

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 15 (1913)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: Société mathématique suisse.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

- M. Th. SKOLEM : Sur la constitution des groupes du calcul identique.
 Aktuar PALMSTRÖM : Calcul des rentes d'invalidité dans l'assurance sociale.
 Prof. JOHANSSON : Sur la représentation des potentiels automorphes.
 Aktuar HOLTSMARK : Sur le calcul des rentes viagères sur deux têtes.

Société italienne pour l'avancement des sciences.

La « Societa italiana per il progresso delle scienze » a tenu son VII^e Congrès à *Sienne* du 22 au 27 septembre dernier. Parmi les *conférences générales* se rapportant directement ou indirectement aux sciences mathématiques il y a lieu de signaler les suivantes :

- A. GARBASSO. Les principes de la mécanique.
 S. LUSSANA. Sur la thermodynamique des gaz et des liquides.
 E. MILLOSEVICH. Astronomie et chronologie historique.
 C. PARVOPASSU. Progrès récents dans la science et dans la technique des constructions.
 A. POCHETTINO. Phosphorescence et fluorescence : phénomènes et théories.
 G. FOIA. L'actuaire et la science des actuaires.

Parmi les *travaux des sections*, nous mentionnons les communications de MM. :

- L. CONTI. Sur le régime uniforme dans les tuyaux de conduite.
 F. ENRIQUES. Sur les conditions suffisantes dans le calcul des variations.
 G. GIANFRANCESCHI. La déviation vers l'Est et vers le Sud dans la chute libre des corps pesants.
 E. LAURA. Sur les distorsions de Volterra dans les solides de révolution.
 F. LEVI-CIVITA. Sur le théorème de Torricelli.

Société mathématique suisse.

Réunion de Frauenfeld. 9 septembre 1913.

La Société mathématique suisse a tenu sa 4^e réunion ordinaire à Frauenfeld, le 9 septembre 1913, sous la présidence de M. le Prof. H. FEHR (Genève), comme section de la 96^e réunion de la Société helvétique des Sciences naturelles. La séance d'ouverture de la Section a été présidée par M. le Dr K. MATTER Frauenfeld.

La *partie scientifique* comprenait onze communications dont deux, celles de MM. EINSTEIN et GROSSMANN, ont été présentées dans une séance commune avec la Société suisse de Physique.

1. — M. le Prof. L. CRELIER (Berne-Bienne). *Sur les correspondances en géométrie synthétique.* — Dans diverses notes parues dans l'*Enseignement mathématique* en 1906, 1907 et 1908, l'auteur a essayé d'étendre quelque peu la théorie géométrique des corres-

pondances ($m \cdot n$). En considérant principalement les correspondances (1. n), il a pu simplifier et généraliser les résultats de Weyr et indiquer quelques constructions originales pour les cubiques à point double.

En continuant ses recherches, il a observé que l'emploi des correspondances (1. 2) peut conduire à la construction des points d'inflexion et des tangentes d'inflexion dans les cubiques à point de rebroussement, ainsi qu'à la construction des tangentes et des points de rebroussement dans les courbes de 3^{me} classe à tangente d'inflexion.

Dans ce cas, toutes les constructions sont réalisables avec la règle et le compas.

Le développement des constructions nécessaires peut être résumé dans la remarque dualistique suivante :

Une cubique C^3 à point de rebroussement S_2 étant donnée par les points nécessaires, la ligne de jonction de S_2 avec chaque point S_1 est univoquement conjuguée avec la ligne de jonction de S_2 avec le point de tangence de la tangente de C^3 menée par S_1 .

Ces droites forment deux faisceaux homographiques concentriques en S_2 dont les rayons doubles sont la tangente de rebroussement et la droite passant par le point d'inflexion.

Les mêmes méthodes de recherche peuvent être appliquées aux cubiques crunodales et acnodales, ainsi qu'aux courbes de 3^{me} classe à tangente double, avec points de tangence distincts ou imaginaires. Les constructions conservent la même valeur théorique, mais elles ne sont plus comme les précédentes, exclusivement réalisables par la règle et le compas. Elles nécessitent l'intersection d'une conique et d'un cercle dont un point commun est connu.

La remarque dualistique résumant les constructions prend la forme suivante :

Une cubique C^3 à point double S_2 est donnée par les éléments nécessaires; la ligne de jonction de S_2 avec chaque point S_1 de la courbe est conjuguée aux deux lignes de jonction de S_2 avec les

Une courbe de 3^{me} classe K^3 à tangentes d'inflexion P_2 étant donnée par les éléments nécessaires, le point de coupe de P_2 avec chaque tangente simple P_1 est univoquement conjugué au point de coupe de P_2 avec la tangente de K^3 menée par le point d'intersection de P_1 avec K^3 .

Ces points forment deux ponctuelles homographiques sur la même base P_2 ; les points doubles sont le point d'inflexion et le point de coupe de P_2 avec la tangente de rebroussement.

Une courbe de 3^{me} classe K^3 à tangente double P_2 est donnée par les éléments nécessaires; le point de coupe de P_2 avec chaque tangente simple P_1 est conjugué aux deux points de coupe de P_2

points de tangence des deux tangentes de la courbe menées par S_1 et rencontrant C^3 en dehors de S_1 .

Les droites considérées forment une correspondance (1.2) de rayons concentriques admettant un ou trois rayons doubles conjugués réels. Ceux-ci passent ensuite par les points d'inflexion de la courbe.

Le développement des détails de construction permet d'établir qu'un des éléments doubles conjugués seul est réel dans le cas des cubiques crunodales et dans celui des courbes de 3^{me} classe dualistiques des cubiques crunodales.

