

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 15 (1913)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES COURBES DE RIBAUCCOUR  
**Autor:** Turrière, É.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-14873>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

et cela de plusieurs manières différentes. Ces observations nous conduisent en outre aux règles dualistiques suivantes résumant les constructions :

*Une cubique  $C^3$  à point de rebroussement  $S_2$  étant donnée par les points nécessaires, la ligne de jonction de  $S_2$  avec chaque point  $S_1$  est univoquement conjuguée à la ligne de jonction de  $S_2$  avec le point de tangence  $B$  de la tangente de  $C^3$  menée par  $S_1$ .*

*Cette relation n'est pas réciproque.*

*Ces droites forment deux faisceaux homographiques concentriques en  $S_2$  dont les rayons doubles sont d'une part la tangente de rebroussement et d'autre part une droite passant par le point d'inflexion.*

*Une courbe de 3<sup>e</sup> classe  $K^3$  à tangente d'inflexion  $P_2$  étant donnée par les éléments nécessaires, le point de coupe de  $P_2$  avec chaque tangente simple  $P_1$  est univoquement conjugué au point de coupe de  $P_2$  avec la tangente de  $K^3$  menée par le point d'intersection de  $P_1$  avec  $K^3$ .*

*Cette relation n'est pas réciproque.*

*Ces points forment deux ponctuelles homographiques sur la même base  $P_2$ ; les points doubles sont d'une part le point d'inflexion et d'autre part, un point situé sur la tangente de rebroussement.*

L. CRELIER (Berne-Bienne).

## SUR LES COURBES DE RIBAUCCOUR

Dans une récente thèse *Ueber einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Mannheimschen Kurve* (Heidelberg, 1911), M. Léopold BRAUDE a appelé l'attention sur certaines courbes qu'il a nommées *Zwischenevolute* et que je désignerai par la dénomination de *développées intermédiaires*. Soit une courbe plane (C); soit P le point qui divise en une raison donnée  $\lambda$  le rayon de courbure  $M\mu$  de la courbe (C) en M, c'est-à-dire soit P le point tel que l'on ait :

$$\frac{M\mu}{MP} = \lambda ;$$

$\lambda$  étant un nombre algébrique fixé, lorsque le point M décrit la

courbe (C), le point P décrit une courbe qui, par définition, est la développée intermédiaire de (C), associée au nombre  $\lambda$ .

A toute courbe (C) est ainsi associée une infinité, dépendant du paramètre  $\lambda$ , de développées intermédiaires. Parmi celles-ci, se trouvent la courbe elle-même ( $\lambda = \infty$ ) et la développée proprement dite ( $\lambda = 1$ ).

Des exemples remarquables de développées intermédiaires ont été donnés par M. BRAUDE dans le mémoire précédemment cité et dans divers travaux qui lui font suite : *Ueber einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Evolutoïde* (*Archiv der Mathematik und Physik*, III Reihe, XX, p. 44-52). — *Les développées imparfaites des spirales sinusoides, des courbes de Ribaucour, et des coniques* (*Giornale di Matematiche di Battaglini*, 1912, p. 310).

Le problème inverse paraît devoir être particulièrement intéressant. Il s'agit, étant donnée une courbe plane ( $\Gamma$ ), de rechercher les courbes (C) dont ( $\Gamma$ ) puisse être une développée intermédiaire. Le cas le plus simple est celui pour lequel ( $\Gamma$ ) est une droite; les courbes correspondantes (C) sont celles que Jean BERNOULLI avait considérées dès 1716 et que l'on désigne d'habitude sous le nom de *courbes de Ribaucour*, en l'honneur du géomètre français qui les a utilisées, en 1880, dans son *Etude sur les élastoïdes*.

Je ne ferai point ici l'historique de ces courbes remarquables : elles sont étudiées dans les ouvrages (indispensables dans des études de cette nature) de M. Gomes TEIXEIRA (*Traité des courbes spéciales remarquables*, t. II, pp. 282-286) et de M. Gino LORIA (*Spezielle ebene Kurven*, t. II, pp. 137 et 234). L'article *Courbes transcendentes particulières* de l'édition française de l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* en contiendra d'ailleurs la bibliographie complète.

Je me propose uniquement de développer ici des considérations qui se rattachent à quelques-uns des résultats obtenus par M. BRAUDE.

