

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 15 (1913)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE CONTENU DU CERCLE ET DE LA SPHÈRE COMPARÉ A CELUI D'AUTRES FORMES GÉOMÉTRIQUES.
Autor: v. Leber, Max Edler
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-14869>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LE CONTENU DU CERCLE ET DE LA SPHÈRE

COMPARÉ A CELUI

D'AUTRES FORMES GÉOMÉTRIQUES.

Introduction. — Il est universellement connu, que parmi toutes les formes géométriques limitées, ayant même valeur du contour, ce sont dans le plan le cercle et dans l'espace la sphère qui offrent le contenu maximum. Toutefois, lorsque dernièrement on vint me demander une démonstration mathématique rigoureuse de ces principes populaires, je m'aperçus qu'il ne s'en trouve aucune dans les traités modernes de géométrie qui soit à l'abri d'objections fondées.

Les recherches faites à ce sujet, ont permis de constater que cette question, depuis longtemps déjà et jusqu'à l'époque actuelle, a été traitée comme exemple d'application du calcul des variations¹. Cependant pour démontrer ces propriétés si simples du cercle et de la sphère, il n'est nullement nécessaire d'avoir recours à des procédés aussi recherchés; il suffit d'utiliser à cet effet les principes de la géométrie courante.

A cet égard il y a lieu de considérer deux mémoires importants publiés en 1842 par le professeur STEINER de l'Académie de Berlin : « Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général ». (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 24, pp. 93 et 189).

Ces mémoires remarquables par le nombre des problèmes proposés, des solutions données et des méthodes de démonstration

¹ Pour l'aire du cercle : M. NAVIER : Résumé des leçons d'analyse données à l'école polytechnique. Paris 1856. V. Dalmont, II vol. p. 208. — M. COURNOT : Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal. Paris 1857. L. Hachette, II vol. p. 132. — Em. CZUBER : Differential u. Integralrechnung. Leipzig 1906, II vol. p. 460. — Ces calculs conduisent à l'équation du cercle.

Pour le volume de la sphère : G. BOSSUT : Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Paris an VI (1798). Impr. de la République, II vol. p. 470, n° 25. — L.-A. SOHNKE : Sammlung von Aufgaben aus der Integralrechnung. Dr H. AMSTEIN, H.-W. Schmidt, Halle 1877, p. 295. — H.-A. SCHWARZ : Beweis des Satzes, dass die Kugel Kleinere Oberfläche besitzt, als jeder andere Körper gleichen Volumens. *Gesammelte mathem. Abhandlungen*. 1890. II vol. p. 327. — Voir aussi : *Nachr. der K. Ges. der Wissenschaften u. der Georg. Aug. Univ. zu Göttingen*, 1884, p. 1-13. Ces calculs prouvent que la forme cherchée doit jouir de certaines propriétés, dont jouit aussi la sphère.

diverses qu'ils contiennent, manquent cependant parfois de clarté ; ils ne sont pas toujours complets et à l'abri de toute critique ainsi qu'on le trouve mentionné dans des publications postérieures, à savoir :

F. EDLER « Vervollständigung der STEINER'schen elementargeometrischen Beweise für den Satz, dass der Kreis grösseren Flächeninhalt besitzt als jede andere ebene Figur gleichgrossen Umfanges ». *Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften u. der Georg Aug. Universität zu Göttingen*. Göttingen 1882 Dietrich. Seite 73¹.

R. STURM : Bemerkungen u. Zusätze zu STEINER's Aufsätzen über Maximum u. Minimum. « *Journal für die reine u. angewandte Mathematik* », 1884, vol. 96, p. 36².

E. ROUCHÉ et Ch. DE COMBEROUSSE : *Traité de Géométrie*, 7^e édit., Paris 1900, p. 365, t. I et p. 234, t. II³.

R. STURM : *Maxima u. Minima in der elementaren Geometrie*. Leipzig und Berlin 1910, p. 31⁴.

Ces compléments, ainsi que les excellents mémoires de STEINER concernent une foule de problèmes de maxima et minima ; ici au contraire c'est uniquement le problème du cercle et de la sphère qui nous occupe.

Sans vouloir critiquer en détail les publications remarquables de mes devanciers, je dois cependant regretter qu'ils n'aient pas prouvé tout d'abord que les formes géométriques cherchées, tant dans le plan que dans l'espace, doivent présenter partout des contours arrondis convexes et être dépourvues de points singuliers, ces derniers pouvant entraver les déductions obtenues, soit par la géométrie courante, soit par le calcul différentiel. J'ai reconnu que cette démonstration préalable une fois établie, on en peut déduire facilement la forme circulaire et la forme sphérique, en n'invoquant que les principes connus de la courbure des lignes et des surfaces.

On a objecté aussi à toutes les publications antérieures, qu'elles ne démontrent nullement l'existence d'un maximum maximorum tant en grandeur qu'en forme précise ; c'est là un point important qu'il faut élucider et ma méthode nouvelle s'y prête très bien.

¹ L'auteur expose un procédé spécial pour transformer par un nombre limité d'opérations, un polygone irrégulier en un polygone régulier d'un plus grand nombre de côtés, de façon à diminuer le rapport du périmètre à l'aire qu'il contient.

² On trouve ici une critique étendue des mémoires de STEINER en tant qu'ils concernent les problèmes dans le plan. L'auteur tient compte aussi des publications antérieures de STEINER ; il y ajoute des développements complémentaires.

³ Cet excellent traité reproduit pour les figures planes la démonstration de STEINER (triangle rectangle inscrit) ; il donne une démonstration élégante pour la sphère en prouvant que toutes les normales à la surface cherchée doivent concourir en un même point, tous ces rayons ayant même longueur.

⁴ L'auteur traite le problème du cercle en prouvant que dans un quadrilatère inscrit dans le contour, un sommet mobile doit toujours rester sur le cercle passant par les trois autres.

