

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	15 (1913)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	 SUR LA CLASSIFICATION ET LA CONSTRUCTION DES COURBES TRANSCENDANTES
<b>Autor:</b>	Turrière, E.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-14853">https://doi.org/10.5169/seals-14853</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

ciens grecs, mais qu'il ne faut pas oublier qu'elle doit être obtenue par approximations successives et qu'elle est le but et non le point de départ de l'enseignement.

Au sujet de la section mathématique et principalement des futurs physiciens et ingénieurs, il estime que l'éducation mathématique doit donner des notions précises avec leurs démonstrations exactes et ne pas se contenter de procédés appliqués mécaniquement.

(*La Rédaction.*)

---

SUR LA CLASSIFICATION ET LA CONSTRUCTION  
DES  
COURBES TRANSCENDANTES

---

1. Au sujet de mon article *Courbes transcendantes et interscendantes*, paru dans l'*Enseignement Mathématique* (mai 1912, pp. 209-214), M. GINO LORIA a fait, dans le numéro suivant (pp. 291-293), quelques remarques dont l'importance n'échappera à aucune des personnes qui s'occupent des courbes particulières.

Jusqu'à présent, en effet, les courbes interscendantes n'avaient été citées qu'en passant par quelques auteurs, et leur topologie, ainsi que l'écrit M. G. LORIA est toute à faire. Ce que l'on en avait dit de plus intéressant peut se résumer dans ces brèves et précises considérations d'EULER :

«.... De là naît la première espèce et comme la plus simple des courbes transcendantes ; ce sont celles dont l'équation renferme des exposants irrationnels. Comme il n'entre dans leur expression ni logarithmes, ni arcs de cercles et qu'elles proviennent de la seule considération des nombres irrationnels, elles paraissent en quelque sorte appartenir à la Géométrie ordinaire ; et c'est pour cette raison que LEIBNIZ les a appelées *interscendantes*, comme si elles tenaient un certain milieu entre les courbes algébriques et les courbes transcendantes.

« On aura donc une courbe interscendante dans celle qui est exprimée par l'équation  $y = x^{\sqrt{2}}$ ... Si nous nous contentons de prendre seulement une valeur approchée de  $\sqrt{2}$  en mettant à sa place quelques-unes des fractions  $\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}$  qui expriment à peu près la valeur de  $\sqrt{2}$ , nous aurons bien à la vé-

« rité des courbes algébriques qui approcheront de se confondre avec celle qu'on demande... Cette courbe est censée d'ordre infini... Si nous voulions construire exactement cette courbe, nous ne pourrions le faire sans le secours des logarithmes.... On pourra donc de cette manière calculer les appliquées<sup>1</sup> correspondantes à chaque abscisse pourvu qu'on attribue à l'abscisse  $x$  des valeurs positives. Mais si l'abscisse  $x$  obtient des valeurs négatives, il sera alors difficile de dire si celles de  $y$  seront réelles ou imaginaires ; car soit  $x = -1$  ; que signifiera  $(-1)^{\sqrt{2}}$  ? C'est ce qu'on ne peut savoir parce que les valeurs qu'on peut trouver pour  $\sqrt[4]{2}$  ne sont ici d'aucun secours... »<sup>2</sup>

C'est pourquoi j'avais cru devoir appeler l'attention des lecteurs de l'*Enseignement Mathématique* sur cette catégorie des courbes transcendantes particulières, et je remercie M. GINO LORIA d'avoir bien voulu me prêter, en m'approuvant, un appui que la haute compétence de ce géomètre dans toutes les questions relatives aux courbes rend précieux. A la fin de son article, M. LORIA fait observer qu'il existe une profonde différence entre la topologie des paraboles interscendantes et celle des paraboles algébriques ; cette réflexion m'a amené à développer les considérations suivantes, qui se rattachent à la classification rationnelle des courbes transcendantes.

## 2. — La courbe

$$y = x^{\sqrt{2}} \quad (1)$$

étant supposée construite, des transformations géométriques simples permettent de construire à partir d'elle d'autres courbes interscendantes ; c'est ainsi que la courbe

$$y = x + x^{\sqrt{2}}$$

qui fut considérée par CRAMER<sup>3</sup> est la diamétrale d'une ligne droite et d'une courbe semblable à la courbe (1) ; une transformation simple permettra de même de construire à partir de la courbe (1), la courbe d'équation

$$y = \frac{x}{2\sqrt{2}} \left( ax^{\sqrt{2}} - \frac{1}{ax^{\sqrt{2}}} \right) \quad (2)$$

citée par M. LORIA et par moi-même dans nos articles. Mais l'étude

<sup>1</sup> « Les ordonnées ».