Si le point double est isolé, ou si la tangente double est isolée, les éléments doubles conjugués des correspondances (1.2) sont tous les trois réels.

Le cas d'un seul élément double conjugué réel conduit à un intéressant groupement de triangles dans lesquels :

Les paires de côtés homologues sont les éléments conjugués de trois involutions de rayons dont les sommets sont des points fixes.

Les triangles sont liés involutivement dans chacune des constructions dualistiques.

Les sommets des triangles sont sur trois coniques passant par un seul point commun.

Une étude plus approfondie de ces triangles conduit à un très grand nombre de propriétés fort intéressantes.

Les involutions supérieures J_1^{m+1} ou J_n^{m+1} peuvent être établies au moyen des courbes engendrées par les correspondances (1. m) ou (n. $m - n + 1$).

J_1^{m+1} s'obtient en coupant la courbe d'une correspondance (1. m) par un faisceau de droites issues d'un point extérieur et en joignant les points de coupe avec le point multiple d'ordre m . Chaque rayon ainsi obtenu n'appartient qu'à un seul groupe de ($m + 1$) rayons conjugués.

J_2^{m+1} s'obtient en coupant la courbe d'une correspondance (1. m) comme précédemment et en joignant les points de coupe avec un point multiple d'ordre $m - 2$. Chaque rayon appartient à deux groupes de $m + 1$ rayons conjugués.

avec les tangentes de K^3 menées par les points d'intersection de P_1 avec K^3 .

Les points considérés forment une correspondance (1.2 de base P_2 ; les points doubles conjugués sont sur les tangentes par les points de rebroussement. Il y a un ou trois points doubles réels.

Les paires de sommets homologues sont les éléments conjugués de trois involutions de points dont les bases sont des droites fixes.

Les côtés des triangles enveloppent trois coniques n'admettant qu'une seule tangente commune.

J_2^{m+1} s'obtient également avec la courbe d'une correspondance $(2 \cdot m - 1)$ coupée comme avant et en joignant chaque point de coupe avec le point multiple d'ordre $m - 1$, dont l'existence est certaine. Chaque rayon appartient aussi à deux groupes de $m + 1$ rayons conjugués.

On voit de suite par cet aperçu que l'étude des involutions supérieures est liée à celle des correspondances analogues.

Pour les cas faciles (1:1), (1.2), (1.3), (2.3), l'étude géométrique est relativement simple et conduit aisément aux propriétés des involutions J_1^2 , J_1^3 , J_2^3 , J_1^4 , J_2^4 et J_3^4 .

2. — M. le Prof. Dr R. FUETER (Carlsruhe), *Ueber algebraische Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe (Sur les équations algébriques de groupe donné)*. — Du grand problème de la détermination des équations algébriques ayant un groupe donné, le conférencier ne considère que le cas particulier où le groupe est donné par deux substitutions indépendantes

$$s^x S^y \quad (0 \leq x < 2, \quad 0 \leq y < l^r)$$

où s appartient à l'exposant 2 et S à l'exposant l^r , l étant un nombre premier quelconque.

Du fait que les substitutions $s^x S^y$ forment un groupe, résulte que

$$Ss = s^x S^y,$$

ou, à cause de $s^{-1} = s$,

$$S = s^x S^y s.$$

Si l'on avait $x = 0$, il viendrait $s = S^{y-1}$, contrairement à l'hypothèse que s et S sont indépendants. On a donc $x = 1$, par suite

$$S = sS^y s = s \{ sS^y s \}^y s.$$

Mais à cause de $s^2 = 1$, on déduit

$$\{ sS^y s \}^2 = sS^y s \cdot sS^y s = sS^{2y} s, \quad \{ sS^y s \}^y = sS^{y^2} s.$$

Par conséquent,

$$S = s \cdot sS^{y^2} s \cdot s = S^{y^2}$$

d'où

$$y^2 \equiv 1 \pmod{l^r}.$$

Lorsque l est *impair*, on a $y \equiv \pm 1 \pmod{l^r}$. Au cas $y \equiv +1 \pmod{l^r}$ correspondent des corps de la division du cercle, au cas

$y \equiv -1 \pmod{l^r}$ des corps de la multiplication complexe. Lorsque par contre $l = 2$, en plus des solutions $y \equiv \pm 1 \pmod{2^r}$, il y a encore les solutions

$$y \equiv \pm 1 + 2^{r-1} \pmod{2^r}, \quad (r > 2)$$

Nous savons que les premières solutions conduisent encore aux corps de la division du cercle et aux corps des modules singuliers; nous pouvons nous demander s'il existe des corps relatifs aux solutions du second cas. La réponse est affirmative. Le conférencier le montre dans le cas $r = 3$. Si l'on prend en effet $x = i = \sqrt{-1}$, $y = \sqrt[8]{2}$, x appartient à un groupe s tel que $s^2 = 1$. Formant ensuite le corps $K(i, \sqrt[8]{2})$, on peut, puisque $\frac{1+i}{\sqrt[8]{2}}$ est une racine huitième de l'unité, exprimer de la manière suivante les conjugués de y .