J'admets comme axiome que soit en plan, soit dans l'espace, par toutes les modifications que l'on peut faire subir à un contour fermé, de grandeur limitée donnée, afin d'en agrandir le contenu, on ne peut élever celui-ci au delà de toutes limites, et par conséquent que ce contenu ne pourra varier qu'entre zéro (ligne repliée sur elle-même, surface repliée sur elle-même) et une certaine limite supérieure que j'appellerai *le maximum absolu*. Supposer le contraire c'est admettre que le quotient (contenu) : (contour) peut devenir infiniment grand, ou en d'autres termes, inversement : *qu'un contenu donné, quelque grand qu'il soit, peut être limité par un contour d'étendue nulle*, ce qui est absurde.

Il s'agit maintenant d'examiner si, et comment, on pourra atteindre ce maximum absolu, non seulement *en grandeur* mais aussi *en forme précise*; c'est à ce dernier égard qu'il pourrait y avoir doute.

On peut supposer l'existence, soit d'un maximum unique, soit de plusieurs maxima équivalents de formes différentes¹, soit encore d'une infinité de maxima équivalents de formes diverses² — soit enfin d'un maximum absolu précisé en grandeur mais non en forme. Il est indifférent qu'on arrive à un pareil maximum par un nombre limité de transformations ou par un nombre infini d'approximations successives³.

Dans les démonstrations qui suivent, je ne poursuis pas de pareilles distinctions; l'idée dominante est tout autre : nous étudions les conditions que doivent remplir les formes cherchées pour pouvoir constituer un maximum s'il existe; nous trouvons que seuls le cercle dans le plan et la sphère dans l'espace remplissent ces conditions.

Considérons pour simplifier le cas d'un contour dans le plan (on raisonnerait de même pour les surfaces dans l'espace). Nous trouvons que ce contour, tant qu'il n'est pas dépourvu de tout point singulier, de toute irrégularité de courbure (pointe, creux, bosse, etc.) tant qu'il n'est pas entièrement circulaire en un mot, — peut toujours être déformé de façon que l'on obtienne un agrandissement du contenu. En supprimant ainsi toutes les irrégularités de courbure, par approximations successives, nous arrivons au contour circulaire qui seul résiste à tous ces procédés⁴.

¹ Par exemple : des figures symétriques dans le plan ou dans l'espace.

² Par exemple : Tous les triangles à aire maxima inscrits dans une ellipse donnée ; ce sont les projections d'un triangle équilatéral mobile restant inscrit dans le cercle dont l'ellipse est la projection ; ils sont de forme variable.

³ Par exemple : Un triangle irrégulier dans lequel, tout en conservant la longueur du périmètre, on remplace successivement deux côtés inégaux par deux côtés égaux, puis l'un d'eux et le troisième par deux côtés égaux et ainsi de suite... jusqu'à la limite qui est le triangle équilatéral à aire maxima.

⁴ Nos transformations font subir à chaque fois au contour, non seulement un agrandissement du contenu mais aussi une diminution simultanée de la longueur du périmètre. Pour maintenir celle-ci non altérée, il faudrait donc faire suivre chaque opération d'un agrandissement de toute la figure, par voie de similitude.

Mais objectera-t-on peut-être, il n'est pas démontré que par d'autres procédés que ceux mentionnés, on ne puisse arriver à un contour de contenu encore plus grand? Cela est impossible car, ou ce nouveau contour serait circulaire ou il ne le serait pas. Dans le premier cas il serait identique au cercle déjà trouvé, car deux cercles ayant même périmètre sont identiques. Dans le deuxième cas on pourrait appliquer à ce nouveau contour nos procédés de transformation jusqu'à le ramener à être circulaire et alors, après tous les agrandissements de contenu ainsi obtenus, on serait ramené de nouveau à un cercle de contenu supérieur à celui du cercle déjà trouvé, tout en ayant même périmètre, ce qui est impossible. Donc enfin puisqu'il est impossible d'imaginer un contour isopérimétrique ayant un contenu supérieur à celui du cercle, celui-ci constitue *en grandeur et en forme le maximum absolu et unique* cherché, et ma méthode, consistant à supprimer successivement toutes les irrégularités de courbure par des amputations de plus en plus restreintes, établit simultanément *la limite de grandeur* et *la limite de forme*.

Pour la forme sphérique je ne donne que ma démonstration spéciale car j'estime qu'elle est tellement préférable aux exposés antérieurs, que ces derniers ne seront plus guère utilisés à l'avenir. Par contre, pour la forme circulaire dont on s'occupe bien plus souvent, j'ajoute à mon procédé spécial, deux autres démonstrations. La première (triangle rectangle), utilisée également par STEINER, représente la solution la plus simple; la seconde (polygones réguliers) conduit directement à la solution cherchée, sans un exposé préalable; je l'ai établie dans ce but spécial.

I. — Parmi toutes les courbes planes fermées de même périmètre, la courbe circulaire est celle qui limite la plus grande surface.

(1) Lorsqu'une droite AB (fig. 1) divise en deux parties égales la longueur ACBD d'un contour fermé renfermant une aire maximum, elle doit aussi diviser l'aire limitée par ce contour en deux parties égales. Supposons dans le cas contraire, que l'aire ACB, par exemple, soit supérieure à l'aire ADB et faisons tourner le contour ACB autour de AB comme axe pour le rabattre en sa position symétrique AC'B; alors l'aire totale ACBC'A dont le périmètre n'a pas changé, sera supérieure à l'aire de la figure primitivement considérée; celle-ci ne pourrait donc pas représenter un maximum.

(2) Le contour cherché ne doit contenir aucune cavité ou pointe rentrante. Considérons dans le contour ABCD (fig. 2) une cavité A et une pointe B dirigées vers l'intérieur. Dans les deux cas il est possible de mener une sécante découpant à l'intérieur une partie du contour de façon à agrandir l'aire tout en diminuant simultanément la longueur du contour. La figure considérée tout d'abord ne satisferait donc pas aux conditions posées.

