique historique qui remonte jusqu'à l'antiquité, a puissamment contribué à mettre en lumière les rapports, plus ou moins entrevus selon les époques, de la géométrie et de l'expérience, pour aboutir à des conclusions qui sont sensiblement les mêmes que celles d'Henri Poincaré.

Le mouvement philosophique créé par ce dernier n'est pas près de s'éteindre. Sa pensée, restée sereine jusqu'au seuil de la mort, nous apporte d'ailleurs, par delà la tombe, les derniers reflets qui n'eurent point le temps de voir le grand jour avant un trépas aussi soudain.

La revue *Scientia* de septembre 1912 contient un article sur l'espace et le temps où les habituelles questions idéalistes et relativistes sont augmentées de l'éclair d'une intuition nouvelle.

Certes nous sommes déjà très habitués à définir l'espace en partant des propriétés des solides. Mais qu'est-ce qu'un solide sinon un système mécanique considéré comme invariable en lui-même et par suite très particulier. On pourrait aussi bien construire un espace en maniant des systèmes variables en eux-mêmes et de telle façon que le temps soit alors mêlé à l'espace d'une manière telle que les deux concepts ne puissent plus être séparés comme ils le sont continuellement dans les raisonnements humains.

Des êtres portés à avoir recours à la nouvelle construction pourraient fort bien ne pas concevoir, *au même instant*, des points séparés par certaines distances ni imaginer *un*

---

[1] G. Darboux. *Eloges académiques et discours*, p. 481. (Volume publié à l'occasion du Jubilé. Hermann, Paris, 1912).

même point de l'espace vu d'abord et revu au bout d'un certain temps.

Qui nous construira maintenant tous ces mondes merveilleux où tous les rêves sont logiques, toutes les chimères rigoureuses, toutes les fantasmagories vraisemblables ?

Quand reviendra le mystérieux enchanteur qui stupéfiait les penseurs les plus subtils plus aisément et plus inéluctablement que les Edgar Poë ou les Jules Verne ne stupéfiaient les enfants ?

Inclinons-nous très bas devant son tombeau, mais comment n'y point voir qu'une vaine partie de cet espace euclidien à trois dimensions dont il a si souvent brisé l'ensemble, comme pour vivre plus à l'aise dans les nouveaux univers que sa lumineuse pensée pouvait continuellement créer.

Aussi vit-il par delà la mort, par delà même le banal infini qui pour beaucoup constitue l'immortalité et bien au-delà de tous les cieux plus ou moins mystiques où l'harmonie est vraiment trop humaine !

A. Buhl (Toulouse).