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \sqrt[8]{2} = y, & \text{on lorsque } S = \left(\begin{vmatrix} 1+i \\ y^3 \end{vmatrix} \right), & y_1 = y \\
 y_2 &= \frac{1+i}{\sqrt[8]{2}} \sqrt[8]{2} = \frac{1+i}{y^3} & " & y_2 = Sy \\
 y_3 &= -i\sqrt[8]{2} = -iy & " & y_3 = S^2y \\
 y_4 &= -i\frac{1+i}{\sqrt[8]{2}} \sqrt[8]{2} = -i\frac{1+i}{y^3} & " & y_4 = S^3y \\
 y_5 &= -y & " & y_5 = S^4y \\
 y_6 &= -\frac{1+i}{y^3} & " & y_6 = S^5y \\
 y_7 &= iy & " & y_7 = S^6y \\
 y_8 &= i\frac{1+i}{y^3} & " & y_8 = S^7y \\
 & & & S^8 = 1
 \end{aligned}$$

Par suite $s^x S^y$ est le groupe de Galois du corps K et à cause de

$$sSy = s \frac{1+i}{y^3} = \frac{1-i}{y^3} = y_4 = S^3sy$$

on a $sS = S^3s$, où $3 \equiv -1 + 2^2 \pmod{8}$.

3. — M. le Prof. Gustave DUMAS (Lausanne), *Sur les singularités des surfaces*. — M. G. Dumas donne, en grands traits, un aperçu général de sa méthode de résolution des singularités des surfaces

analytiques dans le voisinage d'un point donné. Faisant un parallèle entre la théorie des courbes et celle des surfaces, il en signale les analogies et les différences et montre comment se posent les problèmes dans le dernier de ces deux cas.

4. — M. le Dr A. SPEISER (Strasbourg). *Ueber die Zerlegung der algebraischen Formen (Sur la décomposition des formes algébriques)*. — La notion de *composition* des formes quadratiques binaires occupe une place centrale dans la théorie que donne Gauss de ces formes. Cette notion est susceptible d'une généralisation encore plus grande que celle que lui donne la théorie des nombres algébriques.

Nous dirons que la forme $f(x_1, \dots, x_m)$ est composable avec elle-même, lorsque l'équation

$$f(z_1, \dots, z_m) = f(x_1, \dots, x_m) f(y_1, \dots, y_m)$$

se transforme en identité au moyen de la substitution bilinéaire à coefficients rationnels

$$z_l = \sum_i \sum_k a_{ikl} x_i y_k \quad (S)$$

Si la forme f est indécomposable dans le domaine des nombres rationnels, on obtient des nombres généralisés (hypercomplexes) en définissant des nombres e_1, \dots, e_m ayant la propriété de rendre identiques les deux membres de l'équation

$$e_1 z_1 + \dots + e_m z_m = (e_1 x_1 + \dots + e_m x_m) (e_1 y_1 + \dots + e_m y_m)$$

lorsque les z_l sont exprimés au moyen de la substitution (S). Il faut pour cela que les nombres e_1, \dots, e_m vérifient les équations

$$e_i e_k = \sum_l a_{ikl} e_l .$$

Lorsque cette multiplication est *associative* et *commutative*, le domaine des nombres $e_1 x_1 + \dots + e_m x_m$, dans lequel x_1, \dots, x_m sont des valeurs rationnelles quelconques, se réduit à des domaines holoédrique-isomorphes à certains corps algébriques et à leurs conjugués.

Lorsque la multiplication n'est qu'*associative*, on obtient des nombres hypercomplexes. Certaines formes quaternaires donnent naissance de cette manière à de nouvelles classes de nombres, telles que les quaternions dont l'arithmétique a été donnée par M. Hurwitz. C'est une image de l'arithmétique des formes quaternaires correspondantes.

Remarquons encore qu'une forme qui admet une composition, se décompose en deux facteurs dont l'un est $e_1x_1 + \dots + e_mx_m$.

De même, le *déterminant du groupe* admet une composition. Elle est à la base des profondes recherches de M. Frobenius ; en particulier, la décomposition du système correspondant de nombres hypercomplexes en systèmes partiels, tels que le produit de deux nombres quelconques pris dans deux systèmes partiels différents soit nul, conduit aux caractères du groupe.

Dans tous les cas, on peut attacher à tout nombre hypercomplexe une *norme* telle que le produit des normes de deux nombres soit égal à la norme du produit.

5. — Prof. Dr L. BIEBERBACH (Bâle). *Eine neue Methode der konformen Abbildung (Une nouvelle méthode de représentation conforme)*. — Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans un cercle de rayon R , de centre à l'origine ; soit, de plus $f(0) = 0, f'(0) = 1$. Donc

$$f(x) = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots, \quad |x| < R.$$

Une telle fonction effectue la représentation conforme du cercle dans un domaine dont l'aire (intérieure) est donnée par l'expression $\iint f \bar{f} f' \bar{f}' dx d\bar{x}$. L'intégrale double est étendue au cercle $|x| \leq R$, x et \bar{x} , $\frac{df}{dx} = f'$ et $\frac{d\bar{f}}{d\bar{x}} = \bar{f}'$ étant imaginaires conjugués. Si l'on pose $x = re^{i\varphi}$, cette expression devient, après un calcul facile

$$\begin{aligned} \int_0^R \int_0^{2\pi} r f' \bar{f}' d\varphi &= \pi R^2 + \frac{4a_2 \bar{a}_2 R^4}{4} + \frac{3^2 a_3 \bar{a}_3 R^6}{6} + \dots \\ &\quad + \frac{n^2 a_n \bar{a}_n R^{2n}}{2n} + \dots > \pi R^2. \end{aligned}$$

Par conséquent : *La représentation conforme d'un cercle par une fonction $f(x)$, holomorphe à l'intérieur de ce cercle, telle que $f(0) = 0, f'(0) = 1$, donne un domaine d'aire plus grande*. Par suite, si l'on considère la représentation conforme d'un domaine donné sur un cercle qui laisse fixe un point de ce domaine et dont le module d'agrandissement en ce point fixe est égal à 1, la fonction qui effectue cette représentation est caractérisée comme solution du problème : rendre minimum l'expression $\iint f \bar{f} f' \bar{f}' dx d\bar{x}$.