(3) Le contour cherché ne doit pas non plus présenter des bosses

ou pointes dirigées vers l'extérieur. Considérons en effet (fig. 2) les pointes saillantes D et C. Dans le cas de D ainsi que dans le cas d'une bosse, il y a raccordement concave aux abords, ce qui d'après (2) doit être exclu. Dans le cas de C il y a raccordement convexe; menons par un point E voisin de C la droite EF bissectrice à la fois pour le contour et l'aire comprise et faisant en E un certain angle avec le contour. (Si cet angle était en particulier un angle droit, on choisirait sur l'arc convexe ou rectiligne EC un autre point E'). Remplaçons maintenant la moitié EDAF du contour par le rabattement symétrique de ECBF autour de EF comme axe, ce qui dans la nouvelle figure totale ne change ni la longueur du contour ni la valeur de l'aire qu'il comprend. Entre le point C et son symétrique C' par rapport à EF il existe alors un contour concave et la figure, d'après (2), ne peut constituer un maximum.

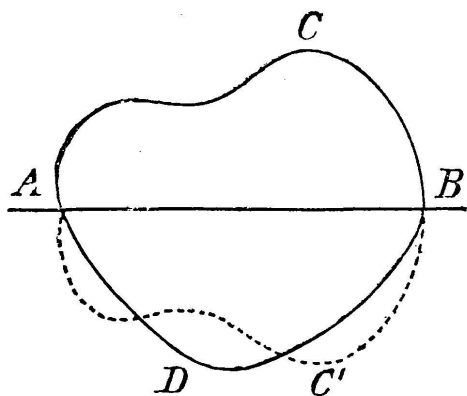


Fig. 1.

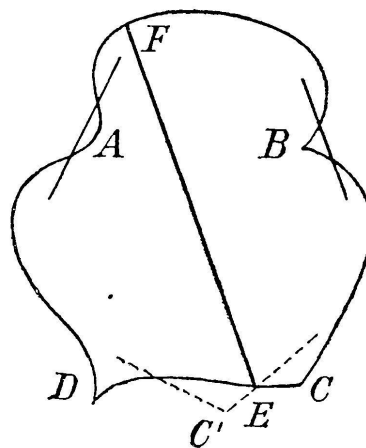


Fig. 2.

On pourrait, il est vrai, objecter que l'arc convexe EC étant tel qu'en chaque point il reste normal à la bissectrice qu'on y fait passer, la démonstration ci-dessus serait en défaut. Mais alors il suffirait de faire passer le point E' voisin du point C un peu au delà de celui-ci. Comme en C il y a rupture brusque de courbure, la conception de la bissectrice toujours normale au contour devient inadmissible.

(4) Le contour cherché ne doit contenir aucune partie rectiligne. Ceci résulte de la démonstration (3) ci-dessus dans laquelle il suffit de considérer (fig. 2) la partie EC du contour comme formée par une ligne droite. De plus, dans ce cas l'objection mentionnée ci-dessus disparaît d'elle-même, car si en E la bissectrice EF était normale à EC elle ne pourrait plus l'être en tout autre point E' de EC, deux bissectrices ne pouvant jamais être parallèles.

(5) Il résulte de ce qui précède que le contour cherché doit présenter partout une courbure continue, convexe et dépourvue de points singuliers. Cette courbure ne peut croître ou décroître

continuellement en intensité, autrement le contour ne pourrait être une courbe fermée ; elle sera donc alternativement croissante ou décroissante à moins qu'elle ne reste constante. Considérons (fig. 3) une bissectrice AB et supposons que le point A décrive la totalité du contour. Dans toutes les positions de AB cette droite devra toujours rester normale à la courbe au point A , car autrement en appliquant la démonstration du n° (3) donnée (fig. 2) pour le point C , on prouverait que la courbe ne convient pas pour le maximum cherché. La bissectrice AB devra pour les mêmes raisons rester aussi normale à la courbe en sa seconde extrémité B ; ce sera donc une droite toujours doublement normale à la courbe. La bissectrice AB , en exécutant son mouvement de rotation, roule sur la développée du contour.

Cette développée doit être une courbe fermée ; elle doit présenter un point de rebroussement pour chaque maximum ou minimum de courbure du contour. Il résulte encore de là que AB doit conserver une longueur constante, car ce qui se déroule d'un côté s'enroule de l'autre. La possibilité d'une pareille conception se démontre par un exemple :

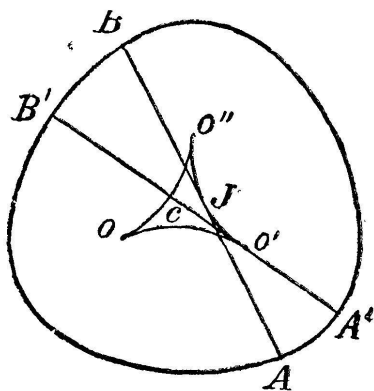


Fig. 3.

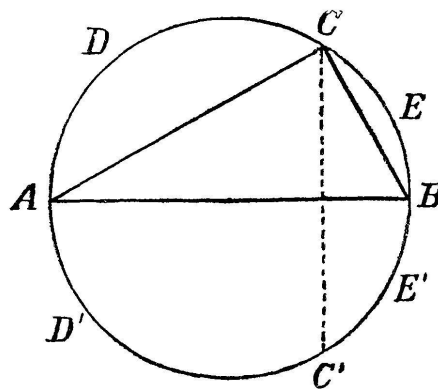


Fig. 4.

Concevons que la développée se compose de trois arcs de cercle égaux OO' , $O'O''$, $O''O$ (fig. 3) tangents deux à deux. Sur le milieu J de l'arc $O'O''$ posons le milieu de la droite AB , qui roulant ensuite sur cette développée quasi triangulaire, engendre le contour développant. A chaque maximum de courbure d'un côté, correspond un minimum de courbure de l'autre côté, comme le fait voir la position $A'B'$ de la droite mobile. On peut concevoir une infinité de pareilles figures, même de courbure irrégulière, dans lesquelles toutefois la développée devra toujours présenter un nombre impair de points de rebroussement et entre ceux-ci des arcs de même longueur, à défaut de quoi ce qui précède ne serait pas possible¹.