#### 1. — RELATION ENTRE LA CHAINETTE DE CORIOLIS ET LES COURBES DE RIBAUCCOUR.

Dans un article intitulé *Courbes transcendentes et interscendantes* (*Enseignement mathématique*, mai 1912, pp. 209-214), j'ai insisté assez longuement sur le fait que, par un passage à la limite, certaines courbes transcendentes particulières peuvent être envisagées comme appartenant à une famille de courbes algébriques ou interscendantes qui dépendent d'un paramètre arbitraire : la spirale logarithmique, par exemple, est, d'après M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, la limite d'une certaine famille de spirales sinusoides.

Il se produit un fait analogue pour les courbes de Ribaucour. L'équation différentielle de celles-ci étant

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{(cy)^{\frac{2}{m}} - 1}},$$

pour  $m$  rationnel, ces courbes de Ribaucour sont certainement des courbes panalgébriques, au sens de M. Gino LORIA ; pour des valeurs rationnelles particulières, elles peuvent même être algébriques. Mais lorsque  $m$  est un nombre irrationnel, ces courbes de Ribaucour cessent d'être panalgébriques : l'ordre minimum de l'équation différentielle rationnelle, qui les admet pour intégrales, est alors deux : ce sont donc des courbes qui sont à l'égard des courbes panalgébriques précédentes, ce que les courbes interscendantes sont par rapport aux courbes algébriques. De même que les courbes interscendantes constituent une transition entre les courbes algébriques et les courbes transcendantes proprement dites, de même les courbes actuelles se placent naturellement entre les courbes panalgébriques et les courbes transcendantes du second ordre proprement dites.

Pour la valeur zéro du paramètre  $m$ , l'équation différentielle des courbes de Ribaucour se présente sous une forme illusoire. OSSIAN BONNET (Journal de Liouville, 1844, p. 223 et p. 235) observe, d'après la définition mécanique des courbes de Ribaucour qu'il prend pour départ, que, pour ce cas singulier, la courbe de Ribaucour doit être remplacée par une chaînette d'égale résistance de Coriolis.

Ce même fait est signalé dans une Note *Ueber die Kurven, unter deren Zwischenevoluten sich Kreise befinden* de M. L. BRAUDE, insérée dans les *Monatshefte für Mathematik und Physik* (t. XXIII, 1912, p. 288). Nous pouvons préciser ce résultat en envisageant la famille suivante de courbes de Ribaucour :

$$x = \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{(1 + my)^{\frac{2}{m}} - 1}};$$

$y_0$  est un nombre fixé ; quant à  $m$ , c'est le paramètre arbitraire dont nous faisons dépendre la courbe de Ribaucour ; ce paramètre est supposé varier d'une manière continue au voisinage de zéro ; il prendra toute valeur possible, rationnelle ou non : la famille de courbes de Ribaucour comprendra donc des courbes des deux premiers ordres de transcendance.

Dans ces conditions, la famille envisagée de courbes de Ribau-



cour admet une courbe limite lorsque  $m$  s'annule ; celle-ci est représentée par l'équation

$$x = \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{e^{2y} - 1}} = \arccos e^{-y} - \arccos e^{-y_0} ;$$

par un changement d'origine, on la réduit à la forme suivante :

$$x = \arccos e^{-y} ;$$

d'où il résulte que cette courbe limite est la chaînette d'égale résistance de Coriolis :

$$e^y \cdot \cos x = 1 .$$

Cette courbe est du second ordre de transcendance, de même que la courbe générale de la famille de courbes de Ribaucour dont elle est la limite.

## II. — EQUATIONS TANGENTIELLES DES COURBES DE RIBAUCCOUR.

Sauf pour la parabole, la chaînette, et la cycloïde, je n'ai trouvé aucune trace de recherches sur l'équation tangentielle d'une courbe de Ribaucour. L'équation tangentielle de la cycloïde a été formée par W. H. BESANT dans ses *Exercices pour la licence* (voir *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1871, p. 286). Quant à la chaînette, son équation tangentielle — que l'on trouvera plus loin — n'a pas été considérée à proprement parler ; mais l'équation analogue de l'alysséide a été fréquemment envisagée.

Il est aisé de former l'équation tangentielle d'une courbe de Ribaucour en partant de son équation ponctuelle. Je vais former cette même équation, d'après la propriété géométrique qui définit une courbe de Ribaucour.