L'application de ce principe permet de démontrer très élémentairement la possibilité de la représentation conforme d'un domaine simplement connexe quelconque sur un cercle. Après avoir donné une démonstration très courte d'un théorème de Carathéodory sur la continuité de la variation de la fonction caractéristique de la représentation conforme lorsque le domaine se déforme

d'une manière continue (cette démonstration repose sur une remarque relative à la convergence des fonctions inverses d'une suite convergente de fonctions analytiques), le conférencier expose un procédé de calcul très simple pour la détermination effective de la fonction effectuant la représentation conforme. Ce procédé, par exemple, est applicable aux domaines dont l'ensemble complémentaire forme lui-même un domaine, ayant même frontière. Il consiste à approcher la fonction cherchée par le polynôme de degré n qui, parmi tous les polynômes du même degré, donne au domaine la plus petite aire ($f(0) = 0, f'(0) = 1$). Le calcul de ces polynômes déterminés univoquement conduit chaque fois à la résolution d'un système d'équations linéaires, à déterminant $\neq 0$.

6. — Dr E. MARCHAND (Zurich). *Sur la règle de Newton, dans la théorie des équations algébriques.* — Newton a publié, dans son «Arithmetica universalis» (1707), une règle pour la détermination du nombre des racines positives, négatives et imaginaires d'une équation algébrique à coefficients réels, qui permet de préciser les résultats obtenus par l'application de la règle des signes de Descartes. Newton n'a pas jugé à propos d'en donner la démonstration. C'est à Sylvester (1865) que revient l'honneur d'avoir trouvé le principe d'une démonstration, en même temps qu'une généralisation¹.

Les travaux de Newton et de Sylvester, ainsi que leur exposé dans les traités d'algèbre supérieure de Petersen² et de H. Weber³, renferment bien des lacunes que j'ai essayé de combler, sur le conseil de M. le Prof. Dr Hurwitz. Il s'agissait avant tout de trouver une démonstration complète de la règle de Newton, démonstration qui embrasse tous les cas possibles.

Voici l'énoncé que je propose pour la règle de Newton :

Soit $f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$, une équation à coefficients réels du n^{me} degré ($a_0 \neq 0, a_n \neq 0$).

Formons la différence

$$A_i = \frac{i(n-i)}{(i+1)(n-i+1)} a_i^2 - a_{i-1} a_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, (n-1) .$$

et considérons, au point de vue des signes, la double suite (I) :

$$\begin{array}{c} a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n \\ +, A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, A_{n-1}, + \end{array} \left. \right\}^{(I)} .$$

¹ J.-J. SYLVESTER, *Transactions of the Royal Irish Academy*, vol. 24, 1871.

J.-J. SYLVESTER, *Philosophical Magazine*, 4^{me} sér., vol. 31, p. 214.

² Jul. PETERSEN, *Theorie der algebraischen Gleichungen*, 1878, p. 263.

³ Heinrich WEBER, *Lehrbuch der Algebra*, 1895, t. 1, p. 304.

Désignons par

νP , le nombre total des variations-permanences¹ de (I), par
 $p P$, " " permanences-permanences¹ de (I), et par
 V , " " variations que présente la série

$$+, A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, A_{n-1}, +,$$

avec les conventions suivantes au sujet des zéros qui peuvent se présenter dans (I) :

1^o Si $a_{i-1} \neq 0$ $a_i = a_{i+1} = \dots = a_{i+i'-1} = 0$ $a_{i+i'} \neq 0$, i étant l'un des nombres 1, 2, ..., $(n-1)$, et i' , l'un des nombres 1, 2, ..., $(n-i)$, on donnera aux zéros représentant $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+i'-1}$, le même signe que celui de a_{i-1} .

2^o Si $A_{k-1} \neq 0$ $A_k = A_{k+1} = \dots = A_{k+k'-1} = 0$ $A_{k+k'} \neq 0$, k étant l'un des nombres 1, 2, ..., $(n-1)$ et k' , l'un des nombres 1, 2, ..., $(n-k)$, on donnera, en général,

au zéro représentant A_k , le signe contraire de celui de A_{k-1}
" " " " A_{k+1} , le même signe que " " " " A_{k-1} ,

etc., en variant toujours les signes; sauf toutefois dans le cas où les a_k correspondants sont tels que

$$a_{k-1} \neq 0 \quad a_k = a_{k+1} = \dots = a_{k+k'-1} = 0 \quad a_{k+k'} \neq 0 \quad \text{et} \quad a_{k-1} \cdot a_{k+k'} < 0.$$

Il faut alors que le zéro représentant $A_{k+k'-1}$ ait le même signe que $A_{k+k'}$.

Il y a encore un cas d'exception, celui où $f(x) \equiv (x - \alpha)^n = 0$; dans ce cas $A_1 = A_2 = \dots = A_{n-1} = 0$; ces zéros-là doivent tous être considérés comme des quantités positives.

La règle de Newton s'exprime alors par les formules :

$$N_+ = \nu P - 2\lambda_1, \quad N_- = p P - 2\lambda_2, \quad I = V + 2\lambda_3,$$

N_+ , N_- et I désignant les nombres de racines positives, négatives et imaginaires de $f(x) \equiv 0$, chaque racine étant comptée autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité. λ_1 , λ_2 et λ_3 sont des nombres entiers, non négatifs².