<sup>2</sup> *Introduction à l'analyse infinitésimale*, tr. par Labey, Paris 1797, t. II, p. 288.

<sup>3</sup> GINO LORIA, *Spezielle Algebraische und transzendente ebene Kurven*.... t. II, p. 1. — G. CRAMER : *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, 1750, p. 8 ; cet auteur se borne d'ailleurs à rappeler la définition des courbes interscendantes de LEIBNIZ et à citer l'exemple en question, sans entrer dans aucun développement à son sujet.

de la courbe d'équation

$$y = x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{3}} \quad (3)$$

serait autrement compliquée puisque cette courbe (3) est la diamétrale de deux paraboles interscendantes distinctes :

$$2y = x^{\sqrt{2}} ; \quad 2y = x^{\sqrt{3}} ;$$

pour construire la courbe (2), il suffit de développer  $\sqrt{2} + 1$  et  $\sqrt{2} - 1$  en fractions continues et d'examiner les deux familles de courbes algébriques qui correspondent aux réduites de rang pair et à celles de rang impair : les réduites choisies, à chaque opération, pour représenter les deux nombres  $\sqrt{2} + 1$  et  $\sqrt{2} - 1$  seront liées l'une à l'autre, leur différence devant être rigoureusement égale à 2. En ce qui concerne la courbe (3), au contraire, on devra développer séparément  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{3}$  en fractions continues ; aucune relation ne pourra être imposée *a priori* aux réduites choisies pour représenter les deux nombres irrationnels ; à une réduite déterminée de  $\sqrt{2}$  on sera libre, par exemple, d'associer plusieurs réduites de  $\sqrt{3}$ . En d'autres termes, la complexité de la discussion de la courbe (3) est double de celle de la discussion de la courbe (2).

Il serait possible de former des exemples de courbes interscendantes dont la discussion serait ainsi de plus en plus compliquée et exigerait la connaissance de 3, 4, ...,  $n$  paraboles interscendantes particulières : il suffirait de considérer les courbes

$$y = x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{3}} + x^\pi ,$$

$$y = x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{3}} + x^\pi + x^e , \dots$$

Ces exemples prouvent qu'il est possible en une certaine mesure de se rendre compte *a priori* du degré de complexité de la discussion d'une courbe interscendante d'équation

$$y = \sum x^{m_i} \quad (4)$$

les  $m_i$  étant des nombres irrationnels : ce degré de complexité serait égal au nombre de paraboles interscendantes distinctes dont l'étude préalable serait nécessaire pour aborder celle de la courbe (4). Il y a lieu de préciser, de présenter la question sous une forme plus générale et de donner du degré de complexité une définition mathématique.

3. — La classification des courbes transcendantes planes particulières a depuis longtemps préoccupé les géomètres. EULER

signalait déjà « le nombre des courbes transcendantes comme bien plus considérable que celui des courbes algébriques » (*loc. cit.*, p. 287). Depuis 1748, le nombre des courbes transcendantes ayant fait l'objet de recherches spéciales, est allé en grandissant constamment; sans citer la théorie des fonctions, les Sciences appliquées les plus diverses ont mis en évidence des propriétés de bien des courbes transcendantes plus ou moins curieuses. Les équations des courbes transcendantes présentent d'autre part des différences telles qu'il n'en résulte de prime abord aucun principe de classification. Quelle que soit son importance par ailleurs, la Géométrie intrinsèque d'E. CESARO est absolument insuffisante pour une classification tant soit peu générale. S'inspirant de certains travaux de CHASLES, de FOURET et de CLEBSCH-LINDEMANN, M. GINO LORIA<sup>1</sup> a étudié sous le nom de *courbes panalgébriques*, les courbes transcendantes qui vérifient une équation différentielle du premier ordre, algébrique en  $x, y, y' = \frac{dy}{dx}$  ( coordonnées cartésiennes ordinaires).