J'utiliserai à cet effet le système de coordonnées polaires tangentielles de HESSE et de FERRERS : la courbe est considérée comme enveloppée par la droite d'équation

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi ;$$

en prenant l'axe  $Ox$  pour base de la courbe de Ribaucour, la condition géométrique imposée à cette courbe est

$$MC = m \cdot MN ;$$

M est un point quelconque de la courbe de coordonnées :

$$M \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \varpi \cos \varphi - \frac{d\varpi}{d\varphi} \sin \varphi , \\ y = \varpi \sin \varphi + \frac{d\varpi}{d\varphi} \cos \varphi ; \end{array} \right.$$

N est la trace sur Ox de la normale d'équation :

$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi = \frac{d\varpi}{d\varphi} ;$$

C est le rayon de courbure situé sur la normale précédente : ses coordonnées sont

$$C \quad \left\{ \begin{array}{l} x_c = -\frac{d\varpi}{d\varphi} \sin \varphi - \frac{d^2\varpi}{d\varphi^2} \cos \varphi , \\ y_c = \frac{d\varpi}{d\varphi} \cos \varphi - \frac{d^2\varpi}{d\varphi^2} \sin \varphi ; \end{array} \right.$$

portons les valeurs des ordonnées de M et de C dans la relation

$$y_M - y_c = m y_M , \quad \text{ou} \quad y_c = (1 - m) y_M ;$$

on obtient ainsi une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d\varpi}{d\varphi} \cos \varphi - \frac{d^2\varpi}{d\varphi^2} \sin \varphi = (1 - m) \left[ \varpi \sin \varphi + \frac{d\varpi}{d\varphi} \cos \varphi \right] ;$$

toutes simplifications faites, cette équation se réduit à

$$\left( \varpi + \frac{d^2\varpi}{d\varphi^2} \right) \sin \varphi = m \left( \varpi \sin \varphi + \frac{d\varpi}{d\varphi} \cos \varphi \right) ;$$

on peut l'écrire sous la forme équivalente

$$\tan \varphi \frac{dy}{d\varphi} = m y ,$$

en introduisant l'ordonnée  $y$  du point M de la courbe. Une première intégration donne donc

$$y = A \sin^m \varphi ;$$

comme on a d'autre part

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\varpi}{\cos \varphi} \right) \equiv \frac{y}{\cos^2 \varphi} ,$$

il en résulte par une seconde intégration :

$$\varpi = A \cos \varphi \int_0^{\varphi} \frac{\sin^m \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi + B \cdot \cos \varphi .$$

Telle est la formule désirée : cette équation tangentielle générale de la courbe de Ribaucour dépend de deux constantes arbitraires A et B. La présence de B est due à ce que la question se traduit par une équation différentielle qui admet la translation parallèle à Ox pour transformation infinitésimale. Par un choix convenable de l'origine, on peut toujours faire disparaître le terme en B. cos  $\varphi$ . Quant à la constante A, elle provient de ce que l'homothétie est aussi une transformation infinitésimale. Pour faire l'étude d'une courbe de Ribaucour d'indice  $m$ , on pourra, par conséquent, se borner à celle de la courbe que représente l'équation :

$$\varpi = \cos \varphi \int_0^{\varphi} \frac{\sin^m \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi .$$

Pour  $m = 0$ , on trouve bien un point, qui du point de vue tangentiel est une courbe de Ribaucour particulière. Pour  $m = 1$ , on trouve un cercle dont le centre est le pôle.

Pour  $m = -1$ , l'intégration donne l'équation tangentielle,

$$\varpi = 1 + \cos \varphi \log \tan \frac{\varphi}{2} ,$$

de la chaînette ordinaire

Pour  $m = -2$ , c'est celle,

$$\varpi = - \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} ,$$

de la parabole.

Pour  $m = +2$ , on se trouve en présence de la cycloïde ordinaire ; son équation polaire tangentielle est

$$\varpi = \sin \varphi - \varphi \cos \varphi .$$

Un changement de pôle permet de se servir de l'équation

$$\varpi = \varphi \cos \varphi$$

pour représenter la cycloïde. Le pôle étant pris au sommet d'un arc de la cycloïde, on pourra lui donner l'équation tangentielle :

$$\varpi = \varphi \sin \varphi .$$

Il en résulte que, par rapport à un sommet, la cycloïde ordinaire est la podaire négative de la courbe d'équation polaire

$$r = \theta \sin \theta ;$$

cette courbe remarquable se déduit de la spirale d'Archimède par la transformation que M. BROCARD utilisa pour définir le trifolium à partir du cercle et qui permet aussi de faire dériver la cochléoïde de la spirale hyperbolique et la logarithmoïde de M. KÖSTLIN de la spirale logarithmique.