7. — M. le Prof. F. RUDIO (Zurich). *Der Stand der Werke Leonard Euler. (Etat de la publication des Œuvres d'Euler)*. — M. Rudio présente les neuf volumes parus; il saisit cette occasion

¹ Voir H. WEBER, *loc. cit.*

² La démonstration complète de la règle de Newton paraîtra dans le *Bulletin de la Société neuchâteloise des Sciences naturelles*, t. 40; 1912-1913.

pour signaler à l'attention de ses collègues la Société Léonhard Euler destinée à fournir un appui financier au Comité de publication. La Commission Euler espère obtenir le concours des principales sociétés mathématiques.

8. — M. le Dr D. MIRIMANOFF (Genève), *Sur quelques points de la théorie des ensembles.* (En l'absence de l'auteur, le mémoire est déposé sur le bureau de la présidence.) — M. Mirimanoff donne, en se bornant aux ensembles linéaires, une démonstration nouvelle du théorème de Cantor-Bendixson : tout ensemble fermé F se compose d'un ensemble dénombrable D et d'un ensemble parfait P . Cette démonstration peut être rapprochée de celles de W. H. Young, F. Bernstein, L. E. J. Brouwer dans lesquelles la partie dénombrable de F est détachée à l'aide d'un ensemble d'intervalles auxiliaires convenablement choisis. Les intervalles auxiliaires de M. Mirimanoff, qu'il appelle *crochets*, ont pour extrémités les milieux (ou des points intérieurs quelconques) des intervalles contigus à F et deux points arbitraires pris sur les demi-droites extérieures à F . (Ce mémoire sera inséré dans l'*Enseign. mathém.* du 15 janvier 1914. — *Réd.*)

9. — M. le Prof. Dr W. H. YOUNG, F. R. S. (Liverpool et Genève). *L'intégrale de Stieltjes et sa généralisation.* — En l'absence de l'auteur, son mémoire est déposé sur le bureau de la présidence.

L'intégrale de Stieltjes est une limite formée de la même manière que l'intégrale d'une fonction continue. C'est la limite d'une somme de termes de la forme $f(x_i) \Delta g(x_i)$, ($\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i)$), $g(x)$ étant une fonction non décroissante.

Lebesgue a montré que l'intégrale de Stieltjes se ramène à l'intégrale de Lebesgue d'une fonction bornée et il a indiqué la possibilité de prolonger l'opération de l'intégrale de Stieltjes à tout le champ des fonctions continues. Il se sert pour cela d'un changement de variable élégant, mais d'application difficile. Il remarque encore que procéder d'une autre manière à cette extension ne lui paraît guère possible.

Cette dernière remarque ne paraît pas fondée pour celui qui examine la théorie de l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée, telle que la développe M. Young. Cette théorie n'exige pas la connaissance des théories modernes de l'intégration, mais procède uniquement par la considération de suites monotones de fonctions. Le principe est le suivant :

On dira qu'une fonction $f(x)$ possède une intégrale par rapport à une fonction positive non décroissante $g(x)$, si elle peut s'exprimer comme limite d'une suite monotone de fonctions f_1, f_2, \dots dont les intégrales par rapport à $g(x)$ sont déjà définies, pourvu que la limite

des intégrales de toute suite ayant ces propriétés soit la même et ait une valeur finie. Cette limite s'appelle l'intégrale de $f(x)$ par rapport à $g(x)$.

En partant de fonctions constantes à l'intérieur (au sens étroit) d'un nombre fini d'intervalles, on obtient au moyen de suites monotones de fonctions des fonctions de classe l , u , lu , ul , lul , ulu , ... etc, ... et des fonctions qui n'appartiennent à aucune de ces classes. Après avoir démontré l'unicité du problème d'intégration pour les fonctions de classes l , u , lu et ul , on se sert ensuite du théorème suivant :

Etant donnée une fonction $f(x)$, bornée et représentable analytiquement, on peut trouver une fonction lu qui ne dépasse pas $f(x)$ et une fonction ul qui n'est pas moindre que $f(x)$, ces deux fonctions auxiliaires ayant la même intégrale par rapport à une fonction positive non décroissante $g(x)$.

Par conséquent, toute fonction bornée représentable analytiquement a une intégrale par rapport à une fonction positive non décroissante. L'extension aux fonctions non bornées se fait sans nouvelles difficultés et le passage à l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée est immédiat.

Un exemple de l'utilité de l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée nous est donné dans la théorie des séries trigonométriques. De même que l'intégrale de Lebesgue a élargi le champ des séries trigonométriques maniables en étendant la signification de l'expression *série de Fourier*, l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée a permis à M. Young d'agrandir encore plus ce champ en remplaçant la classe des séries de Fourier par la classe plus étendue des séries obtenues par dérivation terme à terme des séries de Fourier des fonctions à variation bornée. Parmi les propriétés des séries de Fourier qui restent vraies pour cette classe plus étendue, M. Young en cite deux : 1^o les coefficients d'une série impaire (paire) de cette classe, introduits comme multiplicateurs dans une série de Fourier (dans sa série alliée), engendrent la série de Fourier d'une fonction de même sommabilité que celle de la fonction associée à la première série de Fourier ; 2^o une telle série converge (C_1) ou ($C\delta$) ($0 < \delta < 1$) presque partout vers la dérivée de la fonction à variation bornée attachée à cette série.