A la page 11 de son ouvrage magistral, M. GINO LORIA se borne à indiquer en quelques lignes quel serait le principe d'une classification rationnelle des courbes transcendantes particulières. La 1<sup>re</sup> classe contiendrait les courbes transcendantes telles que les points de contact des tangentes issues d'un point quelconque soient situés sur une courbe algébrique (courbes panalgébriques); la deuxième classe contiendrait les courbes qui se déduisent des courbes panalgébriques, comme celles-ci se déduisent des courbes algébriques;... et ainsi de suite. Le nombre des courbes transcendantes qui ne sont pas panalgébriques est si restreint que M. GINO LORIA ne croit pas devoir insister au sujet de leur classification. Mais pour préciser ce que je dis ci-dessus à propos de la construction des courbes interscendantes, je suis obligé d'entrer dans plus de détails qu'il ne l'a fait lui-même.

Soit une courbe transcendante (C) rapportée à des axes de coordonnées ( $Ox Oy$ ); soient  $y', y'', \dots y^{(n)}$  les dérivées successives de l'ordonnée  $y$  par rapport à l'abscisse  $x$ . Observons tout d'abord que si la courbe (C) est une intégrale particulière d'une équation différentielle algébrique, il existe une infinité d'équations différentielles algébriques qui admettent cette courbe (C) pour intégrale particulière : il suffit de dériver l'équation primitive pour former de nouvelles équations de cette nature.

Une courbe panalgébrique ne peut être intégrale que d'une seule équation différentielle du premier ordre, algébrique en  $x, y, y'$  : en éliminant, en effet,  $y'$  entre deux équations de ce type, on obtient une relation algébrique entre  $x$  et  $y$ . De même,

<sup>1</sup> Spezielle ebene..., II, p. 2-11.

une courbe transcendante qui n'est pas panalgébrique ne peut satisfaire à deux équations différentielles, algébriques et du second ordre : il suffirait d'éliminer  $y''$  entre elles pour arriver à un résultat contraire à l'hypothèse faite sur la courbe. D'une façon générale, considérons une courbe (C) intégrale commune de deux équations différentielles, algébriques et de même ordre  $n$  : l'élimination de la dérivée  $y^{(n)}$ , entre ces deux équations, conduit à une équation d'ordre  $n - 1$  au plus. En d'autres termes, si une courbe transcendante satisfait à une ou plusieurs équations différentielles algébriques, il est certain que, parmi les équations, en nombre infini, de cette nature, auxquelles elle satisfait, il en existe une d'ordre minimum  $\omega$ , et que cette équation d'ordre minimum  $\omega$  est unique.

La détermination de cette équation d'ordre minimum peut être faite par des calculs élémentaires de dérivations et d'éliminations lorsqu'on connaît deux équations différentielles algébriques indépendantes satisfaites par la courbe (C). J'entends par équations indépendantes deux équations telles que celle de degré supérieur ne soit pas une conséquence de celle de degré moindre. Soient deux équations d'ordres respectifs  $m$  et  $n$  avec  $m < n$  et que je suppose indépendantes ; en dérivant  $n - m$  fois l'équation d'ordre moindre  $m$  et en éliminant ensuite  $y^{(n)}$  entre l'équation obtenue et l'équation donnée d'ordre  $n$ , je remplace cette dernière par une équation d'ordre inférieur  $n_1$ . En opérant de même sur les équations d'ordre  $m$  et  $n_1$ , je remplace celle des deux qui est d'ordre le plus grand par une équation d'ordre inférieur, et ainsi de suite. Après un nombre limité d'opérations, je serai finalement conduit au système suivant : l'équation d'ordre minimum précédemment définie et une identité.

Tout ce qui précède est entièrement analogue à ce qui se passe pour les équations algébriques et les nombres irrationnels. Etant donné un nombre irrationnel algébrique, il existe une équation algébrique, irréductible et unique qui l'admet pour racine ; toute autre équation algébrique qui admet le nombre pour racine est décomposable en un système d'équations irréductibles, parmi lesquelles se trouve celle qui admet le nombre pour racine.

La classification indiquée par M. GINO LORIA consiste précisément à adopter pour élément fondamental le nombre entier, invariant pour les transformations algébriques du plan, qui représente l'ordre minimum  $\omega$ . Soit en effet

$$F(x, y, y', y'', \dots y^{(\omega)}) = 0 ,$$

l'équation différentielle algébrique d'ordre minimum attachée à une courbe transcendante (C). En posant  $y' = p$ , cette équation entraîne la relation

$$F(x, y, p, p', \dots p^{(\omega-1)}) = 0$$

d'ordre  $\omega - 1$  pour les dérivées de la fonction  $p(x)$ . L'équation de la courbe (K) qui est le lieu des points de contact des tangentes qui passent par un point quelconque  $(x_0, y_0)$  à une famille arbitraire et dépendant d'un paramètre de courbes (C) est d'autre part

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = p ;$$

cette courbe (K) est donc une courbe de la  $(\omega - 1)^{\text{me}}$  famille.