L'équation tangentielle de la courbe de Ribaucour la plus générale permet d'étudier simplement des courbes associées à ces courbes. En dérivant l'expression de  $\varpi$ , on trouve :

$$\varpi + \varpi'' = m \sin^{m-1} \varphi .$$

Le rayon de courbure est ainsi :

$$R = m \sin^{m-1} \varphi .$$

On sait que TUCKER a donné le nom de *radiale* à la courbe lieu des extrémités des vecteurs équipollents aux rayons de courbure menés par un pôle fixe. En d'autres termes, l'équation polaire de la radiale s'obtient immédiatement à partir de l'équation naturelle de la courbe, en changeant les significations des lettres  $R$  et  $\varphi$ . Dans les notations ordinaires, l'équation polaire de la radiale de la courbe de RIBAUCOUR est donc celle d'une courbe de CLAIRAUT :

$$r = m \sin^{m-1} \theta .$$

C'est là une courbe algébrique ou interscendante que l'on rencontre assez fréquemment, dans des cas particuliers et dans diverses applications. C'est un résultat signalé incidemment par M. L. BRAUDE dans un mémoire des *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* (XXXIV, 1912, p. 286) « *Ueber Roll- und Fusspunkt-Kurven* ».

Il est aisé de vérifier ainsi que la radiale de la cycloïde est un cercle, et que celle de la chaînette est la courbe *Campyle*.

L'application de ces coordonnées tangentielles permet d'effectuer la rectification de la courbe de Ribaucour. On a

$$\frac{ds}{d\varphi} = R ;$$

d'où :

$$s = m \int \sin^{m-1} \varphi . d\varphi .$$

Il en résulte immédiatement l'équation intrinsèque donnée par CESARO :

$$(m-1)s = \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{m}\right)^{\frac{2}{1-m}} - 1}} ;$$

on retrouve bien ainsi que la *courbe de Mannheim* d'une courbe de Ribaucour est une courbe affine à une autre courbe de Ribaucour. En se reportant aux recherches de M. L. BRAUDE, on peut dire que, parmi les courbes de Mannheim, généralisées au sens de M. BRAUDE et qu'il est possible d'attacher à une courbe de Ribaucour quelconque, se trouve toujours une autre courbe de Ribaucour.

M. E. KÖSTLIN a récemment associé à une courbe plane quelconque une nouvelle courbe qu'il appelle *l'arcuide* de la courbe considérée. Cette arcuide s'obtient en prenant pour fonction  $\varpi$  l'expression

$$s \cos \varphi ;$$

l'arcuide d'une courbe de Ribaucour est donc une courbe d'équation polaire tangentielle

$$\varpi = m \cos \varphi \int \sin^{m-1} \varphi d\varphi ;$$

l'arcuide d'une courbe de Ribaucour a pour équation naturelle :

$$R = m(m-1) \sin^{m-2} \varphi - m(m+1) \sin^m \varphi ;$$

on peut donc la considérer comme étant l'antiradiale d'une certaine courbe (algébrique si  $m$  est rationnel, interscendante et panalgébrique si  $m$  est irrationnel) d'équation polaire :

$$r = m(m-1) \sin^{m-2} \theta - m(m+1) \sin^m \theta ;$$

cette dernière courbe peut d'ailleurs être construite comme étant la cissoïdale de deux courbes de Clairault du genre précédemment rencontré

$$r = A \sin^k \theta .$$

III. — A côté des courbes de Ribaucour, il conviendra de placer les courbes d'équation :

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{(cy)^{\frac{2}{m}} + 4}} ;$$

elles sont en effet *affines des courbes de Ribaucour*, à condition d'introduire des nombres imaginaires. Pour  $m = -2$ , cette équation représente une parabole; pour  $m = -1$ , la courbe correspondante est une hyperbole du second degré. Pour  $m = +1$ , la courbe est transcendante panalgébrique: c'est la sinusoïde hyperbolique.

Pour  $m$  quelconque, on n'a pas encore eu à envisager de telles courbes, pour la raison qu'elles ne se présentent pas dans les applications. J'ai cependant rencontré la courbe  $m = \frac{1}{2}$ , à propos de l'étude d'une autre courbe transcendante.