¹ On peut, pour s'en convaincre, essayer la construction (fig. 3) avec 4 arcs de cercle égaux pour la développée. On reconnaît de suite que l'on obtient ainsi plusieurs dévelop-

(6) Le contour doit forcément être de forme circulaire. En effet, si une forme du contour, telle qu'elle vient d'être décrite, est admissible géométriquement, nous y rencontrons cependant, dans le cas du problème actuel, une impossibilité, qui ne disparaît que si la développée considérée se réduit à un point unique, à défaut de quoi la droite AB ne pourrait pas rester bissectrice dans toutes ses positions. Lorsque de fait, le point J de contact avoisine l'un des points de rebroussement, comme pour $A'B'$, l'un des rayons vecteurs développants est plus grand que l'autre, donc l'accroissement de l'aire d'un côté ne peut être égal à la diminution de l'autre côté. Donc enfin la développée $OO'O''$ doit forcément se réduire à un point unique et nous arrivons ainsi immédiatement au développement du contour circulaire, c. q. f. d.

(7) Au lieu d'établir, comme ci-dessus (5) et (6) la forme circulaire du contour cherché, en considérant le mouvement de rotation d'une bissectrice doublement normale, on peut arriver à la même conclusion à l'aide de la démonstration suivante déjà utilisée dans les mémoires de STEINER et qui est certainement la plus simple¹.

Considérons (fig. 4) une bissectrice AB et un point C pris à volonté sur le contour; menons les droites CA et CB . Dans le triangle ACB l'angle en C doit être un angle droit, car s'il ne l'était pas, on pourrait agrandir la demi-surface $ABECD$ sans changer la longueur du contour curviligne en remplaçant cet angle par un angle droit, tout en laissant sur les côtés AC et BC les segments courbes qu'ils sous-tendent. En remplaçant ensuite la deuxième moitié $ABE'C'D'$ du contour par la figure symétrique de la première prise par rapport à AB , on aurait augmenté l'aire de la figure totale, sans changer la valeur du contour.

Ces modifications de forme introduisant même en A , C , B , C' des points singuliers dans le contour on pourrait encore y appliquer les procédés mentionnés au (2), etc. Le contour doit donc forcément être circulaire.

(8) Au lieu d'utiliser les deux démonstrations ci-dessus, qui s'appuient sur notre exposé préliminaire, on peut arriver sans celui-ci, directement à la conclusion voulue, à l'aide d'une démonstration que nous avons établie, en considérant des polygones réguliers d'un nombre infini de côtés.

pantes au lieu d'une seule, tandis que dans le cas d'un nombre impair de rebroussements, comme ci-dessus, les deux extrémités de AB décrivent une seule et même courbe. Il suffit pour cela que les arcs de développée aient même longueur, mais il n'est pas nécessaire qu'ils soient circulaires ni même qu'ils soient tangents entre eux. Ce qu'il importe de remarquer, c'est que dans ces conditions, après une révolution complète de la droite AB , le point B se trouve exactement à la place où se trouvait précédemment le point A , tandis que dans le cas d'un nombre pair de rebroussements, ce serait le point A qui serait revenu sur lui-même.

¹ Notre première démonstration spéciale, offre toutefois l'avantage de pouvoir être utilisée de nouveau plus loin, pour notre démonstration concernant la forme sphérique.

Si (fig. 5) deux côtés adjacents AC' et BC' d'un polygone sont inégaux on peut remplacer le contour $AC'B$ par un autre ACB de même longueur, à côtés égaux et qui renferme une plus grande surface¹, de façon que :

$$AC + CB = AC' + C'B \text{ et surf. } ACB > \text{surf. } AC'B$$

Menons la droite CH parallèle à AB et prolongeons AC de sa propre longueur jusqu'au point D qui est alors le symétrique de B par rapport à CH . Joignons ce point D au point C'' où AC' coupe CH et joignons $C''B$ en sorte que $C'D = C''B$. On voit sur la figure que :

$$AC'' + C''B = AC'' + C'D > AD = AC + CB.$$

Donc le contour $AC''B$ étant plus grand que le contour ACB , le point C' où il doit y avoir égalité, se trouve forcément au-dessous de la droite CH et la surface ACB surpasse la surface $AC'B$ de la surface $BC'C''$.

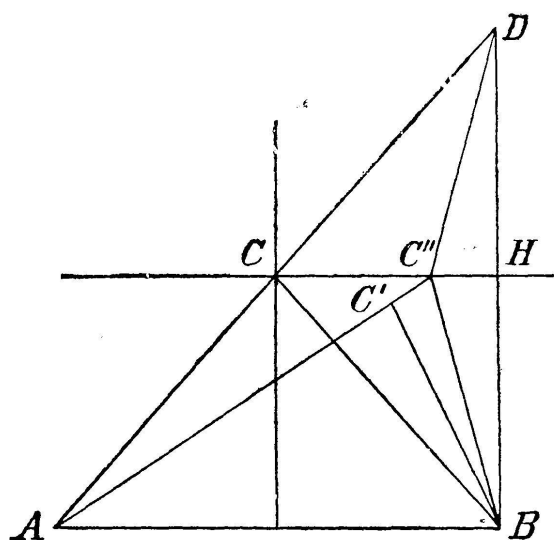


Fig. 5.

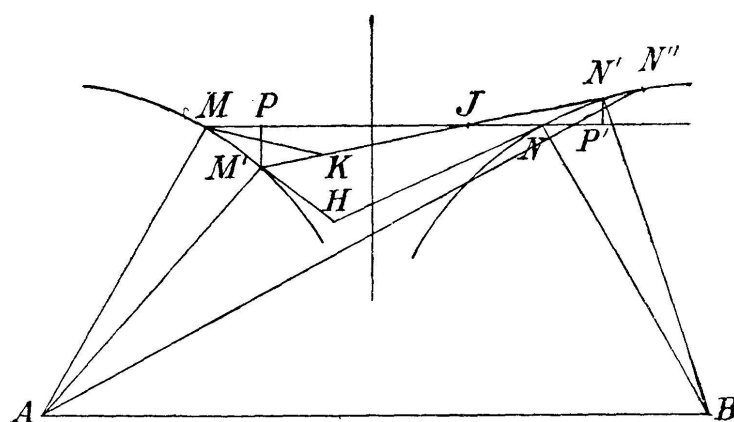


Fig. 6.

Lorsque AC' tend vers AC l'aire $BC'C''$ tend vers zéro.