4. — *Courbes hypertranscendantes.* De même que les nombres irrationnels se divisent en deux catégories, les nombres irrationnels algébriques et les nombres transcendants, de même les courbes transcendantes se divisent en deux catégories analogues : celles qui appartiennent à une famille d'ordre  $\omega$  déterminé et celles qui ne satisfaisant à aucune équation différentielle algébrique ne rentrent dans aucune des familles de la classification de M. LORIA. À ces dernières courbes, il convient de réservier le nom de *courbes hypertranscendantes*, en adoptant ainsi une dénomination usitée par M. EDMOND MAILLET<sup>1</sup> dans divers travaux sur les nombres et les fonctions. Qu'il existe des courbes hypertranscendantes, cela ne fait aucun doute *a priori*. La théorie des fonctions est telle que s'il n'est pas toujours possible de se prononcer sur l'existence d'une fonction satisfaisant à des conditions imposées, il est toutefois permis d'affirmer qu'il existe des fonctions qui n'y satisfont pas. Dans le cas présent, les fonctions continues sans dérivées donnent des exemples simples de courbes hypertranscendantes ; la courbe de PEANO, celle d'HILBERT, les courbes citées dans le 18<sup>me</sup> chapitre du second tome de l'ouvrage de M. LORIA (*ausserordentlichen Kurven, crinkly curves*) sont des exemples bien connus. Mais il est inutile d'avoir recours à de telles courbes, auxquelles on pourrait même refuser le nom de courbes. Comme exemple remarquable d'une véritable courbe hypertranscendante, je citerai celui de la courbe hypergéométrique d'EULER<sup>2</sup>. En réponse à une question posée par WEIERSTRASS, O. HÖLDER<sup>3</sup> a démontré, en effet, que la fonction eulérienne  $\Gamma(x)$  ne vérifie aucune équation différentielle algébrique ; il en résulte que la courbe de WALLIS<sup>4</sup> et la courbe binomiale de QUÉTELET<sup>3</sup> sont aussi hypertranscendantes.

En considérant une famille, dépendant d'un paramètre, de

<sup>1</sup> Sur les fonctions hypertranscendantes (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 2 avril 1906) — Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions, 1906. (Note IV).

<sup>2</sup> Pour les renseignements bibliographiques sur la courbe hypergéométrique d'Euler, cf. : Spezielle algebraische und transcendentale ebene Kurven, t. 2, p. 174.

<sup>3</sup> Ueber die Eigenschaft der Gammafunction keiner algebraischen Differentialgleichung zu begnügen. (Math. Ann., t. 28, 1887, pp. 1-13.)

<sup>4</sup> Spezielle, 2, p. 175.

courbes hypergéométriques d'EULER, de courbes de WALLIS, ou de courbes de QUÉTELET, le lieu des points de contact des tangentes à ces courbes issues d'un point quelconque du plan serait une nouvelle courbe hypertranscendante. Il est donc possible d'engendrer ainsi des familles en nombre infini de courbes hypertranscendantes. Voici d'ailleurs un autre exemple.

Ainsi que la démontré A. HURWITZ<sup>1</sup>, la fonction définie par la série entière

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{27!} + \dots + \frac{x^n}{n^n!} + \dots$$

ne satisfait à aucune équation différentielle algébrique et, par suite, cette fonction est représentée par une courbe hypertranscendante.

A côté des courbes hypertranscendantes, il convient de citer celles pour lesquelles il est impossible de déterminer  $\omega$ ; c'est le cas de la parabole d'équation

$$y = x^c,$$

$C$  désignant la constante d'EULER. Cette parabole est-elle algébrique ou interscendante et panalgébrique? C'est là une question qui ne pourra être résolue que lorsqu'on saura si la constante d'EULER est un nombre rationnel ou un nombre irrationnel.

5. — *Exemples de courbes classées d'après leur ordre  $\omega$ .* Les courbes d'ordre  $\omega = 0$  sont les courbes algébriques.

Les courbes d'ordre  $\omega = 1$  sont les courbes panalgébriques de M. LORIA.