Le mémoire se termine par une démonstration en quelques lignes n'employant que des théorèmes bien connus d'un résultat, établi jadis par M. Young au moyen d'un raisonnement long et difficile faisant usage du changement de variable indiqué par Lebesgue.

10. — M. le Prof. Dr A. EINSTEIN (Zurich). *Physikalische Grundlagen und leitende Gedanken für eine Gravitationstheorie (Base*

physique et idées directrices d'une Théorie de la Gravitation). — Une des lois naturelles les plus remarquables et le plus exactement vérifiée est celle de l'identité de la masse inerte et pesante des corps, elle exprime que l'accélération de chute dans un champ de pesanteur est indépendante du matériel constituant le corps qui tombe. La conception que dans un système de référence accéléré, les phénomènes se produisent comme dans un champ de gravitation, est voisine de cette loi.

Cette conception (Hypothèse de l'Équivalence) fournit un moyen de déduire théoriquement les propriétés du champ de la pesanteur. Le principal résultat ainsi obtenu est la courbure des rayons lumineux dans un champ de gravitation; pour un rayon passant à côté du soleil, la déviation est de $0'',84$, elle est donc susceptible d'observation.

Ce résultat ne concorde pas avec l'état actuel de la théorie de la Relativité, parce qu'il établit que la vitesse de la lumière dans le vide dépend du potentiel de gravitation.

J'ai montré, avec M. Grossmann, qu'on peut généraliser la théorie de la relativité au point de rester en concordance avec cette hypothèse d'équivalence¹.

D'après cette théorie, le champ de gravitation est défini par un « tenseur » symétrique ($g_{\mu\nu}$) avec 10 composantes.

Au lieu de l'élément de ligne

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 ,$$

c'est l'expression plus générale

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

qui intervient comme invariant fondamental.

Les relations du calcul vectoriel à 4 dimensions se transforment en celles du calcul différentiel absolu.

D'après cette généralisation, tout système d'équations physiques contient l'influence que le champ de gravitation exerce sur les phénomènes correspondants à ce système d'équations.

Ces équations généralisées sont généralement covariantes. En revanche, il paraît logiquement impossible de poser, pour déterminer le champ de gravitation (c'est-à-dire les $g_{\mu\nu}$), des équations qui soient covariantes par rapport à des substitutions quelconques.

En partant des théorèmes de la conservation de l'impulsion et de l'énergie, nous parvenons à choisir le système de référence (auxquelles les coordonnées d'espace et de temps x, y, z et t se

¹ A. EINSTEIN u. M. GROSSMANN. Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation. — 1 broch. in-8°, 38 p.; B. G. Teubner, Leipzig. — N. de la Réd.

rapportent) de telle sorte que les équations ne sont plus covariantes que pour des substitutions linéaires, mais, au contraire de la théorie habituelle de la relativité, pour des substitutions linéaires quelconques¹.

En soumettant le système de référence à cette restriction, nous obtenons des équations de gravitation entièrement déterminées et qui satisfont à toutes les conditions qu'on peut imposer à des équations de gravitation.

Il résulte, en particulier, de ces équations que l'inertie des corps n'est pas une propriété de chaque corps accéléré seulement, mais une action réciproque, c'est-à-dire une résistance à une accélération relative des corps par rapport aux autres corps. Cette conception a déjà été exposée par Mach et d'autres qui y arrivaient en se basant seulement sur la théorie de la connaissance.

11. — M. le Prof. Dr Marcel GROSSMANN (Zurich). *Mathematische Begriffsbildungen, Methoden und Probleme zur Gravitationstheorie.* (*Définitions, Méthodes et Problèmes mathématiques relatifs à la théorie de la Gravitation.*) — La formation des notions de l'analyse vectorielle générale constitue la seule difficulté mathématique à pénétrer dans la théorie d'Einstein sur la gravitation.

Si l'analyse vectorielle, auxiliaire indispensable de la physique théorique, ne se généralise que lentement, je pense que c'est parce que les physiciens n'établissent les théorèmes de l'analyse vectorielle que dans la mesure de leur application aux problèmes de physique qui en ont provoqué la découverte ou auxquels ils seront applicables.

Cette méthode, justifiée dans chaque cas particulier, ne saurait satisfaire les mathématiciens, ni susciter de notions générales.

Les mathématiciens, d'autre part, en introduisant les théories des quaternions et de Grassmann ont inutilement compliqué la compréhension de l'analyse vectorielle aux physiciens par des représentations abstraites qui n'étaient pas indispensables.

A ces difficultés s'ajoute la confusion babylonienne des termes et des signes qu'une commission internationale n'a pas réussi à corriger.

L'idée fondamentale de la théorie de la gravitation d'Einstein, qui est de caractériser un champ de gravitation par une forme différentielle quadratique à coefficients variables, nécessite une généralisation des définitions et des méthodes de l'analyse vectorielle, afin d'obtenir un aperçu plus distinct.

Le célèbre traité de CHRISTOFFEL, *Sur la transformation des*

¹ Le texte allemand de l'auteur dit : derart zu wählen, dass nur mehr lineare, aber im Gegensatz zur gewöhnlichen Relativitätstheorie beliebige lineare Substitutionen die Gleichungen kovariant lassen. — (Note du traducteur E. CHATELAIN.)

expressions différentielles homogènes du deuxième degré, 1869 (Journal f. Math. 70) et le travail trop peu remarqué de Ricci et de Levi-Civita, 1901 (Math. Ann. 54) où les auteurs exposent une méthode pour donner aux équations différentielles de la physique une forme indépendante des coordonnées, sont, pour le sujet qui nous préoccupe, d'une importance fondamentale.