Dans des recherches de géométrie, j'ai été amené à considérer la courbe dont la radiale est la courbe panalgébrique:

$$r = \frac{1}{\sqrt{\text{sh } \mu \theta}} ,$$

Cette courbe d'équation naturelle

$$R = \frac{1}{\sqrt{\text{sh } \mu \varphi}} ,$$

peut être représentée par les équations:

$$x = \int \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\text{sh } \mu \varphi}} d\varphi ,$$

$$y = \int \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\text{sh } \mu \varphi}} d\varphi ;$$

elle est transcendante et son ordre de transcendance est toujours 3, *quel que soit*  $\mu$ . Ces équations paramétriques de la courbe rappellent, quant à leur forme, celles qui servent à représenter la *pseudo-chaînette*. Quel que soit  $\mu$ , on a l'équation intrinsèque suivante:

$$\frac{\mu}{2} s = \int \frac{dR}{\sqrt{R^4 + 1}} ;$$

la rectification s'effectue à l'aide des intégrales elliptiques. La courbe de Mannheim est donc une des courbes affines aux courbes de Ribaucour (au sens qui vient d'être précisé) avec la valeur  $m = \frac{1}{2}$  de l'indice.

IV. — Il me reste à signaler que, dans un article des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1913), intitulé « *Généralisation des courbes de Ribaucour* », j'ai considéré les mêmes courbes que

M. BRAUDE, dans son article déjà cité *Ueber die Kurven unter deren Zwischenevoluten sich Kreise befinden*. Ce n'est qu'après l'impression de mon travail, que j'ai eu connaissance de celui de M. BRAUDE. Nos méthodes sont d'ailleurs essentiellement distinctes, puisque M. BRAUDE utilisait l'expression du rayon de courbure de la développée intermédiaire et formait l'équation de la courbe en coordonnées intrinsèques. En ce qui me concerne, au contraire, poursuivant les calculs d'un récent article *Sur les roulettes à base rectiligne* (*Enseignement mathématique*, XV<sup>e</sup> année, n<sup>o</sup> 4, p. 319-325, 1913), j'ai utilisé les coordonnées tangentielles, et, désirant généraliser un théorème d'Ossian BONNET, j'ai établi un mode de génération cinématique des courbes obtenues.

É. TURRIÈRE (Montpellier).

---

## SUR LES AXES ROTATIFS

---

Dans une intéressante étude *Sur les axes principaux d'inertie*, publiée dans l'*Enseignement mathématique* du 15 juillet 1913, M. Bouny établit deux propositions concernant les axes susceptibles d'être axes instantanés de rotation sous l'action d'une percussion<sup>1</sup>.

Ces axes, que nous avons proposé d'appeler *axes rotatifs*<sup>2</sup>, par opposition aux axes hélicoïdaux (axes de rotation et de glissement) satisfont, comme l'indiquent la plupart des traités de mécanique<sup>3</sup>, à la condition nécessaire et suffisante d'être axes principaux d'inertie par rapport à l'un de leurs points.

M. Bouny démontre 1<sup>o</sup> que dans les ellipsoïdes d'inertie contruits sur les différents points d'un de ces axes, les plans diamétraux conjugués à l'axe sont normaux au plan déterminé par l'axe et par le centre de gravité ; 2<sup>o</sup> que ces plans diamétraux conjugués forment un faisceau de plans, ayant pour axe la ligne d'action de la percussion correspondante.

---

<sup>1</sup> Pour éviter toute confusion, faisons observer que nos raisonnements s'appliquent à une percussion sollicitant un solide libre dans l'espace et primitivement immobile. Un axe instantané de rotation, réalisé en ce cas, coïncide évidemment avec un axe fixe, dont les réactions sont nulles à l'instant de la percussion.

<sup>2</sup> *Centres de percussion et axes de rotation* (Revue de Mécanique, avril 1911 ; Bulletin technique de l'Association des ingénieurs sortis de l'Ecole polytechnique de Bruxelles, avril 1911).

<sup>3</sup> Cf. APPELL, t. II, 3<sup>e</sup> éd., 1911, n<sup>o</sup> 512, p. 498 ; STURM, t. II, 3<sup>e</sup> éd., 1875, p. 154 ; GRAINDORGE, 1889, t. II, p. 341, etc., etc.