Si d'autre part (fig. 6) dans un polygone ayant tous ses côtés égaux à r , deux angles voisins $AM'N'$ et $BN'M'$ sont inégaux, on peut déformer le contour $AM'N'B$ en un autre $AMNB$ à côtés de même longueur, à angles égaux et comprenant une surface plus grande. Soit J le point d'intersection des droites MN et $M'N'$. Il s'agit de prouver qu'en passant de $AM'N'B$ à $AMNB$ l'agrandissement $AMJM'A$ surpasse la diminution $BNJN'B$.

¹ Le lieu géométrique des points C' est une ellipse ayant A et B comme foyers et C comme sommet du petit axe. La hauteur du point C au-dessus de AB est donc maxima et ceci suffirait pour démontrer la proposition.

Remarquons d'abord que $MM' > NN'$ car si l'on avait $MM' \leq NN'$ il faudrait que $M'N'$ fut plus grand que MN ce qui se démontre comme suit : les droites MM' et NN' se coupent en H ; l'angle NMH est plus grand que l'angle de MN avec la tangente en M au cercle décrit avec A comme centre et r comme rayon. L'angle MNH est plus petit que l'angle de MN avec la tangente en N au cercle décrit de B comme centre et r comme rayon. MN faisant avec les tangentes mentionnées des angles égaux, on a donc $NMH > MNH$. Abaissons $M'P$ et $N'P'$ perpendiculaires sur MN ; alors on aurait (même dans le cas où $MM' = NN'$) forcément : $NP' > MP$ d'où résulte $M'N' > PP' > MN$ contrairement à $M'N' = MN$. Donc il faut que $MM' > NN'$ et surf. $AMM' > surf. BNN'$.

Menons maintenant MK de telle façon que l'on ait pour les angles l'égalité $JMK = JN'N$. Le point K doit se trouver sur JM' car l'angle JMH est plus grand que JNH et à plus forte raison plus grand que $JN'N$. Par suite de la similitude des triangles MJK et $N'JN$ et des inégalités $MK > MM' > NN'$ on aura pour les surfaces $MJM' > MJK > N'JN$ et ceci complète la démonstration qu'il fallait donner pour $AMJM'A > BNJN'B$.

Lorsque $M'N'$ tend vers MN , cette inégalité tend vers une égalité, pour laquelle les deux termes tendent vers zéro. Si l'on pousse la déformation en sens inverse, on atteint la limite où la ligne brisée $AM'N'$ devient une ligne droite AN'' . Il n'y a pas lieu d'aller au delà puisqu'alors la diminution de l'aire comprise devient manifeste.

(9) Parmi tous les polygones ayant un périmètre de longueur donné et un nombre de côtés donné, le polygone régulier comprend la plus grande surface et entre deux polygones réguliers ayant un périmètre de longueur donné, celui qui a le plus grand nombre de côtés comprend aussi la plus grande surface.

Le premier énoncé résulte immédiatement de ce qui a été démontré au n° 8, car il faut, d'après cela, dans le polygone considéré, que tous les côtés soient égaux et que tous les angles soient égaux. Le second énoncé résulte de ce que le polygone d'un plus petit nombre de côtés peut toujours être considéré comme un polygone irrégulier d'un plus grand nombre de côtés.

(10) Le contour cherché, renfermant la plus grande surface à égalité de périmètre, doit être circulaire. On peut en effet toujours inscrire dans le contour considéré un polygone ayant m côtés égaux à r . On prendra à cet effet les m côtés r assez petits pour qu'en les portant sur le contour, le polygone ne se ferme pas ; puis on fera croître r d'une manière continue jusqu'à ce que la ligne polygonale se ferme. Le polygone alors inscrit devra être un polygone régulier, autrement en le déformant de manière qu'il devienne régulier, tout en laissant les segments

curvilignes attachés à ses côtés, on agrandirait l'aire comprise sans changer la longueur du contour. Si l'on suppose maintenant que le nombre m des côtés croisse jusqu'à l'infini, les polygones réguliers s'assimilant alors de plus en plus au contour considéré, qui doit les contenir tous, on en conclut que ce dernier doit être un cercle.

Cette troisième démonstration, moins simple que les deux précédentes, offre cependant l'avantage de conduire directement à la conclusion sans s'appuyer sur notre exposé préliminaire. Elle nous fait indirectement connaître aussi certaines propriétés des polygones, auxquelles il convient d'ajouter encore la suivante :

Parmi tous les polygones de périmètre donné, formés par une suite de m côtés de longueurs quelconques, également données, celui qui est inscriptible dans un cercle contient la plus grande surface. On peut en effet porter la suite de m côtés sur une circonférence d'un rayon suffisamment grand pour que la ligne polygonale ne se ferme pas. On fera ensuite décroître le rayon d'une manière continue jusqu'à ce qu'il y ait fermeture ; le polygone sera alors inscrit.

Portant maintenant les m côtés de ce polygone sur les côtés respectifs du premier polygone, avec les segments circulaires qu'ils sous-tendent, on obtiendra une figure à contour curviligne, ayant une surface totale moins grande que celle du cercle. Retranchant de part et d'autre les segments circulaires, il reste les deux polygones à comparer, dont celui qui est inscriptible contient la plus grande surface.

(11) Les propriétés du cercle entier se généralisent pour le segment circulaire comme suit :

Lorsqu'une ouverture entre deux points d'un contour fermé pour le reste, doit être close par une ligne de longueur donnée, c'est le segment circulaire dont l'arc possède cette longueur, qui contient la plus grande surface, car l'aire du cercle entier auquel ce segment appartient, ne pourrait qu'être diminuée si on le remplaçait par tout autre contour de même longueur.

II. — De toutes les formes géométriques d'un corps limité de toute part dans l'espace, la forme sphérique est celle qui, à égalité de grandeur de l'enveloppe, renferme le plus grand volume.