Les courbes d'ordre  $\omega = 2$  comprennent : les courbes de LAMÉ et les spirales sinusoïdes lorsqu'elles sont interscendantes; les spirales d'équation

$$\rho = \omega^n$$

lorsque l'exposant  $n$  est irrationnel (lorsque  $n$  est rationnel ces spirales dites algébriques sont des courbes panalgébriques); la chaînette de CORIOLIS et les lignes, plus générales, de MERCATOR-SUMNER; les courbes de CESARO lorsqu'elles ne sont pas algébriques; les courbes de RIBAUCOUR lorsqu'elles ne sont pas algébriques ou panalgébriques; la courbe de MARIA-GAËTANA AGNESI  $y = x^x$ ;

la courbe de HESSEL  $y = x^{\frac{1}{x}}$ ;

la courbe d'EULER  $x^y = y^x$ ;

<sup>1</sup> Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle algébrique (Annales de l'Ecole normale supérieure, 1889, [3], t. 6, p. 327).

certaines courbes dites hyperarithmétiques telles que la courbe

$$\log (y^2 + ay) = \sin (x^2 - bx)$$

citée par M. LORIA (II, p. 353) ;

la courbe de G. BIDONE  $y = e^{e^x}$  ;

la courbe de M. G. TEIXEIRA  $\operatorname{ch} 2y - \operatorname{ch} 2x = \text{const}$  ;

les trajectoires orthogonales

$$\operatorname{tg} x = k \cdot \operatorname{thy}$$

des courbes précédentes ;

la courbe  $e^x + e^y = 1$  ;

et les courbes de mortalité de QUIQUET, de GOMPEZ, d'EDMONS et de MAKEHAM ;

la courbe de SPRUGE  $\sin r^2 \times \sin 2\theta = \text{const}$  ;

l'ogive de GALTON

$$x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt, \quad y = y_0 e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}};$$

les deux courbes suivantes

$$y = \left(1 + \frac{x}{a}\right)^m \times e^{-\frac{x}{a}},$$

$$x = a \operatorname{tang} \theta \quad y = y_0 \cos^{2m} \theta \times e^{n\theta}.$$

rencontrées par le même auteur, et qui sont panalgébriques ou d'ordre  $\omega = 2$  suivant que  $m$  est rationnel ou non ; la courbe étudiée par le même auteur

$$y = \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{m_1} \times \left(1 + \frac{x}{a_2}\right)^{m_2}$$

qui est algébrique, panalgébrique ou d'ordre  $\omega = 2$  suivant que les deux nombres  $m_1$  et  $m_2$  sont tous deux rationnels, que l'un d'eux seul est rationnel ou que tous deux sont irrationnels ; la courbe représentative de la fonction d'erreur

$$y = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Les équations en coordonnées biangulaires permettent de donner de nombreux exemples de courbes d'ordre  $\omega = 2$  : c'est le cas de la courbe d'équation biangulaire

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 = 1,$$

qui est représentée sous une forme inexacte à la page 122 des *Nouvelles Annales* de 1871.

Le nombre des courbes transcendantes d'ordre  $\omega = 3$  est encore plus restreint ; je citerai la courbe de mortalité de GAUSS ; la clo-thoïde et sa développée ; une courbe hyperarithmétique considérée par M. LORIA (p. 353) et dont l'équation est

$$y = x^{\tan x}.$$

Voici enfin des exemples de courbes d'ordre supérieur : les courbes :

$$y = x^{x^x}, \quad y = e^{e^e};$$

la courbe de mortalité de LAZARUS :

$$y = s^x g_1^{c_1^x} g_2^{c_2^x} g_3^{c_3^x} \dots g_n^{c_n^x};$$

ces trois exemples prouvent qu'il est possible de former simplement des équations de courbes transcendantes d'un ordre  $\omega$  quelconque, imposé *a priori*.

6. — *Application à la construction des courbes interdescendantes ou transcendantes.* Les paraboles interdescendantes

$$y = x^m$$

sont panalgébriques.