Le développement ultérieur de l'analyse vectorielle a mis en lumière les avantages qu'il y a à traiter cette branche au point de vue général de la théorie des invariants, puisque cette dernière intervient dans tout le système des notions de l'analyse vectorielle et du même coup marque la place naturelle des nouvelles conceptions introduites par Minkowski, Sommerfeld, Laue, etc., dans le monde à quatre dimensions de la théorie de la relativité.

Il ne saurait être question ici de développer l'application des méthodes de la théorie des invariants à l'analyse vectorielle, je me bornerai à montrer la différence des méthodes sur les notions et les théorèmes les plus simples de l'analyse vectorielle.

La définition même de vecteur manque souvent de précision et de généralité, elle n'est pas susceptible d'extension. En définissant le vecteur comme une grandeur dirigée, déterminée par ses composantes suivant trois directions rectangulaires, on se restreint sans nécessité à l'espace euclidien, le seul où « direction » ait un sens immédiat.

On obtient une meilleure définition en se représentant un vecteur variable en grandeur et en direction de point en point, c'est-à-dire un champ vectoriel.

Ses trois composantes

$$A_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3)$$

sont des fonctions du lieu, les transformations qu'elles subissent lors d'une rotation du système de coordonnées sont essentielles. Cette rotation est exprimée par une substitution orthogonale

$$x'_i = \sum_k p_{ik} x_k \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

dont la solution est :

$$x_i = \sum_k p_{ki} x'_k .$$

Nous dirons qu'un vecteur est déterminé par trois fonctions $A_i(x_1, x_2, x_3)$ si elles se transforment comme les coordonnées elles-mêmes, donc si

$$A'_i = \sum_k p_{ki} A_k .$$

De sorte que les coordonnées rectangulaires sont elles-mêmes aussi composantes de vecteur, ainsi que leurs différentielles.

L'élément de ligne :

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

est un invariant absolu, pour chaque vecteur

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

est aussi un « scalaire », c'est-à-dire un invariant absolu, savoir : le carré de la grandeur du secteur.

Les opérations différentielles sont particulièrement importantes, la plus simple est la *divergence* du vecteur A

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

qui est un scalaire, ce qu'on peut prouver en effectuant la substitution orthogonale. On le montre habituellement en imaginant que le vecteur représente la vitesse dans le champ du courant d'un liquide incompressible. Dans un espace fini S, limité par une surface σ se trouvent des points où le liquide entre et d'autres où il sort. Si l'on calcule la quantité de liquide qui traverse la surface dans l'unité de temps on trouve

$$\int_{\sigma} A_k d\sigma = \int_S \operatorname{div} A dS$$

et l'on a ainsi montré en appliquant le théorème de l'intégrale de Gauss que la divergence est indépendante du système de coordonnées : que c'est un scalaire.

En concentrant le domaine S en un point, on peut obtenir la divergence comme limite.

On peut déduire ces notions et d'autres encore d'une façon plus satisfaisante en abandonnant les coordonnées cartésiennes pour introduire des coordonnées curvilignes quelconques.

L'élément de ligne s'exprime alors par

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k .$$

Le caractère de généralité de cette forme différentielle quadratique permet de ne pas se préoccuper de ce que l'espace soit euclidien, non euclidien ou même à courbure variable.

Par une transformation de coordonnées :

$$x_i = x_i(x'_1, x'_2, x'_3) \quad i = 1, 2, 3$$

ou une transformation des différentielles

$$dx_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} dx'_k = \sum_k p_{ik} dx'_k$$

ou résolue

$$dx'_i = \sum_k \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} dx_k = \sum_k \pi_{ki} dx_k$$

les coefficients de l'élément de ligne se transforment suivant les formules :

$$g'_{rs} = \sum_{ik} p_{ir} p_{ks} g_{ik} ,$$

si l'on suppose que l'élément de ligne est un scalaire.

Nous déterminons de nouveau un vecteur par trois fonctions $A_i(x_1, x_2, x_3)$ qui se transforment suivant les formules

$$A'_i = \sum_k p_{ki} A_k$$

et nous constatons que les coordonnées ne constituent plus de vecteur, que leurs différentielles se transforment différemment, parce que les quotients différentiels partiels π_{ki} sont différents des p_{ki} . C'est pourquoi nous appellerons A : *vecteur covariant*. Les différentielles des coordonnées constituent, au contraire, un *vecteur contravariant*, nous constatons immédiatement l'utilité de ce dualisme.

Soient

$$A_1, A_2, A_3 \quad \text{et} \quad B_1, B_2, B_3$$

deux vecteurs variables, formons les grandeurs

$$T_{ik} = A_i B_k$$

qui se transforment de la manière suivante :

$$T'_{rs} = \sum_{ik} p_{ir} p_{ks} T_{ik} .$$

Un tel système de neuf grandeurs définit ce que nous appelons *tenseur covariant* de deuxième rang, puisque ses composantes sont caractérisées par deux indices. On voit que les coefficients de

l'élément de ligne constituent aussi un tenseur covariant de deuxième rang : le *tenseur fondamental*.