(12) Toute section plane AB (fig. 7) pratiquée à travers un corps solide, renferme une surface moins grande que la surface de chacune des calottes détachées dans le corps. Considérons d'abord la calotte supérieure dont la surface peut être entièrement projetée sur la section AB . Menons à travers la calotte ACB un grand nombre de plans parallèles entre eux, perpendiculaires à la section AB , et divisant cette calotte en disques minces. Menons ensuite un second système de plans parallèles, perpendiculaires aux disques et à la section AB , lesquels divisent les disques en un

grand nombre de prismes minces (ou plutôt troncs de prismes) à base rectangulaire. Chacun de ces prismes projette une petite parcelle de la surface de calotte sur la base rectangulaire dans la section AB . Le nombre de prismes projetants devenant infiniment grand, les parcelles de la calotte peuvent être considérées comme de petits parallélogrammes toujours plus grands que leur projection sur la section AB , s'ils ne possèdent pas, comme dans le cas de parallélisme, une valeur au moins égale. Tout le long du contour de la section AB les parcelles de calotte seront triangulaires en général, mais la conclusion reste la même.

Dans la seconde calotte détachée $AA'C'B'B$ la surface surpasse à plus forte raison celle de la section AB , puisque déjà la portion $A'C'B'$ qui se projette sur la section AB est plus grande que la surface de celle-ci, d'après ce qui précède.

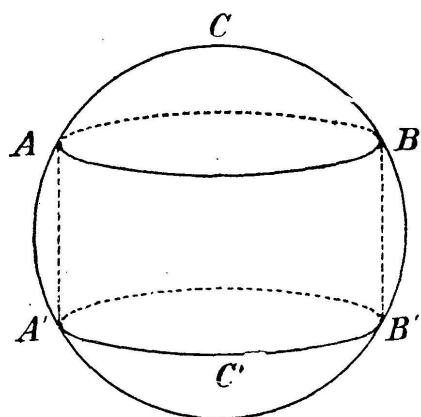


Fig. 7.

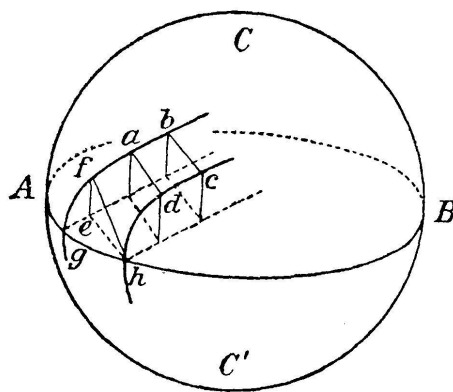


Fig. 8.

(13) Considérons (fig. 8) dans un corps solide, la calotte ACB détachée par une section plane AB et supposons que l'on prolonge toutes les ordonnées de cette calotte, perpendiculaires à la section, d'une quantité égale à leur propre longueur; il en résultera une nouvelle surface $AC'B$ symétrique de ACB par rapport à la section AB . Nous allons démontrer que le corps $AC'B$ possède exactement la même valeur de surface enveloppe et la même valeur de volume que son symétrique ACB .

Menons à travers le corps ACB un grand nombre de plans parallèles entre eux, perpendiculaires à la section AB et divisant ce corps en disques minces. Menons ensuite un second système de plans parallèles perpendiculaires aux disques et à la section AB , lesquels divisent les disques en un grand nombre de prismes minces (ou plutôt troncs de prismes) à base rectangulaire dans la section AB . Le nombre des prismes projetants devenant infiniment grand, les parcelles de la surface peuvent être considérées comme de petits parallélogrammes. Considérons (fig. 8) l'un de ces parallélogrammes $abcd$; celui-ci sera reproduit exactement dans la

surface symétrique $AC'B$, car les longueurs des quatre côtés et des diagonales sont les mêmes de part et d'autre.

Sur l'extrémité du disque considéré $bghc$ il y aura, au lieu d'un parallélogramme, un triangle ghf qui sera également reproduit dans la figure symétrique, car les longueurs des trois côtés restent les mêmes. Donc on conclut que les surfaces enveloppes des deux corps symétriques ACB et $AC'B$ ont la même valeur.

D'autre part le volume de l'un des troncs de prisme, par exemple, celui provenant de $abcd$, s'obtient en multipliant l'ordonnée du centre de $abcd$ par la surface de la base rectangulaire. Ces deux facteurs se trouvent reproduits dans le tronc de prisme symétrique ; il en est donc de même pour le volume. Enfin vers l'extrémité du disque il y a, au lieu d'un tronc de prisme, une petite pyramide $fegh$ dont le volume s'obtient en multipliant la base triangulaire egh par le tiers de fe . Ces facteurs étant reproduits dans la pyramide symétrique il en est encore de même du volume. Donc en somme les deux corps symétriques ACB et $AC'B$ ont des volumes de valeur égale.

(14) Toute section plane qui dans le corps de forme cherchée divise la surface enveloppe en deux parties de valeur égale, doit aussi diviser le volume du corps en deux parties de valeur égale. Dans le cas contraire, en effet, on pourrait remplacer la moindre partie par la figure construite symétriquement sur la section avec l'autre partie d'après (13) et on aurait ainsi obtenu un volume encore plus grand sans changer la valeur totale de l'enveloppe, ce qui doit être exclu en principe.

(15) La forme du corps cherchée ne doit présenter aucune cavité, rigole, arête vive ou pointe dirigées vers l'intérieur. Dans le cas d'une cavité proprement dite, on trouvera toujours un point de

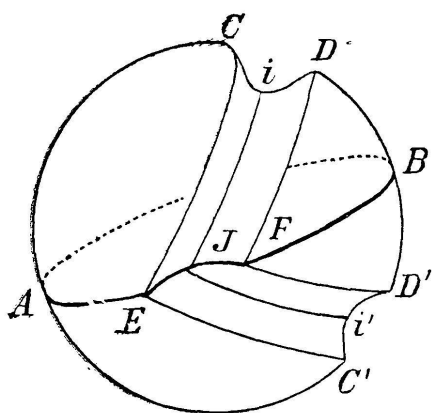


Fig. 9.