Considérons les courbes interdescendantes :

$$y = x^{m_1} + x^{m_2}; \tag{5}$$

de (5) résulte par dérivation

$$xy' = m_1 x^{m_1} + m_2 x^{m_2}$$

d'où

$$(m_1 - m_2)x^{m_1} = xy' - m_2 y,$$

$$(m_2 - m_1)x^{m_2} = xy' - m_1 y;$$

$m_1$  et  $m_2$  étant irrationnels,  $\alpha$  et  $\beta$  entiers, la relation

$$(xy' - m_2 y)^\alpha \cdot (xy' - m_1 y)^\beta = \pm (m_1 - m_2)^{\alpha + \beta} x^{\alpha m_1 + \beta m_2}$$

prouve que la courbe (5) est panalgébrique s'il existe entre  $m_1$  et  $m_2$  une relation linéaire à coefficients entiers.

S'il n'en est pas ainsi, on devra dériver une seconde fois, et, en

éliminant  $x^{m_1}$ ,  $x^{m_2}$ , on aura une équation différentielle algébrique

$$\left| \begin{array}{ccc} x^2 y'' & m_1(m_1 - 1) & m_2(m_2 - 1) \\ x y' & m_1 & m_2 \\ y & 1 & 1 \end{array} \right| = 0$$

du second ordre ; la courbe (5) sera donc de l'ordre  $\omega = 2$ .

Pour la courbe (2), les exposants  $\sqrt{2} + 1$  et  $\sqrt{2} - 1$  sont liés par une relation linéaire rationnelle : elle est donc certainement panalgébrique. L'équation différentielle algébrique du premier ordre dont elle est l'intégrale est celle qui est donnée à la page 240 de l'*Enseignement Mathématique* (1912).

Il en est de même des courbes de poursuite interscendantes

$$y = \frac{1}{2} \left[ \frac{c x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^{1-m}}{c(m-1)} \right],$$

qui sont des courbes panalgébriques quel que soit le nombre irrationnel  $m$ .

La courbe (3) est au contraire de l'ordre  $\omega = 2$  parce qu'il n'existe pas de relation rationnelle et linéaire entre  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{3}$ .

D'une façon générale, la courbe (4) sera d'un ordre égal au nombre des nombres irrationnels  $m_1$  qui figurent dans son équation. Des relations entre ces exposants pourront réduire l'ordre  $\omega$ .

Il résulte de ces considérations que l'ordre  $\omega$  peut être choisi pour représenter le degré de complexité dont il était question dans la seconde partie du présent article ; elles valent pour les courbes transcendantes comme pour les courbes interscendantes.

Dans la construction point par point d'une courbe transcendante déterminée, d'ordre  $\omega_0$ , on devra s'attacher à effectuer les constructions avec des courbes particulières d'ordres au plus égaux à  $\omega_0$ .

Je prendrai comme exemple celui de la courbe d'ordre  $\omega = 3$  définie par les équations

$$x = \int_{s_0}^s \cos \frac{1}{s^2} ds, \quad (6)$$

$$y = \int_{s_0}^s \sin \frac{1}{s^2} ds;$$

son équation intrinsèque

$$R = \frac{s^3}{2}$$

prouve que c'est une pseudo-spirale de PIRONDINI particulière, pour laquelle la courbe de MANNHEIM est une parabole cubique ; *c'est la développée de la clothoïde*<sup>1</sup> ; il suffit d'ailleurs de poser  $\frac{4}{s} = \mu$  et d'intégrer par parties pour avoir

$$x = 2 \int_{\mu_0}^{\mu} \sin \mu^2 d\mu + \left| \frac{\mu \cos \mu^2}{\mu_0} \right|, \\ y = -2 \int_{\mu_0}^{\mu} \cos \mu^2 d\mu + \left| \frac{\mu \sin \mu^2}{\mu_0} \right|,$$

équations qui sont identiques à celles de la développée de la clothoïde.

La courbe (6) peut donc être construite *tangente par tangente* à partir de la clothoïde. Mais les expressions qui précèdent prouvent en outre que cette courbe peut être construite *point par point* à partir de la clothoïde de même ordre  $\omega = 3$  et d'une courbe pancalgébrique, le *lituus* de COTES (qui est la *radiale* de la clothoïde) : la courbe (6) est en effet, le lieu des milieux de segments de droite limités à une clothoïde et à un *lituus*.

C'est là une curieuse construction du centre de courbure de la clothoïde, construction qui comporte en elle-même une vérification, puisque le centre de courbure et la normale peuvent être construits indépendamment l'un de l'autre.

É. TURRIÈRE (Poitiers).

---

<sup>1</sup> La développée de la clothoïde est représentée dans l'ouvrage de M. LORIA (tome II, planche II, fig. 19).

---