Soit

$$g = |g_{ik}|$$

le discriminant de la forme différentielle, c'est-à-dire le déterminant des neuf coefficients, les déterminants mineurs de deuxième ordre divisés par le déterminant lui-même, sont les composantes d'un tenseur contravariant de deuxième rang, leurs formules de transformation étant :

$$\gamma'_{rs} = \sum_{ik} \pi_{ir} \pi_{ks} \gamma_{ik} .$$

On peut définir, plus généralement, le tenseur covariant de rang λ par un système de fonctions $T_{r_1 r_2 \dots r_\lambda}$, qui se transforment d'après les formules

$$T'_{r_1 r_2 \dots r_\lambda} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \dots p_{i_\lambda r_\lambda} T_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} .$$

De tels systèmes covariants, que nous appelons maintenant tenseurs, jouent un grand rôle dans la théorie de la transformation de CHRISTOFFEL qui a montré comment on peut passer d'un tenseur de rang λ à un autre de rang $\lambda + 1$ par une seule opération de différentiation.

Interrompons ces considérations générales pour montrer comment on obtient la divergence du vecteur.

Soient A_1, A_2, A_3 les composantes d'un vecteur covariant, le problème consiste à déduire du vecteur, par une différentiation, un scalaire, c'est-à-dire un invariant absolu. Dans ce but, formons d'abord, d'après CHRISTOFFEL, l'« extension » (Erweiterung) du vecteur, c'est-à-dire le tenseur covariant de deuxième rang

$$A_{rs} = \frac{\partial A_r}{\partial x_s} - \sum_{ik} \frac{1}{2} \gamma_{ik} \left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_s} + \frac{\partial g_{is}}{\partial x_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} \right) A_k = \frac{\partial A_r}{\partial x_s} - \sum_k \left\{ \begin{smallmatrix} rs \\ k \end{smallmatrix} \right\} A_k$$

puis le scalaire

$$\text{div } A = \sum_{rs} \gamma_{rs} A_{rs} ,$$

auquel on peut donner la forme

$$\text{div } A = \sum_{rs} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_s} (\sqrt{g} \gamma_{rs} A_r) .$$

Il en résulte, comme extension du vecteur, lorsque l'élément de ligne est euclidien

$$A_{rs} = \frac{\partial A_r}{\partial x_s} ,$$

et comme divergence

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} .$$

Je prends encore, comme exemple, les notions de l'analyse vectorielle relatives au champ d'un scalaire.

Soit $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ un scalaire, alors

$$\partial \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3$$

en est aussi un. Comme les dx_i constituent un vecteur contravariant, il faut que les $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ forment un vecteur covariant que nous appellerons le *Gradiant* de φ .

Comme carré de sa valeur nous avons le scalaire

$$\sum_{rs} \gamma_{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} ,$$

c'est-à-dire le premier paramètre différentiel de BELTRAMI, qui, dans le cas de l'analyse vectorielle habituelle, devient le paramètre différentiel de LAMÉ

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right)^2 .$$

D'après la formule générale citée plus haut, la divergence du gradiant est

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \sum_{rs} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\sqrt{g} \gamma_{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \right) ,$$

c'est-à-dire le deuxième paramètre différentiel de BELTRAMI, qui, dans le cas de l'analyse vectorielle habituelle devient

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}$$

c'est le deuxième paramètre différentiel de LAMÉ.

Nous voyons, d'après ces simples exemples la fécondité des méthodes employées, qui sont en outre complètement indépen-

dantes du nombre des variables. Je suis persuadé que les questions de notation de l'analyse vectorielle pourraient être résolues facilement sur le terrain de ces considérations générales.

12. — *Partie administrative.* M. H. FEHR, président, rappelle d'abord le souvenir du professeur H. WEBER (Strasbourg), membre honoraire, décédé au mois de juin dernier; puis il présente le rapport annuel. Sur la proposition des vérificateurs des comptes, la Société approuve le rapport du caissier. Le nombre des membres s'élève à 132.

Sur la proposition de son Comité, l'Assemblée décide d'adhérer à la *Société Léonhard Euler*; « elle engage ses membres et le public scientifique à s'associer aux efforts faits dans le monde entier pour élever un monument impérissable à l'un des plus illustres savants suisses. »

Société Léonhard Euler.

La commission Euler de la Société helvétique des Sciences naturelles vient de créer, sous le nom de Société Léonhard Euler, une association destinée à fournir un appui financier à la publication des œuvres complètes d'Euler. Après une étude plus approfondie du plan et du prix de revient de cette vaste publication, la Commission a reconnu que les devis primitifs seront dépassés.

« Suivant un premier devis, dit la circulaire, l'édition complète des œuvres d'Euler devait comprendre 40 à 45 volumes, chiffre qui a servi de base pour le calcul des frais de publication. Ceux-ci, évalués à un demi-million de francs, semblaient couverts par des abonnements et des subventions volontaires.

« Neuf volumes ont paru jusqu'à ce jour. Ces volumes ont été accueillis avec une faveur marquée, grâce à la révision très soignée du texte et à leur belle impression. Par malheur, on a dû reconnaître que les frais de publication sont plus élevés qu'on ne l'avait prévu. Ainsi, malgré les 400 abonnements assurés (prix d'abonnement par volume 25 fr.) les 6 premiers volumes ont engendré un déficit de 45,000 fr. qui a dû être couvert par le fonds Euler. Ce fonds, constitué par les subventions de diverses autorités civiles, de sociétés scientifiques et par des dons de particuliers est déjà réduit à 84,000 fr. On a reconnu en outre qu'à moins de donner des dimensions inacceptables aux volumes, le nombre de ceux-ci, d'abord prévu, est insuffisant pour contenir les œuvres complètes de l'inépuisable savant. L'Académie de St-Pétersbourg a mis à la disposition de la Commission Euler un grand nombre de manuscrits inédits; de tous côtés on retrouve des lettres d'Euler. A toutes ces causes d'amplification s'ajoute encore le fait