la surface, pour lequel celle-ci est concave dans toutes les directions, le plan tangent dans le voisinage restant entièrement compris à l'intérieur. Alors toute section plane parallèle à ce plan et très voisine, détache une calotte de surface tombant à l'intérieur et de ce fait amoindrit la valeur de l'enveloppe tout en augmentant le volume compris (12). Dans le cas d'une rigole, il y a concavité dans le sens transversal, tandis que dans le sens longitudinal (fig. 9) il peut y

avoir convexité. On pourrait bien en pareil cas, considérer l'extrémité de la rigole où généralement il y aura concavité ; mais il se pourrait que la rigole n'ait pas d'extrémité, en revenant en forme annulaire sur elle-même ; il se pourrait encore que vers

l'extrémité il y ait raccordement convexe avec la surface arrondie. En pareil cas coupons la surface (fig. 9) par un plan bissecteur AEFB faisant avec la rigole un certain angle DFB et remplaçons la partie inférieure du corps par la figure symétrique de la partie supérieure ACDB, ce qui (13) ne change ni la valeur de l'enveloppe ni celle du volume compris. La rigole CEFD et la rigole symétrique C'EFD' se coupent suivant un profil concave EF. Entre le point J où les talwegs de rigoles se rencontrent et le point E il y a sûrement une arête vive rentrante, concave, où l'on peut à l'aide d'une section plane, détacher une calotte tombant à l'intérieur, ce qui amoindrit la valeur de l'enveloppe tout en augmentant celle du volume.

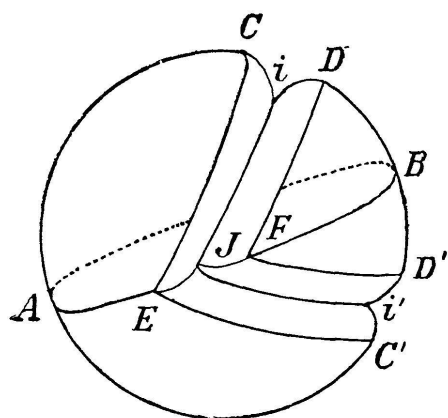


Fig. 10.

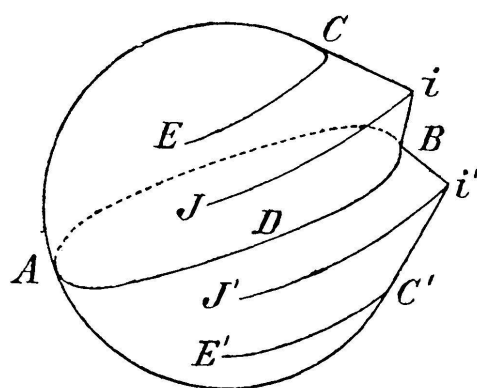


Fig. 11.

Considérons maintenant le cas (fig. 10) où la rigole ne présenterait aucune concavité, ni dans un sens ni dans l'autre, étant formée de talus convexes ou plans, qui se coupent suivant une arête vive ij convexe et se raccordent en CE et DF avec le reste de la surface. Menons comme ci-devant à travers le corps un plan bissecteur AEFB coupant la rigole suivant un angle aigu DFB et remplaçons la partie inférieure du corps par la figure symétrique à la partie supérieure (13). La rigole CEFD et la rigole symétrique C'EFD' se coupent suivant l'arête vive EF et les arêtes vives ij et $i'j$ se rencontrent en J où il s'est formé une pointe rentrante, que l'on peut couper par une section plane très voisine, de façon à détacher une calotte tombant à l'intérieur, ce qui amoindrit la valeur de l'enveloppe tout en agrandissant celle du volume.

La démonstration que nous venons de donner serait applicable à toute arête vive ou pointe rentrant dans la surface de l'enveloppe.

(16) La forme de corps cherchée ne doit présenter ni bosses, ni bourrelets, ni arêtes vives ou pointes dirigées vers l'extérieur. En tant qu'il s'agit de bosses, bourrelets ou autres parties saillantes, dépourvues d'arêtes vives ou pointes, on remarquera qu'une pareille excroissance, si elle ne forme partie de la surface même,

sera toujours raccordée avec elle par des parties concaves et doit de ce fait (15) rester exclue.

Considérons maintenant (fig. 11) le cas d'une arête vive iJ reliée en CE par un raccordement convexe avec la surface. Menons parallèlement à la tangente en un point i de l'arête iJ et dans le voisinage, un plan bissecteur AB qui coupe la surface du corps $iJBD$ en biais. (Si ce plan sécant était par hasard normal à la surface dans le voisinage du point B , on prendrait entre BD et i un autre plan sécant bissecteur $B'D'$ qui ne le serait pas). Remplaçons ensuite la partie inférieure du corps par la figure symétrique de la partie supérieure (13) ce qui ne modifie en rien la valeur de l'enveloppe et du volume compris. Il s'est formé alors entre l'arête iJ et l'arête symétrique $i'J'$ une rigole rentrante, ce qui (15) doit rester exclu.

On pourrait, il est vrai, objecter que la surface du corps entre BD et iJ étant telle que les plans bissecteurs $B'D'$ menés dans cet intervalle parallèlement à la tangente en i , rencontrent cette surface toujours normalement, la démonstration ci-dessus serait en défaut. Mais en pareil cas il suffirait de faire passer le plan sécant $B'D'$ un peu au delà de la tangente en i . Puisqu'en ce point il y a rupture brusque de courbure, la conception du plan bissecteur toujours normal à la surface est alors inadmissible.

La démonstration donnée ci-dessus pour le cas d'une arête vive à raccordements convexes, serait également applicable au cas d'une pointe raccordée de la même façon.

(17) La forme de corps cherchée ne doit contenir aucune ligne droite ni aucune surface plane. Ceci résulte de la démonstration (16) pourvu que dans la figure (11) on considère Bi comme une ligne droite ou BiJ comme une surface plane. En outre, si dans cette figure le plan bissecteur BD était normal à la droite ou au plan en B , tout autre plan bissecteur $B'D'$ entre B et i ne le serait plus, puisqu'il ne peut y avoir deux plans bissecteurs parallèles.

Il résulte de tout ce qui précède que la forme de corps cherchée doit être partout continue, arrondie, convexe et dépourvue de points singuliers.

(18) Tout plan bissecteur, doit en chaque point de la courbe de section, être normal au plan tangent à la surface en ce point. En effet si cela n'était pas, on pourrait, en procédant d'après (15) et (16), remplacer l'une des moitiés du corps par la figure symétrique de l'autre et établir ainsi une rigole, permettant de diminuer l'enveloppe tout en augmentant le volume compris.

(19) La forme de corps cherchée doit être la forme sphérique. En effet, menons à travers le corps (fig. 12) le plan bissecteur XX' pris à volonté puis perpendiculairement à celui-ci le plan bissecteur ZZ' qui coupe le premier suivant YY' , enfin perpendiculairement à cette droite le plan bissecteur $XZX'Z'$, qui

coupe cette ligne en O et le premier plan bissecteur mentionné XX' , suivant la droite XOX' . Nous avons établi ainsi les trois axes rectangulaires usuels et nous allons prouver que la première section $XYX'Y'$ menée tout d'abord, à volonté, doit être circulaire.

Supposons (fig. 12) que le plan bissecteur $XZX'Z'$ se meuve de façon à rester toujours perpendiculaire au plan $XYX'Y'$ et de façon que le point X fasse un tour complet sur la périphérie de cette section. En une position quelconque X'' de ce point, la droite $X''X'''$, suivant laquelle se coupent les deux plans, doit d'après (18) être toujours normale à la courbe $XX''X'$ et il en est

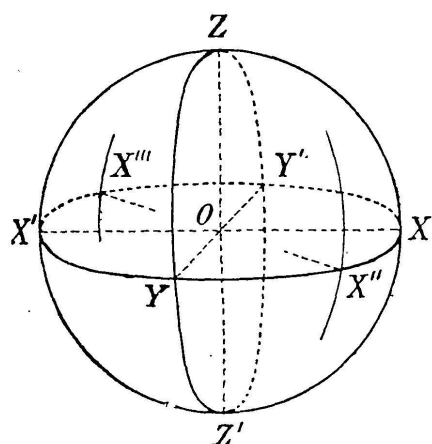


Fig. 12.

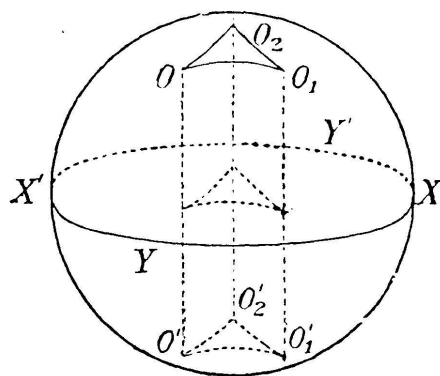


Fig. 13.

de même pour le second point d'intersection X''' . Nous sommes ainsi ramenés absolument à ce qui a été dit au n° 5 fig. 3, quant au mouvement de rotation de la droite doublement normale, roulant sur la développée de la courbe de section; toutefois ici on ne peut affirmer pour le moment, que cette droite mobile soit bissectrice de la section $XX''X'X'''$. Pour tout le reste rien n'est changé: la droite $X''X'''$ conserve une longueur constante; elle roule sur une développée à nombre impair de rebroussements... etc. Pour simplifier nous admettrons comme dans la fig. 3 qu'il n'y en ait que trois; ce qui suit s'appliquerait tout aussi bien à un nombre supérieur.

La droite $X''X'''$ roule donc dans le plan $XX''X'X'''$ sur une développée quasi triangulaire. Le plan bissecteur mobile roule sur une surface cylindrique normale au plan $XX''X'X'''$ et ayant cette développée quasi triangulaire comme base. Ce cylindre coupe la surface du corps (fig. 13) suivant deux contours quasi triangulaires OO_1O_2 et $O'O'_1O'_2$. Chaque point d'un pareil contour OO_1O_2 correspond à une position du plan bissecteur mobile et à une ligne de contact du cylindre, normale au plan $XYX'Y'$. Il faut donc, d'après (18), qu'en chacun de ces points (fig. 13) du contour OO_1O_2 , le plan tangent à la surface du corps, soit parallèle au

plan $XYX'Y'$. Ceci ne serait possible que si le contour OO_1O_2 était dans un plan, ou si à l'intérieur la surface était concave. L'un et l'autre cas doivent, d'après (15) (16) (17), être exclus et cette impossibilité ne disparaît que si la développée quasi triangulaire (fig. 12) dans le plan $XYX'Y'$ se réduit à un point unique le cylindre de roulement se réduisant alors à un axe de rotation. Le mouvement de la droite $X''X'''$ engendre donc un cercle.

Le plan bissecteur $XYX'Y'$, ayant été pris à volonté, on en conclut que tout plan bissecteur coupe le corps suivant un cercle. Ceci s'applique en particulier au plan bissecteur mobile qui, tournant autour d'un diamètre, engendre alors une sphère, c. q. f. d.

(20) Spécialement, quant à la forme à adopter pour calottes de chaudières, têtes de bouées, corps d'aérostats... etc., on peut généraliser facilement pour la calotte sphérique ce qui vient d'être démontré pour la sphère entière; à savoir:

Parmi toutes les formes de surface d'une étendue donnée, pouvant constituer la clôture d'une ouverture circulaire, la calotte sphérique possédant cette étendue offre le contenu maximum, car le volume de la sphère entière à laquelle appartient cette calotte, ne pourrait être que diminué, si on la remplaçait par tout autre surface de clôture ayant même étendue.

Max Edler v. LEBER (Vienne, Autriche).

SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA THÉORIE DES INTÉGRALES ABÉLIENNES

La théorie des intégrales abéliennes, à laquelle se rattachaient, au siècle passé, tant de grands noms depuis ABEL à WEIERSTRASS, maintenant que l'on est arrivé à trouver sa vraie forme, simple, élégante et toute naturelle, n'attire guère l'attention que d'un très petit nombre de mathématiciens. A quoi cela tient-il?

En laissant de côté les causes subjectives, comme les préjugés, par exemple, et en passant directement aux causes objectives, on les trouve dans la marche historique du développement de cette théorie. Le génie d'Abel a brillamment commencé la théorie des intégrales qui portent maintenant son nom immortel, en analysant les divers cas particuliers de son célèbre théorème, directement,